

5.804.B,



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année,
Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVI.

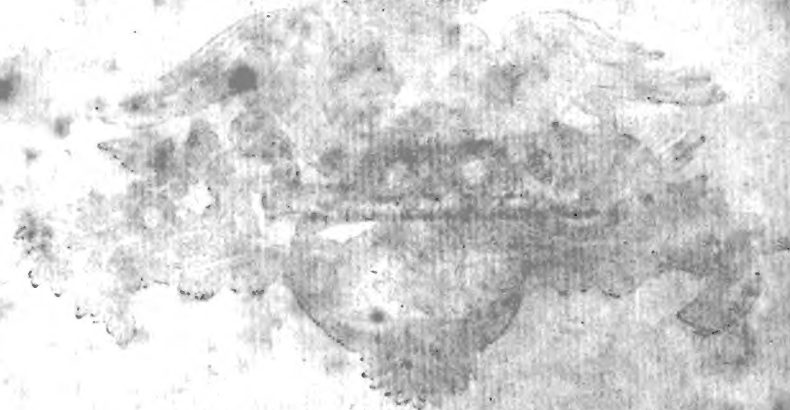
LA GAZETTE

DES
FINANCES

PAR
LE MINISTRE DES FINANCES

Le 15 Mars 1812
N° 1000

Paris



PARIS
DE L'IMPRIMERIE ROYALE

1812



TABLE

POUR L'HISTOIRE.

*R*APPORT fait à l'Académie des Sciences, sur la Machine
aérostatique de M.^{rs} DE MONTGOLFIER, &c.. Page 5

<i>Ouvrages présentés à l'Académie</i>	24
<i>Éloge de M. Hunter</i>	29
<i>Éloge de M. Euler</i>	37
<i>Éloge de M. Bézout</i>	69
<i>Éloge de M. d'Alembert</i>	76
<i>Éloge de M. de Tressan</i>	121
<i>Éloge de M. Wargentin</i>	128



TABLE POUR L'HISTOIRE.

Le tableau ci-dessous indique les dates des événements les plus importants de l'histoire de la France.

1789	La Révolution française commence.
1793	La Terreur commence.
1799	Napoléon Bonaparte prend le pouvoir.
1804	Napoléon Bonaparte est couronné empereur.
1815	Napoléon Bonaparte est vaincu à Waterloo.
1830	La Révolution de Juillet.
1848	La Révolution de Février.
1870	La Commune de Paris.
1871	La Commune de Paris est réprimée.
1875	La Troisième République est proclamée.
1914	La Première Guerre mondiale commence.
1918	La Première Guerre mondiale se termine.
1939	La Seconde Guerre mondiale commence.
1945	La Seconde Guerre mondiale se termine.
1958	La Cinquième République est proclamée.
1968	La Mai 68.
1979	La Cinquième République est révisée.
1981	La Cinquième République est révisée.
1984	La Cinquième République est révisée.
1988	La Cinquième République est révisée.
1991	La Cinquième République est révisée.
1995	La Cinquième République est révisée.
1998	La Cinquième République est révisée.
2002	La Cinquième République est révisée.
2005	La Cinquième République est révisée.
2007	La Cinquième République est révisée.
2010	La Cinquième République est révisée.
2014	La Cinquième République est révisée.
2017	La Cinquième République est révisée.
2020	La Cinquième République est révisée.

T A B L E

POUR LES MÉMOIRES.

<i>SUR l'obliquité de l'Écliptique, & sur sa diminution. Par</i> <i>M. LE GENTIL.....</i>	<i>Page 1</i>
<i>Observation des hauteurs solsticiales du Soleil. Par le même.</i>	<i>12</i>
<i>Observation de la hauteur solsticiale du Soleil. Par le même.</i>	<i>13</i>
<i>Mémoire sur la figure de la Terre. Par M. DE LA PLACE.</i>	<i>17</i>
<i>Observations faites en 1782, au Solstice d'été. Par M. LE</i> <i>MONNIER.....</i>	<i>47</i>
<i>Mémoire sur l'usage des Horloges marines, &c. Par M. le</i> <i>Marquis DE CHABERT.....</i>	<i>49</i>
<i>Mémoire sur quelques particularités de la structure de la moëlle</i> <i>de l'Épine, & de ses enveloppes. Par M. SABATIER.</i>	<i>67</i>
<i>Mémoire sur le résultat de l'inflammation du Gaz inflammable</i> <i>& de l'Air déphlogistiqué, dans des vaisseaux clos. Par</i> <i>M. MONGE.....</i>	<i>78</i>
<i>Mémoire sur l'éclipse de Lune du 18 Mars 1783, &c.</i> <i>Par M. DE LA LANDE.....</i>	<i>89</i>
<i>Mémoire sur le changement d'inclinaison qui doit avoir lieu</i> <i>dans les Orbites planétaires. Par le même.....</i>	<i>93</i>
<i>Extrait des Observations qui décident de la position géographique</i> <i>de la ville & embouchure de la rivière de Saint-Domingue.</i> <i>Par M. LE MONNIER.....</i>	<i>97</i>
<i>Observations sur le Seigle ergoté. Par M. FOUGEROUX DE</i> <i>BONDARROY.....</i>	<i>101</i>
<i>Observations de deux Éclipses totales de la Lune, en 1783, &c.</i> <i>Par M. MESSIER.....</i>	<i>104</i>

T A B L E.

<i>Mémoire contenant les Observations de la Comète de 1783, &c.</i> Par M. MESSIER.....	123
<i>Expériences propres à développer les effets de la Lumière sur certaines Plantes.</i> Par M. l'Abbé TESSIER.....	133
<i>Rapport fait à l'Académie, relativement à l'avis que le Parlement a demandé à cette Académie, par arrêt du 6 Septembre 1783, &c.</i> Par M. ^{rs} LE ROY, TILLET & DESMAREST.....	157
<i>Nouvelles Méthodes analytiques pour résoudre différentes Questions astronomiques, &c.</i> Dix-huitième Mémoire. Par M. DIONIS DU SÉJOUR.....	263
<i>Trigonométrie sphérique, &c.</i> Par M. l'Abbé DE GUA.	291
<i>Diverses mesures, en partie neuves, des Aires sphériques & des Angles solides, &c.</i> Par le même.....	344
<i>Propositions neuves, & non moins utiles que curieuses, sur le Tétraèdre; ou Essai de Tétraédométrie.</i> Par le même.	363
<i>Mémoire sur la différence du Vinaigre radical & de l'Acide acéteux.</i> Par M. BERTHOLLET.....	403
<i>Mémoire sur la préparation de l'Alkali caustique, &c.</i> Par le même.....	408
<i>Nouvelles Réflexions sur l'augmentation de poids qu'acquièrent, en brûlant, le Soufre & le Phosphore, &c.</i> Par M. LAVOISIER.	416
<i>Suite du Mémoire sur les approximations des Formules qui sont fonctions de très-grands Nombres.</i> Par M. DE LA PLACE.....	423
<i>Suite des Recherches sur la structure du Cerveau. Quatrième Mémoire.</i> Par M. VICQ-D'AZYR.....	468
<i>Réflexions sur le Phlogistique, &c.</i> Par M. LAVOISIER.	505
<i>Mémoire sur le calcul des Probabilités. Quatrième Partie.</i> Par M. le Marquis DE CONDORCET.....	539

T A B L E.

<i>Théorème sur les Équations en différences finies.</i> Par M. CHARLES.	560
<i>De l'action du Feu, &c.</i> Par M. LAVOISIER.....	563
<i>Mémoire sur une nouvelle Machine à électriser, &c.</i> Par M. LE ROY.....	615
<i>Observation de l'Éclipse totale de Lune du 18 Mars 1783, &c.</i> Par M. ^{rs} le Duc DE LA ROCHEFOUCAULD, l'Abbé ROCHON & MÉCHAIN.....	625
<i>Observation de l'Éclipse totale de Lune du 10 Septembre 1783, &c.</i> Par M. MÉCHAIN.....	628
<i>Occultations de quelques étoiles des Pléiades, observées à Paris le 9 Février 1783, &c.</i> Par le même.....	633
<i>Observations des éclipses du Soleil, des 14 Juin 1779 & 17 Octobre 1781, &c.</i> Par le même.....	639
<i>Mémoire sur la Comète de 1783.</i> Par le même....	643
<i>Remarques sur la manière d'intégrer par approximations les Équations différentielles, & les Équations aux différences partielles.</i> Par M. COUSIN	649
<i>Mémoire contenant quelques Remarques sur la théorie mathé- matique du mouvement des Fluides.</i> Par le même..	665
<i>Sur les Naissances, les mariages & les Morts à Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784, &c.</i> Par M. DE LA PLACE.....	693
<i>Essai sur la Population du Royaume, &c.</i> Par M. ^{rs} DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET & DE LA PLACE...	703
<i>Mémoire sur une méthode d'intégrer les Équations aux Diffé- rences ordinaires, &c.</i> Par M. MONGE.....	719
<i>Mémoire sur l'intégration des Équations aux différences finies, qui ne sont pas linéaires.</i> Par le même.....	725

T A B L E.

<i>Mémoire sur le Sel ammoniacal vitriolique , ou Sel secret de Glauber , &c.</i> Par M. CORNETTE.....	731
<i>Mémoire sur le Sel ammoniacal nitreux.</i> Par le même..	745
<i>Mémoire sur la Fracture en travers de la rotule.</i> Par M. SABATIER.	760

FAUTES à corriger dans le Volume de 1782.

Page 69 , ligne 3 , au lieu de

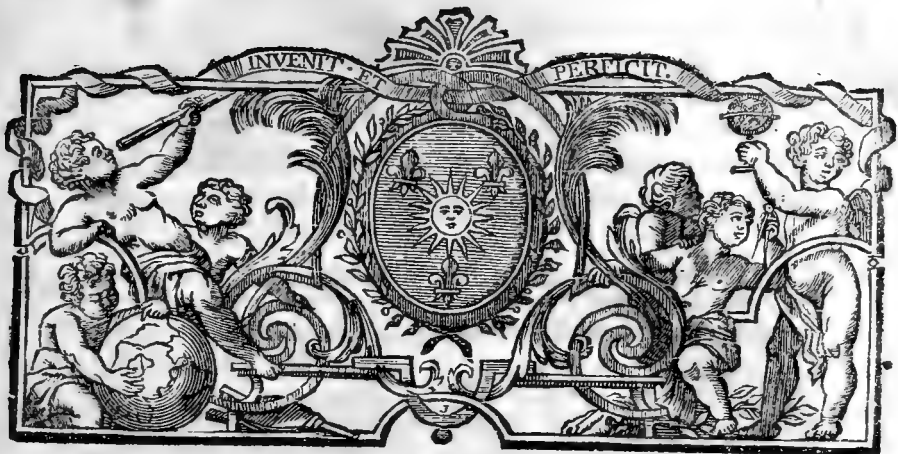
$$y_s = \frac{(2n)^{2s} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{[(2n+1) \cdot (n+1) \cdot 2s\pi]}}$$

lisez
$$y_s = \frac{(2n)^{2s} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{[(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot s\pi]}}$$

Pour le Volume de cette année.

Page 25 , ligne 13 , à la suite de ces mots , une fonction de μ & de ϖ , ajoutez μ étant fonction de $\cos. \theta$.





HISTOIRE

D E

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIII.



HISTOIRE de l'Académie, telle que M. de Fontenelle en avoit conçu le plan, a contribué sans doute & au progrès des Sciences & à la gloire de l'Académie.

On fortoit à peine du temps où l'on n'écrivoit sur les Sciences qu'en latin & dans le langage des Écoles : les Sciences Physiques n'avoient alors qu'une langue vague, obscure, étrangère à tous ceux qui n'avoient reçu qu'une éducation commune ; pour rapprocher cette langue de la

Hist. 1783.

A

langue ordinaire, & lui conserver la précision que doit avoir celle des Sciences; pour en bannir les mots scientifiques qui n'étoient qu'une pédanterie inutile, en gardant ceux qui étoient nécessaires pour l'exactitude du langage, il falloit le secours d'une philosophie à la fois fine & profonde.

La véritable méthode d'étudier la Nature étoit connue, mais elle n'avoit été pour aucun des Savans, alors existans, celle qu'ils avoient apprise dans leur jeunesse; presque tous avoient conservé quelque reste de la philosophie systématique, ou même de la philosophie de mots, qui régnoit encore dans l'École; & ils avoient besoin d'un Interprète qui séparât dans leurs Ouvrages ce qui n'appartenoit qu'à eux, de ce tribut qu'ils payoient aux erreurs de leur première éducation.

Aujourd'hui la langue des Sciences est formée; les premières leçons que reçoit la jeunesse, renferment ces mêmes principes alors connus seulement d'un petit nombre de Savans philosophes. L'étude de ces Sciences s'est répandue dans toutes les classes de la Société; les gens du monde n'ont plus même besoin qu'un Extrait leur facilite l'intelligence d'un Mémoire, & ils auroient quelque droit d'être blessés qu'on les soupçonnât de se contenter de la lecture de l'Extrait seul.

Quant aux sciences Mathématiques, à l'époque du renouvellement de l'Académie, la Méthode Géométrique des Anciens, l'Analyse de Descartes, les Méthodes de ses premiers Disciples, & le Calcul nouvellement découvert par Leibnitz & par Newton, partageant encore les esprits, avoient produit des disputes, & mêlé des discussions métaphysiques aux recherches de la Géométrie; les principes nécessaires pour appliquer le Calcul aux questions de Mécanique, étoient plus obscurs, moins généralement connus, plus contestés encore que ceux de la Géométrie nouvelle.

Il étoit utile, même pour le progrès de ces Sciences, d'en éclaircir la métaphysique, & de développer l'esprit

des différentes méthodes qu'elles peuvent employer. Aujourd'hui toutes ces discussions ont été écartées, & en même temps la nature des méthodes analytiques ne permet plus d'en développer l'esprit & la marche, d'en donner un Extrait de manière à se faire entendre même à-demi de ceux qui n'ont pas fait une étude approfondie du Calcul.

L'Histoire de l'Académie avoit encore un autre genre d'utilité; elle servoit à montrer, par les détails des travaux sur les Sciences, combien les objets en sont nobles & imposans; sous combien de rapports ces travaux peuvent concourir au bien général des hommes, ici, par des applications immédiates; là, en détruisant quelques erreurs; ailleurs, en perfectionnant la raison, en offrant à l'oisiveté des ressources plus sûres, moins dangereuses & moins nuisibles que le plaisir & l'intrigue. Mais ces vérités si honorables aux Sciences, alors inconnues du vulgaire, & que la philosophie de Fontenelle présente avec tant de modestie & de grâce, sont aujourd'hui devenues triviales & font une partie de l'opinion populaire. On n'a plus besoin de dire aux Princes, qu'ils ont intérêt de protéger les Sciences; ni au Public, que les Savans ont des droits à sa reconnaissance.

Au règne de l'Érudition on avoit vu succéder le goût des discussions de Métaphysique & de Morale; & l'opinion commune ne plaçoit pas sur la même ligne le Philosophe occupé de ces objets, & celui qui se livroit à l'étude des Sciences naturelles. Arnaud, Malebranche, Grotius, étoient pour le monde de bien plus grands hommes que Boyle, Huygens ou Roëmer. Il falloit venger les Sciences naturelles de cette injustice, en détruisant peu-à-peu un préjugé qu'il eût été imprudent d'attaquer de front; aujourd'hui il ne subsiste plus.

Enfin les Sciences étoient isolées; à peine parmi ceux même qui les cultivoient avec succès, un petit nombre connoissoient-ils les points par où elles se touchent, les objets sur lesquels elles peuvent se réunir, ceux sur

lesquels elles doivent encore rester séparées; & c'étoit dans l'Histoire de l'Académie qu'on pouvoit apprendre à saisir ces liaisons qui n'avoient pu échapper à l'esprit étendu & lumineux de Fontenelle.

Souvent les institutions les plus utiles cessent de l'être, précisément parce qu'elles ont rempli leur but & détruit le mal qu'elles devoient détruire. Il est rare cependant que l'on ait la sagesse de les changer à temps, & qu'après avoir duré long-temps, quoiqu'inutiles, elles ne finissent par être vraiment nuisibles,

L'Académie des Sciences, que le genre de ses travaux accoutume à voir les opinions, les méthodes se détruire & se succéder, est moins faite que tout autre Corps pour partager ce préjugé de l'orgueil, que les institutions d'un être foible & passager peuvent être durables comme l'Univers dont il a été quelques instans une si petite partie. Elle a supprimé les Extraits qui faisoient partie de son Histoire, dès qu'elle en a reconnu le peu d'utilité, & a voulu en même-temps que ces Extraits y fussent remplacés par les Observations qui lui sont adressées, par les Rapports les plus importants qui ont été lûs dans ses Séances.

C'est sous cette forme nouvelle que désormais paroîtra son Histoire.



R A P P O R T

*Fait à l'Académie des Sciences , sur la Machine
aérostatique , de M.^{rs} DE MONTGOLFIER ;
Par M.^{rs} le Roy , Tillet , Briffon , Cadet ,
Lavoisier , Bossut , de Condorcet & Desmarest.*

M. D'ORMESSON , Contrôleur général , frappé de l'expérience faite à Annonay par M.^{rs} de Montgolfier , le 5 Juin dernier , en présence de M.^{rs} les États particuliers du Vivarais , en a envoyé le procès-verbal à l'Académie. Dans cette expérience , on vit , non sans un grand étonnement , un globe creux de trente-cinq pieds de diamètre , fait en toile & en papier , & pesant quatre cents cinquante livres , parcourir en l'air plus de douze cents toises , en s'élevant à une hauteur considérable.

Par la Lettre qui accompagnoit ce procès-verbal , M. le Contrôleur général demandoit à l'Académie son jugement sur cette expérience , & sur l'espèce de machine qui avoit servi à la faire. La Compagnie , pour remplir ses vues , nomma M.^{rs} le Roy , Tillet , Briffon , Cadet , Lavoisier , Bossut , de Condorcet & Desmarest , pour prendre connoissance & de cette expérience & de cette machine. Il étoit nécessaire , dans une matière aussi nouvelle , que les Commissaires fussent éclairés par des expériences qui se fissent sous leurs yeux ; il fut décidé en conséquence , que M. de Montgolfier le jeune (qui étoit arrivé à Paris) feroit exécuter une Machine aérostatique aux frais de l'Académie (a) , pour pouvoir non-seulement répéter

(a) L'Académie , toujours empressée à favoriser les progrès des Arts & des Sciences , avoit en effet décidé que les expériences de la Machine aérostatique de M.^{rs} de Montgolfier , se feroient à ses frais ; mais le Gouvernement ayant senti

depuis , l'importance de cette découverte , & que ces frais pourroient être trop considérables pour l'Académie , s'est chargé de toutes les dépenses que l'on a faites à cette occasion.

l'expérience d'Annonay, mais encore en faire plusieurs autres. Nous allons rendre compte à la Compagnie de ces expériences, ainsi que de la nouvelle Machine construite par M. de Montgolfier, & du Mémoire qu'il a lû à cette occasion, depuis la rentrée de la Saint-Martin.

Mais comme l'objet dont nous allons entretenir l'Académie, est des plus importans, nous espérons qu'elle voudra bien nous accorder une attention particulière, pour mieux juger de ce que nous allons lui exposer.

Afin de procéder avec plus d'ordre dans ce Rapport, nous le partagerons en plusieurs articles ; dans le premier, nous dirons un mot de ce que l'on a tenté ou plutôt proposé dans ce genre avant l'expérience d'Annonay ; nous exposerons ensuite les idées & les tentatives qui ont mené successivement M.^{rs} de Montgolfier à la découverte de leur Machine aérostatique ; nous parlerons après des expériences que nous avons vues, des moyens qu'ils emploient pour remplir, ou plutôt pour enlever cette machine, & de la cause qui la soutient en l'air ; nous passerons ensuite au moyen dont on a fait usage, à la place de celui dont ils se servent, pour remplir des globes & des ballons : enfin, nous traiterons, mais fort en abrégé, des différens usages auxquels on peut employer la Machine aérostatique.

Le vol des oiseaux est si étonnant, & la faculté de s'élever & de planer dans les airs seroit pour nous quelque chose de si extraordinaire, & auroit sur l'ordre de la Société des effets si singuliers, qu'il n'est pas surprenant que les hommes s'en soient occupés de tous les temps. De-là, toutes les fables de l'antiquité sur ce sujet ; de-là, les efforts qu'ont faits dans différens temps ceux qui se sont cru assez de génie pour parvenir à inventer l'art de voler. Il seroit aussi inutile que déplacé, de rapporter ici ce que les Anciens nous en ont dit : ainsi, passant à des temps moins éloignés, nous nous contenterons de dire qu'on regarde en général Roger Bacon, ce génie si fort au-dessus de son siècle, comme le premier qui ait parlé d'une machine pour voler ; c'est dans son *Traité de mirabili potestate Artis & Naturæ, &c.*

Selon ce qu'il nous en dit dans cet Ouvrage, cette machine portoit un siège dans lequel un homme étant placé, il pouvoit, par son action, se donner un mouvement progressif, & voler comme un oiseau. Roger Bacon n'explique pas comment elle se soutenoit dans l'air, ou si cet effet résultoit de l'action de l'homme ; il assure néanmoins qu'une machine de ce genre avoit été faite & essayée avec succès par une autre personne. Cependant il y a tout à croire qu'elle n'exista jamais que dans son imagination, & qu'elle n'eut pas plus de réalité que cette fameuse tête d'airain qu'on lui a attribuée, & qui répondoit, dit-on, aux questions qu'on lui faisoit.

Le P. Lana, long-temps après, vers la fin du siècle dernier, imagina une machine qui devoit aussi se soutenir dans l'air ; mais il va plus loin que Bacon, car il en indique le moyen. La machine consistoit en quatre globes de cuivre vides d'air, qui devoient, par l'excès de légèreté résultant de leur capacité, être en état de la faire flotter au milieu de ce fluide ; elle étoit à voiles & à rames. On voit par-là, qu'il avoit sagement pensé à diviser en deux parties l'action employée pour aller dans l'air ; l'une, au moyen de laquelle on devoit s'y soutenir ; l'autre, par laquelle on devoit s'y mouvoir. Mais plusieurs Savans, & entre autres *Hooke* & *Borelli* (b) critiquèrent fortement & avec raison, le moyen qu'il proposoit, insistant l'un & l'autre sur l'impossibilité de faire des globes d'une capacité aussi considérable que celle qu'il leur donnoit, sans que ces globes ne creussent par la pression de l'atmosphère.

(b) Quelques personnes ont prétendu que, dans son Traité sur le vol des Oiseaux, *Borelli* parle de ces machines composées de globes vides d'air, comme propres à nous fournir les moyens de voler ; mais ce que l'on vient de rapporter prouve pleinement le contraire ; c'est faute d'avoir lu avec assez d'attention ce qu'il dit à ce sujet dans la dernière

proposition de ce Traité, qu'on a pu en prendre cette idée. En effet, loin d'établir la possibilité de se servir de pareilles machines pour se soutenir & se mouvoir dans l'air, il emploie une grande partie de cette dernière proposition à prouver que ce moyen de voler ne peut être tenté avec aucune espèce de succès.

En 1755, ou près d'un siècle après qu'eut paru l'Ouvrage du P. Lana, on imprima à Avignon un Livre intitulé : *l'Art de naviguer dans les airs, amusement physique & géométrique, &c.* L'auteur de cet Ouvrage, le P. Gallien, paroît avoir bien senti en quoi consistoit principalement le moyen de surmonter la difficulté d'élever des corps creux dans l'air. Il remarque judicieusement qu'on ne pourra parvenir à les faire flotter dans ce fluide, qu'en augmentant considérablement la capacité de ces corps, & en les remplissant d'un air beaucoup plus rare : ses paroles méritent d'être rapportées.

Plus ce Vaisseau (car il est ici question d'une vaste machine aérienne), *plus ce Vaisseau*, dit-il, *sera grand, plus la pesanteur en sera absolument plus grande ; mais aussi elle en sera moindre relativement à son énorme volume, comme peuvent le comprendre ceux qui ont quelque teinture de Géométrie, &c.* Il en vient après aux dimensions qu'il veut qu'on donne à ce Vaisseau, & elles sont véritablement immenses ; car il veut qu'il soit plus long & plus large que la ville d'Avignon, & qu'il soit haut comme une montagne considérable ; il suppose ensuite qu'on le remplisse, en s'élevant assez haut pour cela, d'un air moitié plus léger que celui dans lequel on se propose de le faire flotter.

Mais nous croyons en avoir dit assez, pour faire voir que, comme le titre de son Ouvrage l'annonce, le P. Gallien ne s'est pas occupé sérieusement de cet objet ; car il seroit difficile de le croire, aux dimensions impraticables, pour ne rien dire de plus, qu'il donne à toute sa Machine. Cependant on ne peut s'empêcher de reconnoître qu'il avoit bien jugé des moyens de vaincre une partie des difficultés de faire flotter des corps creux dans l'air, à la manière dont il insiste sur la nécessité d'augmenter prodigieusement leur capacité.

Si nous passons à une époque plus récente, ou à celle de la découverte des nouveaux *airs*, & entre autres de l'air inflammable, il paroît bien qu'on s'en est servi pour
remplir

remplir des boules de savon , & s'amuser à voir comment elles s'élèvent , mais qu'on n'a pas employé cet air à d'autres usages de ce genre ; au moins tout ce qu'on a dit à ce sujet , semble laisser tant d'incertitudes , que nous n'avons pu en conclure rien d'assez positif , pour nous engager à le rapporter ici.

Tel étoit l'état de nos connoissances sur cet objet , lorsque M.^{rs} de Montgolfier commencèrent à s'en occuper : il paroît que le point de vue sous lequel ils envisagèrent ce grand problème , d'élever des corps dans l'air , fut celui des nuages , de ces grandes masses d'eau , qui , par des causes que nous n'avons pas encore pu démêler , parviennent à s'élever & à flotter dans les airs à des hauteurs considérables. Occupés de cette idée , ils pensèrent aux moyens d'imiter la Nature , en donnant des enveloppes très-légères à des nuages factices , & en contre-balançant la pression d'un air lourd , par la réaction ou l'élasticité d'un air plus léger. S'étant assurés , par une expérience très-simple , qu'une chaleur de soixante-dix degrés du thermomètre suffisoit , selon ce qu'ils rapportent , pour raréfier l'air de la moitié , dans un vaisseau fermé , ils en conçurent bientôt l'espérance de parvenir , par ce moyen , à remplir leurs vues. Or , tout annonce que leurs méditations sur ce sujet remontent au-delà du mois d'Août de l'année dernière 1782 ; mais l'expérience intéressante qu'elle leur avoit suggérée , ne fut tentée que vers le milieu de Novembre de cette même année. Ce fut à Avignon que M. de Montgolfier l'aîné la fit pour la première fois ; là , il ne vit pas sans une vive joie , ce que l'on concevra sans peine , qu'un petit parallépipède creux , de taffetas , qui contenoit quarante pieds cubes ou à peu-près , ayant été échauffé intérieurement avec du papier , monta rapidement au plafond. Retourné à Annonay peu de temps après , il n'eut rien de plus pressé que de répéter avec M. son frère , cette expérience en plein air , & ils virent , avec la même satisfaction , ce parallépipède s'élever & monter à une hauteur de soixante-dix pieds.

Hist. 1783.

B

Animés par des essais si heureux, ils firent faire une machine plus considérable, & qui contenoit aux environs de six cents cinquante pieds cubes : cette machine réussit également bien ; car, par son excès de légèreté, elle s'éleva avec tant de force, qu'elle rompit les cordes qui la retenoient, & alla tomber sur des côteaux voisins, après être montée à une hauteur de cent à cent cinquante toises.

Pleinement convaincus par ces différentes expériences, de la justesse des conjectures qui les avoient guidés, M.^{rs} de Montgolfier résolurent de tenter les effets de cette machine en grand. Ils en firent faire une en conséquence de trente-cinq pieds de diamètre ; elle pesoit quatre cents cinquante livres, & en soulevoit plus de quatre cents ; c'étoit précisément celle dont il a été question au commencement de ce Rapport, & qui servit après à l'expérience du 5 Juin dernier. Ils tentèrent de l'enlever le 3 d'Avril ; mais un vent impétueux les en empêcha : néanmoins, à l'effort qu'elle fit pour monter, ils reconnurent facilement qu'elle rempliroit complètement leur attente. Le 25 d'Avril, le temps étant plus favorable, ils essayèrent de nouveau de la faire partir ; cependant les gens qui les aidoient, étonnés de la force avec laquelle elle tiroit les cordes, les ayant lâchées brusquement, elle monta si rapidement en l'air, qu'elle leur échappa, & alla tomber à un quart de lieue de-là, après s'être élevée à une hauteur de plus de deux cents toises, & être restée en l'air plus de dix minutes. Enfin, le 5 Juin, ils firent cette expérience, comme nous l'avons dit, en présence des États particuliers du Vivarais & de toute la ville d'Annonay, & avec le succès dont l'Académie a été informée par le procès-verbal dont nous avons parlé.

Nous venons d'exposer en détail les idées de M.^{rs} de Montgolfier, & la suite de leurs différens essais : nous nous y sommes crus obligés ; 1.^o pour faire voir la manière dont ils ont été conduits à leur découverte, & qu'elle n'est point un effet du hasard ; 2.^o pour montrer que

lorsque la nouvelle en est venue ici , cette découverte étoit complète , quant à l'effet en général ; 3.^o enfin , que ce n'étoit pas , comme quelques gens peu instruits l'ont dit , de ces idées qui ont besoin d'être réalisées par l'expérience ; mais que l'*aérostat* étoit véritablement inventé , & que toute une Ville avoit été témoin de ses effets.

Au reste , les preuves de tout ce que nous venons de rapporter , résultent des Lettres que M. de Montgolfier le jeune a écrites à l'un de nous , M. Desmarest , & dont plusieurs sont même de l'année dernière 1782 ; nous les mettons sous les yeux de l'Académie.

Mais il faut en venir aux expériences dont nous avons été témoins.

Pour mieux remplir l'objet de l'Académie , M. de Montgolfier fit construire une machine aérostatique , exactement de la même manière que celle d'Annonay , c'est-à-dire , en toile & en papier , mais dont la capacité étoit plus du double , contenant quarante-cinq mille pieds cubes , & pesant neuf cents livres. Il n'étoit pas aisé de trouver les facilités nécessaires pour faire exécuter une aussi grande machine ; il étoit encore moins d'avoir un emplacement convenable pour l'enlever , & pour y faire toutes les expériences qu'on voudroit tenter : M. de Montgolfier rencontra tout cela chez son ami M. Réveillon , qui a une Manufacture de papiers peints , au faubourg Saint-Antoine. Il y trouva plus encore , car il trouva dans cet ami une activité , un zèle & une intelligence pour faire exécuter tout ce qu'il desiroit , qui ont frappé tous ceux qui ont été présens à ces expériences , & auxquels nous nous reprocherions de ne pas rendre ce témoignage devant l'Académie. La machine faite , on se prépara à l'enlever ; mais cette opération demandant quelques préliminaires & des préparatifs , il est nécessaire d'en donner une idée.

Cette machine ne se développe & ne s'élève qu'au moyen des substances qu'on brûle au-dessous ou dans son intérieur ; il faut en conséquence qu'elle soit établie sur une espèce

d'estrade élevée de plusieurs pieds au-dessus du terrain, & qui ait au milieu une grande ouverture. Au centre de cette ouverture & en bas, est placé un grand réchaud de fer à claire-voie, dont on verra l'usage dans un moment. Pour faciliter le développement de la machine, elle est soutenue par son milieu ou par son sommet, au moyen d'une corde qui va passer sur les poulies de deux grands mâts qui sont placés des deux côtés de l'estrade & à l'opposite l'un de l'autre. Par-là, en tirant cette corde, on soulève toute la machine ; & à mesure que l'on fait du feu avec de la paille & d'autres combustibles dans le réchaud dont nous venons de parler, elle se développe, se gonfle, & enfin s'enlève & part, comme nous le dirons dans la suite.

La machine & tout cet appareil étant prêts, le Vendredi 12 de Septembre, on l'essaya devant nous ; & malgré l'action des hommes employés à la retenir, elle se développa d'une manière qui surprit tous les Spectateurs, & enleva un poids de quatre cents livres ou environ ; mais le vent qui survint, & la pluie qui tomba ensuite en abondance pendant toute la journée, ayant détruit entièrement cette machine, par l'action de l'humidité sur le papier & sur la toile dont elle étoit formée, il fallut en refaire une autre. Ce contre-temps étoit d'autant plus fâcheux, que le Roi, qui avoit ordonné que l'expérience s'en fît devant lui à Versailles, en avoit fixé le jour au Vendredi suivant, 19 du même mois.

Cependant M. de Montgolfier ne fut point découragé par cet accident ; animé d'un nouveau zèle, il fit exécuter en quatre jours un sphéroïde en toile de fil & coton, peinte en détrempe sur les deux côtés ; ce sphéroïde avoit quarante-un pieds de diamètre sur cinquante-sept de hauteur, & contenoit trente-sept mille cinq cents pieds cubes ou à peu-près ; il pesoit aux environs de huit cents livres.

On en fit l'essai le Jeudi 18 ; mais au moment où il étoit soutenu par son point le plus élevé, & qu'on ne faisoit que de le gonfler, il survint un coup de vent qui le déchira

près de cet endroit. Pressé par le temps, on ne fit que nouer fortement avec une corde la partie déchirée ; & profitant d'un moment de calme, on enleva de nouveau la machine, en brûlant cinquante livres de paille uniquement ; nous la vîmes alors se soutenir en l'air fort majestueusement, pendant cinq ou six minutes. Assurés de son effet par cette simple expérience, nous n'eûmes pas le moindre doute sur son succès le lendemain à Versailles.

Un appareil semblable à celui dont nous avons donné une idée, étoit établi au milieu de la grande cour du Château, ou de la cour des Ministres, avec la machine aérostatique étendue sur l'estrade. Tout étant préparé & disposé convenablement, on en fit l'expérience, à un signal donné, en présence du Roi, de la Reine & de toute la Cour, & avec tout le succès que nous avions prévu la veille. Là, on vit en moins de dix minutes, & en brûlant seulement quatre-vingts livres de paille & sept ou huit livres de lainages, la machine se soulever, se développer d'une manière qui frappa d'étonnement tous les Spectateurs, & partir & monter ensuite à une hauteur de plus de deux cents quarante toises, quoique chargée de deux cents livres de poids étrangers. Après avoir parcouru un espace considérable, elle alla tomber à une distance de dix-sept cents toises ou à peu-près du point d'où elle étoit partie, étant restée en l'air environ dix minutes. Il est nécessaire d'observer que cette machine descendit si doucement, qu'elle ne fit que ployer des branches d'arbres sur lesquelles elle tomba, & que des animaux qu'on y avoit suspendus n'eurent pas le moindre mal.

La hauteur où nous avons dit qu'elle s'étoit élevée, a été déterminée uniquement par estime. M.^{rs} le Gentil & Jeurat, qui l'ont observée séparément, en ont fixé depuis la hauteur, l'un à deux cents quatre-vingts toises au-dessus du second étage de l'Observatoire, l'autre à deux cents quatre-vingt-treize au-dessus du rez de chaussée ; mais il est certain qu'elle seroit restée plus long-temps en l'air, &

auroit été beaucoup plus loin sans la déchirure de la veille, qui étoit très-considérable : en effet, cette déchirure s'étant rouverte, laissa sortir une partie des vapeurs échauffées de l'intérieur de la machine ; & ces vapeurs jointes à celles qui s'échappèrent dans deux ou trois balancemens qu'elle essuya, diminuèrent beaucoup de la force qu'elle avoit pour se soutenir.

Nous devons ajouter pour l'honneur des Sciences, que jamais expérience ne se fit avec autant d'éclat & autant de pompe, & n'eut d'aussi illustres Spectateurs, ni en plus grand nombre. Avant l'expérience, le Roi se rendit dans le lieu où la machine aérostatique étoit établie, passa sous l'estrade, dans l'endroit où étoit le réchaud, pour voir les préparatifs, & se faire expliquer par M. de Montgolfier les moyens qu'on alloit employer pour développer cette grande masse, si informe pour le moment, & la faire élever & monter dans les airs ; la Reine & la Famille Royale suivirent l'exemple du Roi.

Après des expériences aussi multipliées, il n'étoit plus possible de douter des effets de l'*aérostat* de M.^{rs} de Montgolfier ; mais il étoit important de connoître plus particulièrement la nature de leurs procédés pour faire élever cette machine, & de constater sur-tout, si avec un aérostat d'une capacité suffisante, on pourroit enlever des hommes, & à quel point ils pourroient le gouverner, en observant cependant de le retenir jusqu'à un certain degré par des cordes, afin de ne rien hasarder dans ces premières expériences. M. de Montgolfier fit faire, pour remplir cet objet, un nouvel aérostat plus grand encore que celui de l'expérience de Versailles, ayant quarante-cinq pieds de diamètre & soixante-dix pieds de haut : il étoit composé, en quelque façon, de trois parties ; d'un cylindre qui en faisoit le corps du milieu, d'une portion de cône placée au-dessus, & d'une autre partie conique, dans une situation renversée, qui étoit au-dessous ; le petit diamètre de cette portion de cône étoit

de quatorze pieds. A cette partie étoit adapté un cylindre en toile , autour duquel M. de Montgolfier fit attacher extérieurement une galerie d'osier de deux pieds & demi de large, avec des appuis de trois pieds de haut; il y avoit en outre au milieu du vide formé par cette galerie, une espèce de panier de fil de fer, formant un réchaud, pour y brûler de la paille ou tout autre combustible, lorsque la machine seroit en l'air. En cet état, l'aérostat pesoit aux environs de quatorze à quinze cents livres. Nous ne parlerons pas de quelques expériences préliminaires ; nous passerons tout de suite à celle qui fut faite en notre présence, le 15 d'Octobre.

M. Pilatre de Rosier , qui le premier a proposé de monter dans la machine aérostatique abandonnée à elle-même , & qui en a fait publiquement la demande à l'Académie , le 30 du mois d'Août , pour l'expérience qui devoit s'en faire à Versailles les jours suivans; enfin, qui a montré tant d'activité & de courage dans toutes les expériences qu'on en a faites depuis, M. Pilatre de Rosier monta ce jour-là dans la galerie du nouvel aérostat; on l'enleva à une hauteur de cent pieds ou environ, la machine étant retenue à cette élévation par des cordes. Il nous parut entièrement le maître de monter ou de descendre, selon la quantité plus ou moins grande de feu qu'il entretenoit dans le panier ou le réchaud de fer dont nous avons parlé; mais l'expérience du Dimanche suivant démontra d'une manière encore plus sensible, comment, par ce moyen, on pouvoit régler les mouvemens de l'aérostat pour s'élever ou pour s'abaisser. M. Pilatre s'y étant placé , on mit un contre-poids dans un panier d'osier attaché à l'opposite, parce qu'on avoit supprimé une partie de la galerie à cause de sa pesanteur. La machine s'éleva promptement à la hauteur que permettoit la longueur des cordes; après y être restée quelque temps , on la vit redescendre par la cessation du feu ; ayant été poussée par le vent sur les

arbres d'un jardin voisin, on s'empressa de dégager les cordages qui la retenoient, & M. Pilatre ayant renouvelé en même temps le feu, il la fit relever promptement, & on la ramena avec la plus grande facilité dans le jardin de M. Réveillon. Encouragés par des essais si propres à rassurer contre les dangers qu'on pouvoit courir dans l'aérostat ainsi élevé en l'air, M. Giroud de Villette & M. le Marquis d'Arlandes y montèrent successivement. Il est nécessaire de faire observer que, dans ces expériences, la machine fut élevée à trois cents vingt-quatre pieds, c'est-à-dire, près de la moitié plus haut que les tours de Notre-Dame; & que M. Pilatre de Rosier, par son activité & par son adresse à bien ménager le feu, la faisoit monter, descendre, raser la terre, remonter encore, enfin lui donnoit tous les divers mouvemens de ce genre qu'il desiroit.

Des expériences de cette nature, & que nous avons cru par-là devoir exposer en détail, étoient bien propres à convaincre de la possibilité d'employer sans danger cette machine à transporter des hommes, sur-tout quand on se rappelle comment, dans l'expérience de Versailles, la machine tomba doucement, quoique d'une hauteur de plus de deux cents toises. Aussi M. de Montgolfier, qui nous paroît n'avoir procédé, dans tout ce qu'il a entrepris à ce sujet, qu'éclairé par la théorie & appuyé par la pratique, ne fut-il plus incertain sur la possibilité de transformer son aérostat en un véritable char aérien; mais il falloit qu'on en fit l'expérience, pour consacrer à jamais cette découverte, & cette expérience a été faite le 21 du mois dernier.

Ce fut dans les jardins de la Muette, devant Monseigneur le Dauphin, accompagné de toute sa Cour, & environné d'une foule de Spectateurs: le temps étant des plus favorables, on vit partir, vers une heure trois quarts, l'aérostat de M. de Montgolfier, monté par M. le Marquis d'Arlandes & par M. Pilatre de Rosier; ils s'élevèrent, selon

selon l'observation de M. l'Abbé Rochon, à une hauteur de plus de trois cents soixante-sept toises; traversèrent la Seine, passèrent sur la partie du Sud-ouest de cette Ville, & allèrent descendre près du chemin de Fontainebleau, après avoir parcouru un espace de près de quatre mille toises & être restés en l'air pendant plus de dix-sept minutes. Ils s'élevoient ou s'abaissoient, selon qu'ils excitoient ou ralentissoient le feu; & par cet unique moyen, ils évitèrent, si cela se peut dire, dans une pareille navigation, les écueils qui leur parurent à craindre, & allèrent descendre doucement où ils voulurent arriver. Mais il seroit inutile de pousser plus loin ce détail, l'Académie ayant entendu de la bouche même de M. le Marquis d'Arlandes le récit de ce voyage qui sera à jamais célèbre chez la Postérité, comme le premier que les hommes aient osé entreprendre à travers les airs.

Pour ne point interrompre le récit de ces différentes expériences, nous avons remis à ce moment à parler plus en détail de ce qui concerne la manière dont M.^{rs} de Montgolfier s'y prennent pour enlever leur aérostat.

On a vu qu'ils font brûler dans un réchaud à claire-voie, de la paille & des matières animales, & qu'il s'ensuit de cette combustion & de la chaleur qui s'excite en conséquence dans l'intérieur de la machine, qu'elle se développe, se gonfle, s'enlève & monte dans l'air. Il est naturel de demander ce qui se passe dans cette combustion, & si c'est par l'effet de gaz plus légers que l'air atmosphérique, dont elle occasionne le dégagement, que l'aérostat parvient ainsi à s'élever.

Nous pensons qu'il seroit fort difficile, pour ne pas dire impossible, de déterminer exactement la nature & le nombre des différens gaz ou vapeurs qui se développent dans cette combustion; mais ce qui prouve que cet effet tient uniquement à la raréfaction de l'air intérieur de la machine, occasionnée par la chaleur qu'on y excite, c'est qu'à

l'instant où, par la diminution de cette chaleur, la raréfaction diminue aussi, l'aérostat descend, ou n'est plus soutenu à la même hauteur; & qu'au contraire, au moment où on la ranime, il remonte. Ce qui confirme encore cette explication, c'est que M.^{rs} de Montgolfier sont obligés de tenir leur aérostat ouvert par en-bas. En effet, qu'arrive-t-il par-là? dans l'instant où, en excitant le feu, on augmente la chaleur dans cette machine, une partie plus ou moins considérable de l'air qui y est contenu, est obligée de sortir par l'ouverture inférieure. Or, si on suppose, par exemple, cette chaleur suffisante pour raréfier l'air de moitié, voilà dans un moment le poids de la machine, ou plutôt de l'air qu'elle renferme, diminué dans cette proportion; & si ce volume se trouve dans un grand rapport avec l'enveloppe, cette cause suffit pour soutenir la machine en l'air, & même pour la porter à une grande hauteur. De plus, si l'on supposoit que la combustion des différentes substances que M.^{rs} de Montgolfier brûlent dans leur aérostat, le remplissent d'un ou de plusieurs fluides d'une pesanteur spécifique, telle qu'avec le corps de cette machine ils formassent un tout plus léger que l'air atmosphérique, dans une proportion quelconque, il seroit certainement nécessaire, dans cette supposition, de la fermer, ou du moins d'en rétrécir considérablement l'ouverture, pour prévenir l'introduction de l'air atmosphérique, qui sans cela se glisseroit & s'introduiroit le long des parois intérieures de cette machine. Il paroît donc bien prouvé par ces différentes considérations, que c'est, comme nous l'avons dit, à la raréfaction de l'air de l'intérieur de l'aérostat, occasionnée par le feu qu'on y fait, qu'il faut attribuer la cause de son élévation dans l'air.

Nous desirions pouvoir nous en assurer expérimentalement, ou trouver quelque moyen de déterminer la pesanteur spécifique de l'air, ou des fluides aériformes contenus dans la machine. Par un hasard heureux, l'expé-

rience qu'on fit le 17 d'Octobre, nous en fournit l'occasion; ce jour-là elle resta stationnaire à une petite hauteur, d'où il étoit facile de conclure qu'elle étoit de la même pesanteur spécifique que l'air de l'atmosphère. Elle pesoit alors dix-sept cents livres, y compris le poids de la galerie & de la personne qui étoit dedans. Or, comme cette machine contenoit soixante mille pieds cubes d'air, & que ce jour-là le poids d'un pied cube d'air étoit de $1^{\text{once}} + 3^{\text{gros}} + 20^{\text{grains}}$, il en résulte que le poids de l'air qu'elle déplaçoit, étoit de cinq mille deux cents quatre-vingt-fix livres; d'où déduisant dix-sept cents livres pour le poids total de la machine, on a pour celui de l'air, ou des airs qu'elle renfermoit, trois mille huit cents cinquante-six livres, c'est-à-dire, à peu-près les deux tiers du poids de l'air atmosphérique. Ainsi, dans cette expérience, l'air de la Machine étoit raréfié d'un tiers ou aux environs; & dans les autres on trouve encore à peu-près le même résultat, excepté cependant que comme la machine tendoit à s'élever, l'air devoit y être un peu plus raréfié. Quant à la chaleur intérieure de l'aérostat, propre à dilater l'air d'un tiers, il seroit difficile de la déterminer avec précision; cependant il y a tout lieu de croire qu'elle ne différoit pas beaucoup de celle de l'eau bouillante; car, suivant la règle de M. Deluc, sur la dilatation de l'air selon les différens degrés du thermomètre, il paroît qu'une chaleur de soixante-onze degrés un tiers, fustût pour dilater l'air d'une troisième partie. Or, comme celui de l'aérostat s'est dilaté à peu-près de cette quantité, la chaleur de l'intérieur de cette machine n'a pas dû s'éloigner beaucoup, comme nous venons de le dire, de celle de l'eau bouillante.

Mais il faut en revenir au moyen que M.^{rs} de Montgoliier emploient pour enlever leur aérostat: on ne peut disconvenir qu'il ne soit fort simple, peu dispendieux, & fort expéditif, puisque, dans l'expérience de Versailles, par la combustion de quatre-vingts livres de paille & de sept à huit livres de lainages, on a enlevé, en moins de

dix minutes, un aérostat contenant au-delà de trente-sept mille pieds cubes, & pesant sept à huit cents livres, indépendamment de deux cents livres de poids étrangers dont il étoit chargé ; il semble en conséquence que ce soient ces avantages qui ont déterminé M.^{rs} de Montgolfier à employer ce moyen, de préférence à tous les autres. En effet, selon ce que M. de Montgolfier le jeune expose dans le Mémoire qu'il a lû à l'Académie, depuis la rentrée, comme nous l'avons dit, il n'y a point de fluide d'une pesanteur spécifique beaucoup plus légère que l'air atmosphérique, auquel lui & son frère n'aient pensé : ainsi l'eau réduite en vapeurs, l'air inflammable, & d'autres fluides, produits par la combustion, ont été successivement l'objet de leur attention ; mais l'embarras d'employer les uns, les dépenses qu'auroient entraînées les autres, & particulièrement l'air inflammable, les ont empêchés de s'en servir, se proposant particulièrement de rendre leur opération aussi simple que peu coûteuse. Et il n'est pas étonnant qu'éloignés des secours & des ressources de la Capitale, les difficultés d'employer l'air inflammable ne se soient multipliées à leurs yeux, & ne les aient encore confirmés dans l'usage d'un moyen aussi facile que celui qu'ils avoient imaginé. Mais sans nous étendre davantage sur ce sujet, nous nous bornerons à faire observer, comme un fait certain, qu'au moment où la nouvelle de l'expérience d'Annonay arriva ici, les Physiciens & les Chimistes, instruits de la théorie des nouveaux *airs*, indiquèrent d'une voix générale l'air inflammable comme pouvant être celui que M.^{rs} de Montgolfier avoient employé pour enlever leur aérostat, & sur la nature duquel ils ne s'expliquoient pas.

Au reste, on a vu avec quel succès M.^{rs} Charles & Robert s'en sont servis dans l'expérience faite au Champ-de-Mars le 27 du mois d'Août dernier, & comment ils l'ont employé tout récemment d'une manière encore plus frappante, dans l'expérience mémorable du 1.^{er} de ce mois.

Tout Paris les a vu portés dans un char soutenu par un globe de vingt-six pieds de diamètre , rempli d'air inflammable , s'élever du milieu du bassin des Tuileries , & monter successivement à une hauteur de plus de trois cents toises ; poussés par un vent de sud-est , ils ont parcouru ensuite , à travers les airs , un espace de plus de neuf lieues avant de descendre ; & M. Charles , resté seul dans le char , après ce voyage , animé par un nouveau courage , s'est élevé jusqu'à une hauteur de près de dix-sept cents toises , & a montré aux Physiciens comment on pouvoit aller jusque dans les nuages , étudier les causes des météores.

On demandera sans doute lequel du moyen de M.^{rs} de Montgolfier ou de celui qu'ont employé M.^{rs} Charles & Robert , est préférable pour soutenir en l'air les aérostats ; mais il y auroit véritablement de la témérité à prononcer sur cette question , dans un moment où cette découverte est encore si nouvelle qu'on n'a pas fait la millièame partie des recherches qu'on pourra faire pour la perfectionner. M.^{rs} de Montgolfier entrevoient déjà beaucoup de moyens de simplifier leur opération , & ils en ont indiqué plusieurs : d'un autre côté , qui fait les découvertes qu'on pourra faire pour obtenir de l'air inflammable en bien plus grande quantité , ou beaucoup plus facilement qu'on ne l'a eu jusqu'ici par les moyens connus ? Qui fait si l'on ne trouvera pas quelque nouveau fluide plus léger encore que cet air inflammable ? On a regardé long-temps l'esprit-de-vin comme la plus légère de toutes les liqueurs , & ensuite on a découvert l'éther , qui l'est davantage. La science des *airs* est encore trop nouvelle pour pouvoir rien affirmer sur ces différens objets. Tout ce que nous pouvons dire , c'est que la simplicité du moyen de M.^{rs} de Montgolfier , sa facilité , & la promptitude avec laquelle on peut l'employer , paroissent lui donner de grands avantages dans beaucoup d'usages de la vie civile ; mais celui de l'air inflammable ayant l'avantage de diminuer considéra-

blement le volume des aérostats, destinés à enlever un poids donné, & ne demandant aucun soin ni aucun approvisionnement de la part de ceux qui sont portés par cette machine, semble par-là beaucoup plus propre à un grand nombre d'usages physiques. En effet, sans parler de beaucoup d'autres, M. Charles a montré comment, avec un aérostat, on peut s'élever jusque dans les nuages pour y faire des observations; & tout annonce que par ce moyen on pourra en faire un grand nombre, à l'aide desquelles on parviendra peut-être à expliquer beaucoup de phénomènes de Météorologie, qui jusqu'ici ont été autant de mystères pour nous.

Attendons ainsi du temps & des recherches postérieures, la décision de cette question, sur la préférence que l'on doit donner au moyen de M.^{rs} de Montgolfier, ou à celui de l'air inflammable, pour enlever des aérostats.

Il faut en venir maintenant aux applications & aux usages de la Machine aérostatique; mais ici nous sommes arrêtés par la multitude de ceux qui se présentent; car il faudroit un volume pour exposer en détail tous ceux où on peut les employer. Nous nous contenterons de dire qu'on pourra s'en servir pour élever des poids à une certaine hauteur, pour passer des montagnes, pour monter sur celles où jusqu'ici personne n'a pu arriver, pour descendre dans des vallées ou des lieux inaccessibles, pour élever des fanaux pendant la nuit à une très-grande hauteur, pour donner des signaux de toute espèce, soit à terre, soit à la mer. Or, tous ces usages, ou au moins une grande partie, avoient déjà été imaginés par M.^{rs} de Montgolfier. L'aérostat pourra être employé encore dans beaucoup d'usages pour la Physique, comme pour mieux connoître les vitesses & les directions des différens vents qui soufflent dans l'atmosphère; pour avoir des électroscopes portés à une hauteur beaucoup plus grande que celle où on peut élever des cerf-volans; enfin, comme nous l'avons déjà dit, pour s'élever jusque dans la région des nuages, & y aller observer les météores.

D'ailleurs, on sent que tous ces usages se multiplieront

encore, lorsque cette machine aura été perfectionnée ; & même qu'ils deviendront d'une toute autre conséquence, si on parvient jamais à la diriger.

D'après cet exposé, que nous craindrions d'avoir trop étendu, si l'importance du sujet ne l'avoit exigé, nous croyons que l'Académie a pu prendre une juste idée de la Machine aérostatique de M.^{rs} de Montgolfier, de la cause par laquelle elle se soutient en l'air, enfin de ses différens effets. Nous pensons en conséquence qu'elle ne peut approuver d'une manière trop distinguée cette machine dont elle a déjà vu des expériences si propres à donner les plus grandes espérances sur les applications qu'on pourra en faire dans la suite. Et pour donner à M.^{rs} de Montgolfier un témoignage encore plus marqué de l'estime que mérite une découverte si heureuse, nous proposons que l'Académie leur décerne le Prix annuel de six cents livres, fondé pour les découvertes nouvelles dans les Arts (par une personne inconnue), comme à des Savans auxquels on doit un Art nouveau, qui fera époque dans l'Histoire des inventions humaines.

Après ce que nous venons de dire, il est presque inutile d'ajouter que le Mémoire de M. de Montgolfier, où il expose la suite des pensées & des essais de son frère & de lui, sur les Machines aérostatiques, & les différentes expériences qui en ont été faites, avec les raisons qui les ont déterminés dans le choix des moyens qu'ils ont employés, mérite d'être imprimé dans le Recueil des Savans Étrangers.





O U V R A G E S

P R É S E N T É S À L' A C A D É M I E .

P R I X .

UN Citoyen qui desire de rester inconnu , a fait présenter à l'Académie le Mémoire qui suit :

« TANDIS qu'on applaudit au succès des Arts , tandis
 „ qu'on admire les prodiges nouveaux dont ils embellissent
 „ & enrichissent journallement la Société, on ignore, ou
 „ plutôt on oublie , que presque toutes leurs opérations sont
 „ malsaines & meurtrières. Il s'en faut peu que le dénom-
 „ brement des différentes classes d'Ouvriers , ne soit une liste
 „ de victimes.

„ Carrier , Plâtrier , Chauffournier , Briquetier , Tuillier ;
 „ Tailleur de pierres , Verrier , Miroitier , ou du moins ,
 „ Ouvrier qui met au tain , Doreur sur métaux , Peintre ,
 „ Broyeur de couleurs , &c. Foulon , Cardeur , Tisserand ,
 „ Tanneur , Corroyeur , Chapelier , Buandier , &c. Cribleur ;
 „ Blutier , Saunier , Brasseur , &c. Amidonnier , Chandelier ,
 „ Potier de terre , &c. Ouvriers qui creusent les puits , vident
 „ les fosses d'aisance , enterrent les morts , &c. Tous les Ouvriers
 „ employés à tirer les métaux des mines , & la plupart de ceux
 „ qui les travaillent , &c.

„ Dans toutes ces professions , la matière extraite ou
 „ fabriquée s'atténue ou se volatilise , s'insinue dans le corps
 „ humain , & y porte des particules arsenicales , sulfureuses ,
 „ métalliques , vénéeneuses , &c. ou des molécules incisives ,

ou

ou une poussière qui attaque les poumons , ou un air « corrompu , espèce de mouffette artificielle. »

Lorsque la décomposition de la matière n'est pas perni- « cieuse , les Ouvriers périssent , ou par l'action excessive « du feu , ou par une situation forcée & continue , comme « les *Tailleurs*, les *Tireuses des Ouvriers en soie*, &c. »

Souvent la nature des travaux occasionne des morts « violentes ou des accidens funestes. Tel est le sort des « gens de peine , qui sont forcés de porter des poids « excessifs , de ceux qui sont placés au-dessus des meules « mues avec une grande vitesse ; de ceux qu'on enferme dans « des roues pour y imprimer , par leur poids & par leur « marche , un mouvement de rotation , &c. »

Les moins malheureux des Artisans contractent des « infirmités graves , comme la foiblesse ou la perte de la « vue , &c. »

Quel triste résultat de l'industrie ! Nos bâtimens sont « cimentés avec du sang , nos vêtemens en sont teints , nos « plaisirs en sont infectés , il n'est point de jour où la richesse « n'ordonne des meurtres ; & la vie humaine est mise à prix « comme un Effet commercable. Cependant , parce que le « spectacle de la mort n'est pas présent , parce qu'on peut « se prévaloir de l'usage (cette excuse des ames foibles) , « on croit n'être pas inhumain. »

Si tels étoient l'ordre naturel & indispensable des choses , « & la malheureuse condition de l'humanité , que pour jouir « il fallût sacrifier ses semblables ; quel homme pourroit sans « rougir & sans frémir , satisfaire , à ce prix , ses besoins , ses « goûts , ses plaisirs ? Mais que penser d'une Nation célèbre « par la douceur de ses mœurs , faite pour la Société , pour « s'affecter , & pour aimer ses semblables ; que penser de ces « barbares instruits & polis , qui , sans rien perdre de leurs « jouissances , peuvent en prévenir les effets funestes , & « cependant méprisent ou négligent de tels soins ? »

Qu'on supplée les hommes par des machines , qu'on « les remplace par des animaux , qu'on éloigne le Travailleur »

» de l'objet, qu'on facilite son action par des instrumens;
 » qu'on emploie des préservatifs contre des impressions mal-
 » saines ou des accidens funestes; après quelques frais &
 » quelque temps consacrés à l'invention, à l'essai, à la per-
 » fection des méthodes nouvelles, on verra le danger de
 » plusieurs professions cesser, ou du moins diminuer; peut-
 » être même, si des intérêts secondaires peuvent être comptés
 » après de si grands intérêts, peut-être bientôt les ouvrages
 » seront plus finis & moins dispendieux. L'humanité ordonne
 » la recherche de tels expédiens, le bien de l'État l'exige,
 » la raison indique la possibilité du succès, déjà plus d'un
 » exemple l'a prouvé, cependant personne encore n'a fait
 » d'une telle étude son objet principal.

» On vous propose, Messieurs, de fonder un Prix annuel
 » en faveur d'un Mémoire ou d'une Expérience qui rende
 » les opérations des Arts mécaniques moins mal-saines
 » ou moins dangereuses.

» L'Académie fera connoître chaque année, quel doit être
 » l'objet du Mémoire ou de l'Expérience; & le premier Prix
 » sera donné dans l'Assemblée publique d'après Pâques 1783.

» On destine à cette fondation une somme de douze
 » mille livres, qui sera placée dans le nouvel Emprunt en
 » rente viagère, sur la tête du Roi & sur celle de Monsei-
 » gneur le Dauphin, & les intérêts serviront à payer une
 » Médaille qui formera le Prix. »

L'ACADÉMIE ayant accepté, avec la permission du Roi;
 & d'une voix unanime, la donation du Citoyen estimable,
 Auteur de ce Mémoire; a proposé pour sujet du premier
 Prix de ce genre:

*De déterminer la nature & les causes des maladies auxquelles
 sont exposés les DOREURS AU FEU OU SUR MÉTAUX;
 & la meilleure manière de les préserver de ces maladies,
 soit par des moyens physiques, soit par des moyens
 mécaniques.*

Le Prix a été décerné à la pièce, N.^o 7, qui a pour devise :

Non ignara mali miseris succurrere disco.

Virgile, *Æneid.*

& dont l'Auteur est M. Henri-Albert Goffe, de Genève.

Cette Pièce a paru répondre le mieux, de toutes celles qui ont été envoyées au Concours, au Sujet que l'Académie a proposé. Elle contient des observations & des expériences intéressantes, un exposé bien fait des maladies des Doreurs, & un moyen d'en préserver ceux qui dorent de petites pièces, lequel, d'après l'expérience, semble avoir bien réussi. Mais en couronnant ce Mémoire, l'Académie auroit désiré qu'il eût renfermé aussi des moyens de mettre à l'abri de ces maladies les Doreurs de grosses pièces. L'Auteur paroît avoir profité, jusqu'à un certain point, des idées ingénieuses que contient sur ce sujet un Écrit de M. Tingri, inséré dans la première partie des Mémoires de la Société de Genève, & il semble s'être restreint comme lui, à ce qui concerne les Doreurs qui travaillent pour les Horlogers. Cependant, comme il est à présumer qu'en donnant plus d'étendue à son *Fourneau préservateur*, il seroit possible de le rendre également propre aux Doreurs de grosses pièces, l'Académie engage M. Goffe à tourner ses vues de ce côté important, & à tirer de ce fourneau une utilité aussi générale qu'elle semble devoir résulter des expériences particulières qu'il en a faites.

L'Académie a cru, par la même raison, devoir faire une mention honorable de la pièce, N.^o 3, ayant pour devise :

Ars datur optima cui recta physica juvat.

dont l'Auteur s'est fort étendu sur les moyens de préserver des effets du mercure les Doreurs de grosses pièces.

LES Mémoires approuvés par l'Académie, en 1783, & destinés par elle à être imprimés dans le Recueil des Savans-Étrangers, sont au nombre de vingt-un.

Deux Mémoires sur la Cristallisation: Par M. l'abbé Haüi.

Deux Mémoires sur les effets de la lumière sur les Plantes: Par M. l'abbé Tessier.

Sur le Succedanea ou Vernis de la Chine: Par M. Desfontaines.

Sur l'Equisetum: Par M. Descemet.

Observations de Mercure: Par M. Pigot fils.

Sur des Puits méphitiques: Par M. Cadet de Vaux.

Sur l'attraction des Sphéroïdes: Par M. le Gendre.

Sur un nouveau Gaz retiré du Phosphore par les Alkalis: Par M. Gingembre.

Sur la Putréfaction: Par M. le Comte de Prunelai.

Sur les propriétés hygrométriques de la Soude: Par M. de Morveau.

Sur les Séries récurrentes: Par M. Trembley.

Observations astronomiques: Par M. de Lague.

Observations faites sur la Marée, à Bordeaux: Par M. l'abbé Dupont de Jumeaux.

Sur la plante nommée *Oenothera biennis*: Par deux jeunes Amateurs en Botanique.

Sur le Cygne chantant: Par M. l'abbé Mongez.

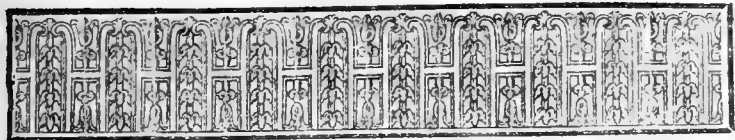
Sur les Probabilités: Par M. Trembley.

Observations de l'éclipse totale de la Lune, du 10 Septembre 1783, faites à Dieppe: Par M. de Lague.

Sur la navigation du golfe de Lyon: Par M. Barthez.

Sur les moyens de mesurer les hauteurs de l'Atmosphère: Par M. Trembley.





É L O G E

D E M. H U N T E R.

GUILLAUME HUNTER, Agrégé au Collège Royal de Médecine de Londres, Médecin extraordinaire & Accoucheur de la Reine d'Angleterre, Médecin-consultant de l'hôpital des femmes en couche, Professeur d'Anatomie, de l'Académie Royale des Arts, Membre de la Société Royale & de celle des Antiquaires, Président de la Société de Médecine de Londres, Associé-étranger de l'Académie des Sciences & de la Société de Médecine de Paris, naquit le 23 Mai 1718 à Kilbride dans le comté de Lanerk : il étoit le septième des dix enfans de Jean & d'Agnès Hunter. Envoyé à l'âge de quatorze ans dans un Séminaire à Glascow, il y passa cinq années, pendant lesquelles il mérita par sa conduite & son application, l'estime de ses maîtres.

Son père le destinoit à l'état ecclésiastique ; mais lorsqu'à dix-neuf ans, ses études étant finies, on lui proposa la signature des articles de foi, à laquelle la loi soumet tous les Membres du Clergé anglican, ni l'autorité ni les prières de son père ne purent l'y résoudre : la franchise de son caractère ne lui permit point d'enchaîner par cet acte, la liberté de penser dont il faisoit déjà profession ; & jamais il ne voulut se laisser persuader qu'il fût permis, en morale, de signer ce qu'on rejette au fond du cœur, & de promettre d'enseigner ce qu'on ne croit pas. Sa famille avoit fait des sacrifices pour son éducation, il étoit affligé de ne pouvoir répondre à ses vues, & d'être forcé peut-être d'en accepter de nouveaux secours : mais il eut le

bonheur de rencontrer le Docteur Cullen, aujourd'hui célèbre Professeur d'Anatomie à Édimbourg, & qui pratiquoit alors la Médecine à Hamilton. M. Cullen le confirma dans la résolution de suivre sa conscience, lui proposa d'embrasser l'état de Médecin, & obtint le consentement de sa famille. M. Hunter passa trois années dans la maison de son ami, devenu son instituteur & son père; il ne le quitta que pour aller achever à Édimbourg & à Londres, ses études de Médecine, bien décidé à revenir ensuite partager pour toujours la retraite de M. Cullen.

Mais le sort les destinoit tous deux à une vie plus active & leurs talens trop resserrés sur le petit théâtre où l'amitié & la philosophie les vouloient confiner, devoient briller dans les deux capitales de la Grande Bretagne.

M. Hunter vint à Londres en 1741, perdit son père au bout de quelques mois, & ne retourna depuis qu'une seule fois en Écosse, dix ans après, pour revoir sa mère & son ami le Docteur Cullen. Il passa quelques jours dans la demeure de ses pères, acheta des terres pour augmenter l'étendue de leur petit domaine, s'occupa du soin de l'embellir, l'abandonna ensuite à sa mère, & la quitta pour toujours.

En 1743, M. Hunter donna son premier Ouvrage; sa Dissertation présentée à la Société Royale de Londres, a pour objet la structure des cartilages qui terminent les os: on les supposoit composés de couches concentriques recouvertes l'une par l'autre jusqu'à celle qui s'étendoit & se mouloit sur l'extrémité de l'os; M. Hunter prouva qu'au contraire les cartilages sont formés de fibres qui s'élèvent perpendiculairement à cette même extrémité, & sont liées entr'elles par d'autres fibres transversales. Cette découverte de M. Hunter a été confirmée par M. de Laffone, qui, en observant les os après la calcination, s'est assuré de l'existence de ces fibres perpendiculaires.

Trois ans après, une Société de Chirurgiens de la Marine, choisit M. Hunter pour faire un Cours d'anatomie;

il dut à ces leçons la première aisance dont il ait joui. Soixante-dix guinées qu'il rassembla, lui parurent un trésor inépuisable ; il en fit part à ses amis , mais avec si peu de précaution , que l'année d'après il se trouva hors d'état de faire imprimer les affiches d'un nouveau Cours. Cette leçon lui fut utile , on l'accusa même depuis de porter l'économie jusqu'à l'avarice : il est vrai qu'il consacra de très-grandes sommes à son goût pour l'Anatomie & pour l'Histoire naturelle , à son zèle pour le progrès des Sciences ; mais on n'attribue à la libéralité que les dépenses de vanité ou de luxe , & l'homme qui ne s'en permet que d'utiles , court risque de passer pour un avare dans l'opinion publique.

Les premiers volumes de la Société de Médecine de Londres , renferment des Ouvrages précieux de M. Hunter ; telle est l'Observation d'une espèce particulière d'anévrisme , dans lequel l'artère s'ouvre une communication avec la veine ; & une Description nouvelle de la structure du tissu cellulaire. Il y reconnoît deux substances d'une organisation différente , l'une réticulaire , l'autre glanduleuse : cette dernière destinée à contenir la graisse , est munie des vaisseaux qui la portent dans ses réservoirs , & des organes où s'en fait la sécrétion ; mais c'est la première qui seule est le véritable siège de l'hydropisie.

Après avoir pratiqué la Chirurgie pendant quelques années , par nécessité , & avec un dégoût que jamais il n'eut le courage de vaincre , M. Hunter se livra principalement à la pratique des accouchemens , & bientôt il n'eut qu'un rival à Londres. Heureusement pour sa fortune , ce rival , M. Smellie , n'avoit pas joint à ses talens l'art de se rendre agréable à un sexe qui , accoutumé au langage de la flatterie , est étonné d'entendre celui de la vérité , même dans la bouche de son Médecin , voudroit qu'il s'occupât de plaire encore plus que de guérir , & sans doute est excusable de le vouloir ; car les défauts des femmes sont l'ouvrage des hommes , comme les vices des nations sont le crime de leurs tyrans. On craignoit le Docteur Smellie , on attendoit,

pour l'appeler , que son secours fût absolument nécessaire , c'est-à-dire , qu'il fût inutile. Il avoit donc rarement des choses consolantes à dire , & on l'en craignoit encore davantage ; aussi n'eut-il jamais une pratique étendue dans ce qu'on appelle la bonne compagnie , & il fut très-heureux pour les Dames angloises , que M. Hunter unit à une habileté pour le moins égale , la douceur & les agrémens dont l'austère & savant Smellie avoit été privé.

La pratique des Accouchemens & l'enseignement de l'Anatomie partagèrent le reste de la vie de M. Hunter ; & sous ces deux points de vue , il a mérité également l'estime des Savans & la reconnoissance de ses concitoyens.

Son Ouvrage sur la matrice dans l'état de grossesse , est un monument précieux dans l'Anatomie ; il est formé de trente-quatre planches , où les objets de grandeur naturelle sont représentés avec vérité & avec précision. La découverte de la membrane à laquelle il a donné le nom de *decidua* , l'examen des usages de cette membrane qui unit ensemble , dans le commencement de la grossesse , la matrice & le fœtus , & dans l'épaisseur de laquelle le placenta se forme , croît & se développe ; l'exposition des conséquences pratiques qui résultent de cette découverte , une description exacte de l'uterus & du fœtus qu'il renferme , aux différentes périodes de la grossesse , le détail des changemens que l'un & l'autre éprouvent ; cette partie importante de l'Anatomie presque entièrement nouvelle , portée dès le premier pas à un grand degré de perfection ; tel a été le premier titre de M. Hunter à la célébrité & aux suffrages des Compagnies savantes de l'Europe.

C'est dans ce même Ouvrage , qu'il fit connoître la maladie qu'il a nommée *Retroversio uteri* , maladie dangereuse , assez commune , mais encore inconnue , & dont il montra en même temps la cause , les symptômes & les remèdes. A peine son livre fut-il public , que deux Praticiens habiles reconquirent cette maladie ; ils avouèrent que peu de temps auparavant ,

auparavant , deux de leurs malades en avoient été les victimes , & qu'ils les auroient sauvées si les observations de M. Hunter leur avoient été connues.

Il n'a pas rendu moins de service à l'humanité par deux de ses Ouvrages d'un autre genre , mais relatifs au même objet ; l'un est une Dissertation sur l'incertitude des signes de mort violente dans les enfans nouveaux-nés : on fait combien pour ce genre de crime , de femmes innocentes ont été sacrifiées à l'ignorance des Juges , & à l'influence qu'a sur eux la prévention populaire ; il étoit encore plus nécessaire en Angleterre qu'ailleurs , de chercher à les éclairer. Les précautions de la Jurisprudence angloise pour assurer aux accusés tous les moyens de se défendre , pour les protéger contre leur propre ignorance , pour les mettre à l'abri de la passion ou de la corruption des Juges , font à l'humanité de la Nation britannique , un honneur que malheureusement trop peu d'autres peuples s'empressent de mériter ; mais les Jurés ne sont pas des hommes choisis , comme nos Magistrats , parmi ceux qui ont dû faire une étude particulière du devoir qu'ils ont à remplir : ces Jurés , tirés au sort parmi tous les habitans d'un canton , dont la réputation est intacte , doivent partager souvent les opinions , les préjugés vulgaires ; & l'expérience a prouvé que lorsqu'ils ont rendu des jugemens injustes , c'est presque toujours à cette cause que leur erreur doit être imputée : mais aussi l'instruction étant publique , un seul homme éclairé suffit pour prévenir l'injustice.

Le second Ouvrage est un Mémoire sur la section de la symphise du pubis ; après avoir traité son sujet en Médecin , & avoir fait sentir combien il restoit encore de recherches à faire avant de prononcer sur l'utilité de cette opération , M. Hunter examine s'il doit être permis en morale , de livrer une mère à une mort presque assurée , dans l'espérance incertaine de conserver à un enfant qui n'existe pas encore , une vie peut-être de quelques instans : il prononce en faveur de la mère , c'est-à-dire , de celui des deux indi-

vidus qui, appartenant à la société par ses liens & par ses devoirs, a dès-lors acquis sur elle de véritables droits ; qui souffre à la fois & la douleur physique & tout ce que la prévoyance & la crainte peuvent ajouter à la douleur ; de celui enfin, qui connoissant son existence & pouvant l'apprécier, a sur sa propre vie un droit qui n'est qu'à lui seul, & que personne ne peut lui enlever sans injustice. Cette opinion que beaucoup d'hommes éclairés ont adoptée, M. Hunter est le premier qui ait eu le courage de la prononcer hautement, sans détour & avec une entière franchise ; il n'a pas craint de s'exposer à tout ce que l'orgueil & l'avarice pouvoient oser contre lui, à l'abri du voile respectable dont les passions les plus basses & les plus cruelles favent si souvent se couvrir avec tant d'habileté.

M. Hunter donnoit ses leçons d'Anatomie au milieu d'un vaste musée élevé à ses frais ; là, toutes les parties du corps humain préparées par lui avec un art dont il avoit presque seul le secret, étoient présentées aux Élèves sous l'aspect le plus propre à en faire mieux apercevoir la structure & les détails ; la plupart y paroissoient & dans l'état naturel & avec les altérations que les différentes maladies peuvent y causer ; chaque pièce offroit le résultat du travail & de l'observation des Anatomistes, & l'offroit d'une manière bien plus instructive & plus frappante que la description la mieux faite ou la planche la mieux gravée ; un très-grand nombre même faisoient connoître des découvertes de détail dûes à M. Hunter lui-même, qu'il n'avoit exposées dans aucun Ouvrage, & qui n'existent que dans les préparations anatomiques où il a eu l'art de les rendre sensibles.

Aussi c'étoit sur-tout en voyant ce Cabinet, qu'on pouvoit apprendre à concilier la grande réputation de M. Hunter avec le petit nombre de ses Ouvrages : on y admiroit entre autres ses préparations des vaisseaux lymphatiques ; la nature, l'usage de ces vaisseaux, leurs ouvertures dans les intestins, par lesquelles ils absorbent le chyle, tous ces phénomènes importants dans l'économie animale, étoient ou inconnus

ou peu développés avant M.^{rs} Hunter & Monro, qui se disputèrent avec chaleur la gloire de ces observations.

Le seul reproche qu'on puisse faire à M. Hunter, est peut-être cette vivacité avec laquelle il réclamoit souvent ses découvertes, mais il avoit du moins la franchise de convenir de cette foiblesse. *Il n'y a point eu*, disoit-il dans un de ses Ouvrages, *de grand Anatomiste qui n'ait eu de grandes querelles* ; & un Anatomiste qui enseigne, un Anatomiste qui, occupé de faire des préparations, a déposé au moins autant d'idées dans son cabinet que dans ses Livres, doit craindre encore plus de voir les autres s'approprier des découvertes, qu'ils peuvent plus aisément n'avoir pas connues, & dont il leur est plus permis de paroître ignorer le premier auteur.

Au mois de Mars 1783, M. Hunter fut tourmenté par une goutte vague ; cependant il voulut, le 20, faire une Leçon d'opérations chirurgicales, mais il se trouva mal & ne put l'achever ; deux jours après il avertit ses Médecins, qu'il croyoit avoir éprouvé la nuit une attaque de paralysie : sa conjecture se trouva vraie ; l'attaque avoit porté sur les intestins, & il mourut le 30 avec une tranquillité peu commune. *Si je pouvois encore tenir une plume*, disoit-il à son ami M. Combe, peu d'instans avant sa mort, *j'écrierois combien il est facile & doux de mourir.*

Il a laissé un frère, M. Jean Hunter, d'abord son Élève, long-temps son compagnon d'études, & enfin son rival : c'est par les conseils & d'après les vues de son frère, que M. Jean Hunter s'est livré à ces belles recherches sur la position des testicules dans le fœtus, qui lui ont acquis une si juste célébrité. L'union des deux frères fut altérée par une dispute, il y a quelques années ; l'amitié reprit ensuite ses droits, mais sans cette douce intimité qui ne revient jamais lorsqu'une fois elle s'est perdue : cependant, puisque cette dispute a été malheureusement connue du public, il est consolant de pouvoir dire que dans sa dernière maladie, M. Hunter reçut avec reconnoissance les soins de son frère,

& lui donna des marques de confiance qu'on ne peut regarder comme un simple hommage rendu à son habileté.

M. Hunter a légué au public son cabinet avec une somme de huit mille livres sterling, dont le revenu est destiné à l'entretenir & à l'augmenter.

Des Livres rares, une belle suite de médailles, de morceaux précieux d'histoire naturelle, & ses préparations anatomiques, rendent cette collection une des plus riches, & sur-tout une des plus instructives qu'aucun particulier ait possédée. C'étoit la seule passion de M. Hunter: il y avoit employé la plus grande partie d'une fortune très-considérable, qu'il avoit acquise dans une longue & heureuse pratique; le prix des services qu'il a rendus à ses contemporains, a été consacré par lui au salut & à l'instruction de leur postérité.





ÉLOGE DE M. EULER.

LÉONARD EULER, Directeur de la classe de Mathématiques dans l'Académie de Pétersbourg, & auparavant dans celle de Berlin; de la Société Royale de Londres, des Académies de Turin, de Lisbonne & de Bâle; Associé-étranger de celle des Sciences, naquit à Bâle, le 15 Avril 1707, de Paul Euler & de Marguerite Brucker.

Son père, devenu en 1708, Pasteur du village de Riechen près de Bâle, fut son premier Instituteur, & eut bientôt le plaisir de voir ces espérances des talens & de la gloire d'un fils, si douces pour un cœur paternel, naître & se fortifier sous ses yeux & par ses soins.

Il avoit étudié les Mathématiques sous Jacques Bernoulli; on sait que cet homme illustre joignoit à un grand génie pour les Sciences, une Philosophie profonde qui n'accompagne pas toujours ce génie, mais qui sert à lui donner plus d'étendue & à le rendre plus utile: dans ses leçons, il faisoit sentir à ses disciples, que la Géométrie n'est pas une Science isolée, & la leur présentoit comme la base & la clé de toutes les connoissances humaines, comme la Science où l'on peut le mieux observer la marche de l'esprit, celle dont la culture exerce le plus utilement nos facultés, puisqu'elle donne à l'entendement de la force & de la justesse à la fois; enfin comme une étude également précieuse par le nombre ou la variété de ses applications, & par l'avantage de faire contracter l'habitude d'une méthode de raisonner, qui peut s'employer ensuite à la recherche des vérités de tous les genres, & nous guider dans la conduite de la vie.

Paul Euler, pénétré des principes de son Maître, en-

seigna les élémens des Mathématiques à son fils, quoiqu'il le destinât à l'étude de la Théologie; & lorsque le jeune Euler fut envoyé à l'Université de Bâle, il se trouva digne de recevoir les leçons de Jean Bernoulli : son application, ses dispositions heureuses lui méritèrent bientôt l'amitié de Daniel & de Nicolas Bernoulli, disciples & déjà rivaux de leur père; il eut même le bonheur d'obtenir celle du sévère Jean Bernoulli, qui voulut bien lui donner, une fois par semaine, une leçon particulière, destinée à éclaircir les difficultés qui se présentoient à lui dans le cours de ses lectures & de ses travaux: les autres jours étoient employés par M. Euler, à se mettre en état de profiter de cette faveur signalée.

Cette méthode excellente empêchoit son génie naissant de s'épuiser contre des obstacles invincibles, de s'égarer dans les routes nouvelles qu'il cherchoit à s'ouvrir; elle guidoit & secondoit ses efforts: mais en même temps elle l'obligeoit de déployer toutes ses forces, qu'il augmentoit encore par un exercice proportionné à son âge & à l'étendue de ses connoissances.

Il ne jouit pas long-temps de cet avantage; & à peine eut-il obtenu le titre de Maître-ès-Arts, que son père qui le destinoit à lui succéder, l'obligea de quitter les Mathématiques pour la Théologie: heureusement cette rigueur ne fut que passagère, on lui fit aisément entendre que son fils étoit né pour remplacer dans l'Europe, Jean Bernoulli, & non pour être Pasteur de Riechen.

Un Ouvrage que M. Euler fit à dix-neuf ans, sur la matière des Vaisseaux, sujet proposé par l'Académie des Sciences, obtint un *accessit* en 1727, honneur d'autant plus grand, que le jeune habitant des Alpes n'avoit pu être aidé par aucune connoissance pratique, & qu'il n'avoit été vaincu que par M. Bouguer, Géomètre habile, alors dans la force de son talent, & déjà depuis dix ans Professeur d'Hydrographie dans une ville maritime.

M. Euler concouroit en même temps pour une Chaire

Dans l'Université de Bâle; mais c'est le sort qui prononce entre les Savans admis à disputer ces places, & il ne fut pas favorable, nous ne disons point à M. Euler, mais à sa patrie qui le perdit peu de jours après & pour toujours: deux ans auparavant, Nicolas & Daniel Bernoulli avoient été appelés en Russie; M. Euler qui les vit partir avec regret, obtint d'eux la promesse de chercher à lui procurer le même honneur, qu'il ambitionnoit de partager; & il ne faut pas en être surpris. La splendeur de la Capitale d'un grand Empire, cet éclat qui, se répandant sur les travaux dont elle est le théâtre & sur les hommes qui l'habitent, semble ajouter à leur gloire, peut aisément séduire la jeunesse, & frapper le citoyen libre, mais obscur & pauvre d'une petite République: M.^{rs} Bernoulli furent fidèles à leur parole, & se donnèrent, pour avoir auprès d'eux un Concurrent si redoutable, autant de soins que des hommes ordinaires en auroient pu prendre pour écarter leurs rivaux.

Le voyage de M. Euler fut entrepris sous de tristes auspices, il apprit bientôt que Nicolas Bernoulli avoit déjà été victime de la rigueur du climat; & le jour même où il entra sur les terres de l'empire Russe, fut celui de la mort de Catherine I.^{ère}, évènement qui parut d'abord menacer d'une dissolution prochaine l'Académie dont cette Princesse, fidèle aux vues de son époux, venoit d'achever la fondation. M. Euler, éloigné de sa patrie, n'ayant point, comme M. Daniel Bernoulli, à y rapporter un nom célèbre & respecté, prit la résolution d'entrer dans la marine Russe: un des Amiraux de Pierre I.^{er} lui avoit déjà promis une place, lorsque heureusement pour la Géométrie, l'orage élevé contre les Sciences se dissipa; M. Euler obtint le titre de Professeur, succéda, en 1733, à M. Daniel Bernoulli lorsque cet homme illustre se retira dans son pays; & la même année il épousa M.^{lle} Gsell sa compatriote, fille d'un Peintre que Pierre I.^{er} avoit ramené en Russie, au retour de son premier voyage. Dès-lors, pour nous servir de l'expression de Bacon, M. Euler sentit

qu'il avoit donné des otages à la fortune, & que le pays où il pouvoit espérer de former un établissement pour sa famille, étoit devenu pour lui une patrie nécessaire. Né chez une Nation où tous les gouvernemens conservent au moins l'apparence & le langage des constitutions républicaines, où, malgré des distinctions plus réelles que celles qui séparent les premiers esclaves d'un Despote, du dernier de ses sujets, on a soigneusement gardé toutes les formes de l'égalité; où le respect qu'on doit aux loix s'étend jusqu'aux usages les plus indifférens, pourvu que l'antiquité ou l'opinion vulgaire les ait consacrés; M. Euler se trouvoit transporté dans un pays où le Prince exerce une autorité sans bornes, où la loi la plus sacrée des gouvernemens absolus, celle qui règle la succession à l'Empire, étoit alors incertaine & méprisée; où des Chefs, esclaves du Souverain, régnoient despotiquement sur un peuple esclave; & c'étoit dans le moment où cet Empire, gouverné par un Étranger ambitieux, défiant & cruel, gémissoit sous la tyrannie de Biren, & offroit un spectacle aussi effrayant qu'instructif aux Savans qui étoient venus chercher dans son sein la gloire, la fortune, & la liberté de goûter en paix les douceurs de l'étude!

On sent tout ce que dut éprouver l'ame de M. Euler; lié à ce séjour par une chaîne qu'il ne pouvoit plus rompre: peut-être doit-on à cette circonstance de sa vie, cette opiniâtreté pour le travail dont il prit alors l'habitude, & qui devint son unique ressource dans une Capitale où l'on ne trouvoit plus que des satellites, ou des ennemis du Ministre, les uns occupés de flatter ses soupçons, les autres de s'y dérober: cette impression fut si forte sur M. Euler, qu'il la conservoit encore, lorsqu'en 1741, l'année d'après la chute de Biren, dont la tyrannie fit place à un gouvernement plus modéré & plus humain, il quitta Pétersbourg pour se rendre à Berlin, où le Roi de Prusse l'avoit appelé. Il fut présenté à la Reine-mère, cette Princesse se plaisoit dans la conversation des hommes éclairés, & elle les accueilloit avec cette familiarité noble

noble qui annonce dans les Princes le sentiment d'une grandeur personnelle, indépendante de leurs titres, & qui est devenue un des caractères de cette famille auguste; cependant la Reine de Prusse ne put obtenir de M. Euler que des monosyllabes, elle lui reprocha cette timidité, cet embarras qu'elle croyoit ne pas mériter d'inspirer; *pourquoi ne voulez-vous donc pas me parler*, lui dit-elle? *Madame*, répondit-il, *parce que je viens d'un pays où, quand on parle, on est pendu.*

Parvenu au moment de rendre compte des travaux immenses de M. Euler, j'ai senti l'impossibilité d'en suivre les détails, de faire connoître cette foule de découvertes, de méthodes nouvelles, de vues ingénieuses répandues dans plus de trente Ouvrages publiés à part, & dans près de sept cents Mémoires, dont environ deux cents déposés à l'Académie de Pétersbourg, avant sa mort, sont destinés à enrichir successivement la collection qu'elle publie.

Mais un caractère particulier m'a semblé le distinguer des hommes illustres qui en suivant la même carrière, ont obtenu une gloire que la sienne n'a pas éclipsée; c'est d'avoir embrassé les Sciences Mathématiques dans leur universalité, d'en avoir successivement perfectionné les différentes parties; & en les enrichissant toutes par des découvertes importantes, d'avoir produit une révolution utile dans la manière de les traiter. J'ai donc cru qu'en formant un tableau méthodique des différentes branches de ces Sciences, en marquant pour chacune les progrès, les changemens heureux qu'elle doit au génie de M. Euler, j'aurois du moins, autant que mes forces me le permettent, donné une idée plus juste de cet homme célèbre, qui, par la réunion de tant de qualités extraordinaires, a été pour ainsi dire un phénomène dont l'histoire des Sciences ne nous avoit encore offert aucun exemple.

L'Algèbre n'avoit été pendant long-temps qu'une Science très-bornée; cette manière de ne considérer l'idée de la grandeur que dans le dernier degré d'abstraction où

l'esprit humain puisse atteindre; la rigueur avec laquelle on sépare de cette idée tout ce qui, en occupant l'imagination, pourroit donner quelque appui ou quelque repos à l'intelligence; enfin l'extrême généralité des signes que cette Science emploie, la rendent, en quelque sorte, trop étrangère à notre nature, trop éloignée de nos conceptions communes, pour que l'esprit humain pût aisément s'y plaire & en acquérir facilement l'habitude. La marche même des méthodes algébriques rebutoit encore les hommes les plus propres à ces méditations; pour peu que l'objet qu'on poursuit soit compliqué, elles forcent de l'oublier totalement, pour ne songer qu'à leurs formules; la route qu'on suit est assurée, mais le but où l'on veut arriver, le point d'où l'on est parti, disparaissent également aux regards du Géomètre; & il a fallu long-temps du courage pour oser perdre la terre de vue, & s'exposer sur la foi d'une Science nouvelle. Aussi, en jetant les yeux sur les Ouvrages des grands Géomètres du siècle dernier, de ceux même auxquels l'Algèbre doit les découvertes les plus importantes, on verra combien peu ils étoient accoutumés à manier ce même instrument qu'ils ont tant perfectionné; & l'on ne pourra s'empêcher de regarder comme l'ouvrage de M. Euler, la révolution qui a rendu l'Analyse algébrique, une méthode lumineuse, universelle, applicable à tout, & même facile.

Après avoir donné sur la forme des racines, des équations algébriques, sur leur solution générale, sur l'élimination, plusieurs Théories nouvelles, & des vues ingénieuses ou profondes, M. Euler porta ses recherches sur le calcul des quantités transcendentes. Léibnitz & les deux Bernoulli se partagent la gloire d'avoir introduit dans l'analyse algébrique, les fonctions exponentielles & logarithmiques; Coates avoit donné le moyen de représenter par des sinus ou des cosinus, les racines de certaines équations algébriques.

Un usage heureux de ces découvertes conduisit M. Euler

à observer les rapports singuliers des quantités exponentielles & logarithmiques avec les transcendantes nées dans le cercle, & ensuite à trouver des méthodes au moyen desquelles faisant disparaître de la solution des problèmes, les termes imaginaires qui s'y seroient présentés & qui auroient embarrassé le calcul, quoiqu'on sût qu'ils dussent se détruire, & réduisant les formules à une expression plus simple & plus commode, il est parvenu à donner une forme entièrement nouvelle à la partie de l'analyse qui s'applique aux questions d'Astronomie & de Physique. Cette forme a été adoptée par tous les Géomètres ; elle est devenue d'un usage commun, & elle a produit dans cette partie du calcul, à peu-près la même révolution que la découverte des logarithmes avoit produite dans les calculs ordinaires.

Ainsi, à certaines époques, ou après de grands efforts, les Sciences mathématiques semblent avoir épuisé toutes les ressources de l'esprit humain, & atteindre le terme marqué à leurs progrès ; tout-à-coup une nouvelle méthode de calcul vient s'introduire dans ces Sciences & leur donner une face nouvelle ; bientôt on les voit s'enrichir rapidement par la solution d'un grand nombre de problèmes importans dont les Géomètres n'avoient osé s'occuper, rebutés par la difficulté, & pour ainsi dire par l'impossibilité physique de conduire leurs calculs jusqu'à un résultat réel. Peut-être la justice exigeroit-elle de réserver à celui qui a su introduire ces méthodes & les rendre usuelles, une portion dans la gloire de tous ceux qui les emploient avec succès, mais du moins il a sur leur reconnoissance des droits qu'ils ne pourroient contester sans ingratitude.

L'analyse des séries a occupé M. Euler dans presque toutes les époques de sa vie : c'est même une des parties de ses Ouvrages où l'on voit briller le plus cette finesse, cette sagacité, cette variété de moyens & de ressources qui le caractérisent.

Les fractions continues, inventées par le Vicomte Brouncker, paroissent presque oubliées des Géomètres,

M. Euler en perfectionna la théorie, en multiplia les applications & en fit sentir toute l'importance.

Ses recherches presque absolument neuves sur les séries de produits indéfinis, offrent des ressources nécessaires à la solution d'un grand nombre de questions utiles ou curieuses; & c'est sur-tout en imaginant ainsi de nouvelles formes de séries, & en les employant, non-seulement à des approximations dont on est si souvent forcé de se contenter, mais aussi à la découverte de vérités absolues & rigoureuses, que M. Euler a su agrandir cette branche de l'analyse, aujourd'hui si vaste, & bornée avant lui à un petit nombre de méthodes & d'applications.

Le Calcul intégral, l'instrument le plus fécond de découvertes que jamais les hommes aient possédé, a changé de face depuis les Ouvrages de M. Euler; il a perfectionné, étendu, simplifié toutes les méthodes employées ou proposées avant lui: on lui doit la solution générale des équations linéaires, premier fondement de ces formules d'approximation, si variées & si utiles. Une foule de méthodes particulières, fondées sur différens principes, sont répandues dans ses Ouvrages, & réunies dans son Traité du Calcul intégral: là, on le voit par un heureux usage des substitutions, ou rappeler à une méthode connue, des équations qui sembloient s'y refuser, ou réduire aux premières différentielles, des équations d'ordres supérieurs; tantôt en considérant la forme des intégrales, il en déduit les conditions des équations différentielles auxquelles elles peuvent satisfaire; & tantôt l'examen de la forme des facteurs qui rendent une différentielle complète, le conduit à former des classes générales d'équations intégrables: quelquefois une propriété particulière qu'il remarque dans une équation, lui offre un moyen de séparer les indéterminées qui sembloient devoir y rester confondues; ailleurs, si une équation où elles sont séparées, se dérobe aux méthodes communes, c'est en mêlant ces indéterminées qu'il parvient à connoître l'intégrale.

Au premier coup-d'œil, le choix & la réussite de ces moyens peuvent sembler, en quelque sorte, appartenir au hasard; cependant, un succès si fréquent & si sûr, oblige de reconnoître une autre cause, & il n'est pas toujours impossible de suivre le fil délié qui a guidé le génie. Si, par exemple, on considère la forme des substitutions employées par M. Euler, on découvrira souvent ce qui a pu lui faire prévoir que cette opération produiroit l'effet dont il avoit besoin; & si on examine la forme que dans une de ses plus belles méthodes, il suppose aux facteurs d'une équation du second ordre, on verra qu'il s'est arrêté à une de celles qui appartiennent particulièrement à cet ordre d'équations. A la vérité, cette suite d'idées qui dirige alors un Analiste, est moins une méthode dont il puisse développer la marche, qu'une sorte d'instinct particulier dont il seroit difficile de rendre compte, & souvent il aime mieux ne pas faire l'histoire de ses pensées, que de s'exposer au soupçon d'en avoir donné un roman ingénieux, & fait après coup.

M. Euler a observé que les équations différentielles sont susceptibles de solutions particulières qui ne sont pas comprises dans la solution générale. M. Clairaut a fait aussi la même remarque; mais M. Euler a montré depuis, pourquoi ces intégrales particulières étoient exclues de la solution générale, & il est le premier qui se soit occupé de cette théorie, perfectionnée depuis par plusieurs Géomètres célèbres, & dans laquelle le Mémoire de M. de la Grange, sur la nature de ces intégrales & leur usage dans la solution des problèmes, n'a plus rien laissé à desirer.

Nous citerons encore une partie de ce calcul qui appartient presque en entier à M. Euler; c'est celle où l'on cherche des intégrales particulières pour une certaine valeur déterminée des inconnues que renferme l'équation; cette Théorie est d'autant plus importante, que souvent l'intégrale générale se dérobe absolument à nos recherches, & que, dans les problèmes où une valeur approchée de l'intégrale

ne fuffit pas aux vues qu'on fe propofe , la connoiffance de ces intégrales particulières , peut fuppléer à ce défaut. En effet , on connoît alors , du moins pour certains points , la valeur rigoureuſe ; & cette connoiffance unie à celle d'une valeur générale approchée , doit fuffire à prefque tous les beſoins de l'Analyſe.

Perſonne n'a fait un uſage plus étendu & plus heureux des méthodes qui donnent la valeur de plus en plus approchée d'une quantité déterminée par des équations différentielles , & dont on a déjà une première valeur ; & il ſ'eſt également occupé de donner un moyen direct de déduire immédiatement de l'équation même , une valeur affez voiſine de la vraie , pour que les puiffances élevées de leur différence , puiſſent être négligées ; moyen ſans lequel les méthodes d'approximation en uſage parmi les Géomètres , ne pourroient ſ'étendre aux équations pour leſquelles les obſervations ou des confidérations particulières ne donnent pas cette première valeur dont ces méthodes ſuppoſent la connoiffance.

Ce que nous avons dit fuffit pour montrer juſqu'à quel point M. Euler avoit approfondi la nature des équations différentielles , la ſource des difficultés qui ſ'oppoſent à l'intégration , & la manière de les éluder ou de les vaincre ; ſon grand Ouvrage ſur cet objet , eſt non-ſeulement un Recueil précieux de méthodes neuves & étendues , c'eſt encore une mine féconde de découvertes , que tout homme né avec quelque talent , ne peut parcourir ſans en rapporter de riches dépouilles. L'on peut dire de cette partie des travaux de M. Euler , comme de beaucoup d'autres , que les méthodes qu'elle renferme ſerviront long-temps après lui , à réſoudre des queſtions importantes & difficiles ; & que ſes Ouvrages produiront encore & plus d'une découverte & plus d'une réputation.

Le calcul aux différences finies , n'étoit prefque connu que par l'Ouvrage obſcur , mais plein de ſagacité , de Taylor : M. Euler en fit une branche importante du calcul intégral ,

lui donna une notation simple & commode , & fut l'appliquer avec succès à la théorie des suites , à la recherche de leurs sommes , ou de l'expression de leurs termes généraux , à celle de la racine des équations déterminées , à la manière d'avoir , par un calcul facile , la valeur approchée des produits , ou des sommes indéfinies de certains nombres.

C'est à M. d'Alembert qu'appartient réellement la découverte du calcul aux différences partielles , puisque c'est à lui qu'est dûe la connoissance de la forme générale de leurs intégrales ; mais dans les premiers Ouvrages de M. d'Alembert on voyoit plus le résultat du calcul , que le calcul lui-même ; c'est à M. Euler que l'on en doit la notation , il a su se le rendre propre , en quelque manière , par la profonde théorie qui l'a conduit à résoudre un grand nombre de ces équations , à distinguer les formes des intégrales pour les différens ordres & pour les différens nombres de variables , à réduire ces équations lorsqu'elles ont certaines formes , à des intégrations ordinaires , à donner les moyens de rappeler à ces formes , par d'heureuses substitutions , celles qui s'en éloignent ; en un mot , en découvrant dans la nature des équations aux différences partielles , plusieurs de ces propriétés singulières qui en rendent la théorie générale si difficile & si piquante ; qualités presque inséparables en Géométrie , où le degré de la difficulté est si souvent la mesure de l'intérêt qu'on prend à une question , de l'honneur qu'on attache à une découverte. L'influence d'une vérité nouvelle sur la Science même ou sur quelque application importante , est le seul avantage qui puisse balancer ce mérite de la difficulté vaincue , chez des hommes pour qui le plaisir d'apercevoir une vérité , est toujours proportionné aux efforts qu'elle leur a coûtés.

M. Euler n'avoit négligé aucune partie de l'Analyse : il a démontré quelques-uns des théorèmes de Fermat , sur l'analyse indéterminée , & en a trouvé plusieurs autres non moins curieux , non moins difficiles à découvrir. La marche

du cavalier au jeu d'échecs, & différens autres problèmes de situation, ont aussi piqué sa curiosité & exercé son génie: il mêloit aux recherches les plus importantes, ces amusemens, souvent plus difficiles, mais presque inutiles & aux progrès mêmes de la Science, & aux applications tentées jusqu'ici. M. Euler avoit un esprit trop sage pour ne pas sentir l'inconvénient de se livrer long-temps à ces recherches purement curieuses, mais trop étendu en même-temps, pour ne pas voir que leur inutilité ne devoit être que momentanée, & que le seul moyen de la faire cesser, étoit de chercher à les approfondir & à les généraliser.

L'application de l'Algèbre à la Géométrie, avoit occupé, depuis Descartes, presque tous les Géomètres du dernier siècle; mais M. Euler a prouvé qu'ils n'avoient pas, à beaucoup près, tout épuisé. On lui doit de nouvelles recherches sur le nombre des points qui déterminent une ligne courbe dont le degré est connu, & sur celui des intersections des lignes de différens degrés; on lui doit également l'équation générale des courbes, dont les développées, les secondes, les troisièmes développées, en un mot les développées d'un ordre quelconque, sont semblables à la courbe génératrice: équation remarquable par son extrême simplicité.

La Théorie générale des surfaces courbes, étoit peu connue, & M. Euler est le premier qui l'ait développée dans un Ouvrage élémentaire: il y ajouta celle des rayons osculateurs de ces surfaces; & il parvint à cette conclusion singulière, que la courbure d'un élément de surface est déterminée par deux des rayons osculateurs des courbes formées par l'intersection de la surface & d'un plan qui passe par la perpendiculaire au point donné; que ces rayons sont le plus grand & le plus petit de tous ceux qui appartiennent à la suite des courbes ainsi formées, & qu'enfin ils se trouvent toujours dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Il donna de plus, une méthode pour déterminer les
surfaces

surfaces qui peuvent être développées sur un plan, & une théorie des projections géographiques de la sphère. Ces deux Ouvrages renferment une application de calcul des différences partielles à des problèmes géométriques : application qui peut s'étendre à beaucoup de questions intéressantes, & dont la première idée est due à M. Euler.

Ses recherches sur les courbes, qui, tracées sur une sphère, sont rectifiables algébriquement, & sur les surfaces courbes, dont les parties correspondantes à des parties d'un plan donné, sont égales entr'elles, l'ont conduit à une nouvelle espèce d'analyse, à laquelle il donne le nom d'*Analyse infinitésimale indéterminée* ; parce que, comme dans l'Analyse indéterminée ordinaire, les quantités qui restent arbitraires sont assujetties à certaines conditions : & de même que l'analyse indéterminée a pu servir quelquefois à la perfection de l'Algèbre, M. Euler regardoit sa nouvelle Analyse comme une Science qui devoit un jour être utile au progrès du calcul intégral.

En effet, ces questions particulières, qui ne tiennent pas au corps méthodique des Sciences mathématiques, qui n'entrent point dans les applications qu'on peut en faire, ne doivent pas être regardées seulement comme des moyens d'exercer les forces ou de faire briller le génie des Géomètres ; presque toujours dans les Sciences, on commence par cultiver séparément quelques parties isolées, à mesure que les découvertes successives se multiplient, les liaisons qui unissent ces parties se laissent successivement apercevoir ; & le plus souvent c'est aux lumières qui résultent de cette réunion, que sont dues les grandes découvertes qui font époque dans l'histoire de l'esprit humain.

La question de déterminer les courbes ou les surfaces pour lesquelles certaines fonctions indéfinies sont plus grandes ou plus petites que pour toutes les autres, avoit exercé les Géomètres les plus illustres du siècle dernier. Les solutions des problèmes du solide de la moindre résistance, de la courbe de plus vite descente, de la plus

grande des aires isopérimètres, avoient été célèbres en Europe. La méthode générale de résoudre le problème, étoit cachée dans ces solutions, & sur-tout dans celle que Jacques Bernoulli avoit trouvée pour la question des isopérimètres, & qui lui avoit donné sur son frère un avantage que tant de chef-d'œuvres, enfantés depuis par Jean Bernoulli, n'ont pu faire oublier. Mais il falloit développer cette méthode, il falloit la réduire en formules générales; & c'est ce que fit M. Euler, dans un Ouvrage imprimé en 1744, & l'un des plus beaux monumens de son génie. Pour trouver ces formules il avoit été obligé d'employer la considération des lignes courbes; quinze ans après un jeune Géomètre (M. de la Grange), qui dans ses premiers Essais annonçoit un digne successeur d'Euler, résolut le même problème par une méthode purement analytique: M. Euler admira le premier ce nouvel effort de l'art du calcul, s'occupa lui-même d'exposer la nouvelle méthode, d'en présenter les principes, & d'en donner le développement avec cette clarté, cette élégance qui brillent dans tous ses Ouvrages; jamais le génie ne reçut & ne rendit un plus bel hommage, & jamais il ne se montra plus supérieur à ces petites passions que le partage d'un peu de gloire rend si actives & si violentes dans les hommes ordinaires.

Nous terminerons cet exposé des travaux de M. Euler sur l'analyse pure, en observant qu'il seroit injuste de borner son influence sur les progrès des Mathématiques, aux découvertes sans nombre dont ses Ouvrages sont remplis. Ces communications qu'il a ouvertes entre toutes les parties d'une Science si vaste; ces vues générales, que souvent même il n'indique pas, mais qui n'échappent point à un esprit attentif; ces routes dont il s'est contenté d'ouvrir l'entrée, & d'aplanir les premiers obstacles, sont encore autant de bienfaits dont les Sciences s'enrichiront, & dont la postérité jouira, en oubliant peut-être la main dont elle les aura reçus.

Le Traité de Mécanique que M. Euler donna en 1736, est le premier grand Ouvrage où l'Analyse ait été appliquée à la Science du mouvement. Le nombre des choses neuves ou présentées d'une manière nouvelle, qui entrent dans ce Traité, eût étonné les Géomètres, si M. Euler n'en eût déjà publié séparément la plus grande partie.

Dans ses nombreux travaux sur la même Science, il fut toujours fidèle à l'analyse; & l'usage heureux qu'il en a fait a mérité à cette méthode la préférence qu'elle a enfin obtenue sur toutes les autres.

La solution du problème où l'on cherche le mouvement d'un corps lancé dans l'espace & attiré vers deux points fixes, est devenue célèbre par l'Art avec lequel des substitutions dont M. Euler savoit si bien prévoir la forme, l'ont conduit à réduire aux quadratures, des équations que leur complication & leur forme pouvoient faire regarder comme insolubles.

Il appliqua l'analyse au mouvement d'un corps solide d'une figure donnée, & elle le conduisit à ce beau théorème déjà donné par Segner, *qu'un corps d'une figure quelconque, peut tourner librement, d'un mouvement uniforme, autour de trois axes perpendiculaires entr'eux*; à la connoissance de plusieurs propriétés singulières de ces trois axes principaux, & enfin aux équations générales du mouvement d'un corps, quelles que soient sa figure & la loi des forces accélératrices qui agissent sur ses élémens & sur quelques-unes de ses parties.

Le problème des cordes vibrantes, & tous ceux qui appartiennent à la théorie du son ou des loix des oscillations de l'air, ont été soumis à l'analyse par les nouvelles méthodes dont il enrichit le calcul des différences partielles. Une théorie du mouvement des fluides, appuyée sur ce même calcul, étonna par la clarté qu'il a répandue sur des questions si épineuses, & la facilité qu'il a su donner à des méthodes fondées sur une analyse si profonde.

Tous les problèmes de l'Astronomie physique, qui ont été traités dans ce siècle, ont été résolus par des Méthodes

analytiques particulières à M. Euler. Son calcul des perturbations de l'orbite terrestre, sur-tout sa théorie de la Lune, sont des modèles de la simplicité, de la précision auxquelles on peut porter ces méthodes ; & en lisant ce dernier Ouvrage, on n'est pas moins étonné de voir jusqu'où un homme d'un grand génie, animé du desir de ne rien laisser à faire sur une question importante, peut pousser la patience & l'opiniâtreté du travail.

L'Astronomie n'employoit que des méthodes géométriques, M. Euler sentit tout ce qu'elle pouvoit espérer des secours de l'analyse, & il le prouva par des exemples qui, imités depuis par plusieurs Savans célèbres, pourront un jour faire prendre à cette Science une forme nouvelle.

Il embrassa la Science navale, dans un grand Ouvrage auquel une savante analyse sert de base, & où les questions les plus difficiles sont soumises à ces méthodes générales & fécondes qu'il savoit si bien créer & employer : long-temps après, il publia, sur la même matière, un abrégé élémentaire de ce même Traité, où il renferme, sous la forme la plus simple, ce qui peut être utile à la pratique, & ce que doivent savoir ceux qui se consacrent au service de mer : cet Ouvrage, quoique destiné par l'Auteur aux seules écoles de l'empire de Russie, lui mérita une gratification du Roi, qui jugea que des travaux utiles à tous les hommes, avoient des droits à la reconnoissance de tous les Souverains, & voulut montrer que même aux extrémités de l'Europe, des talens si rares ne pouvoient échapper ni à ses regards ni à ses bienfaits. M. Euler fut sensible à cette marque de l'estime d'un Roi puissant, & elle reçut un nouveau prix à ses yeux, de la main qui la lui transmit : c'étoit celle de M. Turgot, Ministre respecté dans l'Europe, par ses lumières comme par ses vertus, fait pour commander à l'opinion plutôt que pour lui obéir, & dont le suffrage, toujours dicté par la vérité, & jamais par le desir d'attirer sur lui-même l'approbation publique, pouvoit flatter un Sage trop accoutumé à la gloire pour être encore sensible au bruit de sa renommée.

Dans les hommes d'un génie supérieur, l'extrême simplicité de caractère peut s'allier avec les qualités de l'esprit, qui semblent le plus annoncer de l'habileté ou de la finesse; aussi M. Euler, malgré cette simplicité qui ne se démentit jamais, savoit cependant distinguer avec une sagacité, toujours indulgente il est vrai, les hommages d'une admiration éclairée, & ceux que la vanité prodigue aux Grands hommes pour s'assurer du moins le mérite de l'enthousiasme.

Ses travaux sur la Dioptrique, sont fondés sur une analyse moins profonde, & on est tenté de lui en savoir gré, comme d'une espèce de sacrifice: les différens rayons dont un rayon solaire est formé, subissent dans le même milieu, des réfractions différentes; séparés ainsi des rayons voisins, ils paroissent seuls, ou moins mélangés, & donnent la sensation de couleur qui leur est propre; cette réfrangibilité varie dans les différens milieux pour chaque rayon, & suivant une loi qui n'est pas la même que celle de la réfraction moyenne dans ces milieux: cette observation donnoit lieu de croire que deux prismes inégaux & de différentes matières, combinés ensemble, pourroient détourner un rayon de sa route, sans le décomposer, ou plutôt en remplaçant par une triple réfraction, les rayons élémentaires dans une direction parallèle.

De la vérité de cette conjecture, pouvoit dépendre, dans les lunettes, la destruction des iris qui colorent les objets vus à travers les verres lenticulaires: M. Euler étoit convaincu de la possibilité du succès, d'après cette idée métaphysique, *que si l'œil a été composé de diverses humeurs, c'est uniquement dans l'intention de détruire les effets de l'aberration de réfrangibilité*; il ne s'agissoit donc que de chercher à imiter l'opération de la Nature, & il en proposa les moyens, d'après une théorie qu'il s'étoit formée. Ses premiers essais excitèrent les Physiciens à s'occuper d'un objet qu'ils paroissent avoir négligé; leurs expériences ne s'accordèrent point avec la théorie de M. Euler, mais elles confirmèrent les vues qu'il avoit eues sur la perfection

des lunettes. Instruit alors par eux des loix de la dispersion dans les différens milieux , il abandonna ses premières idées , soumit au calcul les résultats de leurs expériences , & enrichit la Dioptrique de formules analytiques , simples , commodes , générales , applicables à tous les instrumens qu'on peut construire.

On a encore de M. Euler , quelques Essais sur la théorie générale de la lumière , dont il cherchoit à concilier les phénomènes avec les loix des oscillations d'un fluide ; parce que l'hypothèse de l'émission des rayons en ligne droite , lui paroissoit présenter des difficultés insurmontables. La théorie de l'aimant , celle de la propagation du feu , les loix de la cohésion des corps & celles des frottemens , devinrent aussi pour lui l'occasion de savans calculs , appuyés malheureusement sur des hypothèses , plutôt que sur des expériences.

Le calcul des Probabilités , l'Arithmétique politique , furent encore l'objet de ses infatigables travaux ; nous ne citerons ici que ses recherches sur les Tables de mortalité , & sur les moyens de les déduire des phénomènes avec plus d'exactitude ; sa méthode de prendre un milieu entre des observations , ses calculs sur l'établissement d'une Caisse d'emprunt , dont le but est d'assurer aux veuves , aux enfans , ou une somme fixe ou une rente , payable après la mort d'un mari ou d'un père ; moyen ingénieux , imaginé par des Géomètres philosophes , pour contre-balancer le mal moral qui résulte de l'établissement des rentes viagères , & pour rendre utiles aux familles , les plus petites épargnes que leur chef peut faire sur son gain journalier , ou sur les appointemens , soit d'une commission , soit d'une place.

On a vu dans l'éloge de M. Daniel Bernoulli , qu'il avoit partagé avec M. Euler seul la gloire d'avoir remporté treize Prix à l'Académie des Sciences ; souvent ils travaillèrent pour les mêmes sujets , & l'honneur de l'emporter sur son Concurrent , fut encore partagé entr'eux , sans que jamais cette rivalité ait suspendu les témoignages réciproques de

leur estime, ou refroidi le sentiment de leur amitié. En examinant les sujets sur lesquels l'un & l'autre ont obtenu la victoire, on voit que le succès a dépendu sur-tout du caractère de leur talent: lorsque la question exigeoit de l'adresse dans la manière de l'envisager, un usage heureux de l'expérience, ou des vues de Physique ingénieuses & neuves, l'avantage étoit pour M. Daniel Bernoulli; n'offroit-elle à vaincre que de grandes difficultés de calcul, falloit-il créer de nouvelles méthodes d'analyse, c'étoit M. Euler qui l'emportoit: & si l'on pouvoit avoir la témérité de vouloir juger entr'eux, ce ne seroit pas entre deux hommes qu'on auroit à prononcer, ce seroit entre deux genres d'esprit, entre deux manières d'employer le génie.

Nous n'aurions donné qu'une idée très-imparfaite de la fécondité de M. Euler, si nous n'ajoutions à cette foible esquisse de ses travaux, qu'il est peu de sujets importants pour lesquels il ne soit revenu sur ses traces, en refaisant même plusieurs fois son premier Ouvrage; tantôt il substituoit une méthode directe & analytique, à une méthode indirecte; tantôt il étendoit sa première solution à des cas qui lui avoient d'abord échappé; ajoutant presque toujours de nouveaux exemples qu'il savoit choisir avec un art singulier, parmi ceux qui offroient ou quelque application utile ou quelque remarque curieuse: la seule intention de donner à son travail une forme plus méthodique, d'y répandre plus de clarté, d'y ajouter un nouveau degré de simplicité, suffisoit pour le déterminer à des travaux immenses; jamais Géomètre n'a tant écrit, & jamais aucun n'a donné à ses Ouvrages un tel degré de perfection. Lorsqu'il publioit un Mémoire sur un objet nouveau, il exposoit avec simplicité la route qu'il avoit parcourue, il en faisoit observer les difficultés ou les détours; & après avoir fait suivre scrupuleusement à ses lecteurs la marche de son esprit dans ses premiers essais, il leur montrait ensuite comment il étoit parvenu à trouver une route plus simple: on voit qu'il préféroit l'instruction de ses disciples

à la petite satisfaction de les étonner, & qu'il croyoit n'en pas faire assez pour la Science, s'il n'ajoutoit aux vérités nouvelles dont il l'enrichissoit, l'exposition naïve des idées qui l'y avoient conduit.

Cette méthode d'embrasser ainsi toutes les branches des Mathématiques, d'avoir, pour ainsi dire, toujours présentes à l'esprit toutes les questions & toutes les théories, étoit pour M. Euler une source de découvertes, fermée pour presque tous les autres, ouverte pour lui seul : ainsi dans la suite de ses travaux, tantôt s'offroit à lui une méthode singulière d'intégrer des équations, en les différenciant ; tantôt une remarque sur une question d'Analyse ou de Mécanique, le conduisoit à la solution d'une équation différentielle très-compiquée, qui échappoit aux méthodes directes ; c'est quelquefois un problème, en apparence très-difficile, qu'il résout en un instant par une méthode très-simple, ou un problème qui paroît élémentaire, & dont la solution a des difficultés qu'il ne peut vaincre que par de grands efforts ; d'autres fois, des combinaisons de nombres singuliers, des séries d'une forme nouvelle, lui présentent des questions piquantes par leur nouveauté, ou le mènent à des vérités inattendues. M. Euler avertissoit alors avec soin que c'étoit au hasard qu'il devoit les découvertes de ce genre ; ce n'étoit pas en diminuer le mérite, car on voyoit aisément que ce hasard ne pourroit arriver qu'à un homme qui joindroit à une vaste étendue de connoissances, la sagacité la plus rare. D'ailleurs, peut-être ne faudroit-il pas le louer de cette candeur, quand même elle lui auroit coûté un peu de sa gloire : les hommes d'un grand génie ont rarement ces petites ruses de l'amour-propre, qui ne servent qu'à rapetisser aux yeux des juges éclairés, ceux qu'elles agrandissent dans l'opinion de la multitude ; soit que l'homme de génie sente qu'il ne sera jamais plus grand qu'en se montrant tel qu'il est, soit que l'opinion n'ait pas sur lui cet empire qu'elle exerce avec tant de tyrannie sur les autres hommes.

Lorsqu'on

Lorsqu'on lit la vie d'un grand homme, soit conviction de l'imperfection attachée à la foiblesse humaine, soit que la justice dont nous sommes capables, ne puisse atteindre jusqu'à reconnoître dans nos semblables une supériorité dont rien ne nous console, soit enfin que l'idée de la perfection dans un autre nous blesse ou nous humilie encore plus que celle de la grandeur; il semble qu'on a besoin de trouver un endroit foible, on cherche quelque défaut qui puisse nous relever à nos propres yeux, & l'on est involontairement porté à se défier de la sincérité de l'Écrivain, s'il ne nous montre pas cet endroit foible, s'il ne soulève point le voile importun dont ces défauts sont couverts.

M. Euler paroïssoit quelquefois ne s'occuper que du plaisir de calculer, & regarder le point de Mécanique ou de Physique, qu'il examinoit, seulement comme une occasion d'exercer son génie & de se livrer à sa passion dominante. Aussi les Savans lui ont-ils reproché d'avoir quelquefois prodigué son calcul à des hypothèses physiques, ou même à des principes métaphysiques, dont il n'avoit pas assez examiné ou la vraisemblance ou la solidité; ils lui reprochoient aussi de s'être trop reposé sur les ressources du calcul, & d'avoir négligé celles que pouvoit lui donner l'examen des questions mêmes qu'il se proposoit de résoudre. Nous conviendrons que le premier reproche n'étoit pas sans fondement, nous avouons que dans M. Euler le Métaphysicien, ou même le Physicien, n'a pas été si grand que le Géomètre; & l'on doit regretter sans doute que plusieurs parties de ses Ouvrages, par exemple de ceux qu'il a faits sur la Science navale, sur l'Artillerie n'aient presque été utiles qu'aux progrès de la Science du calcul: mais nous croyons que le second reproche est beaucoup moins mérité; par-tout dans les Ouvrages de M. Euler, on le voit occupé d'ajouter aux richesses de l'analyse, d'en étendre & d'en multiplier les applications; en même-temps qu'elle paroît son instrument unique, on voit qu'il a voulu en faire un instrument universel: la

progrès naturel des Sciences mathématiques, devoit amener cette révolution ; mais il l'a vu pour ainsi dire s'accomplir sous ses yeux, c'est à son génie que nous la devons ; elle a été le prix de ses efforts & de ses découvertes. Ainsi, lors même qu'il paroïssoit abuser de l'Analyse & en épuiser tous les secrets pour résoudre une question dont quelques réflexions étrangères au calcul lui eussent donné une solution simple & facile, souvent il ne cherchoit qu'à montrer les forces & les ressources de son Art ; & on doit lui pardonner, si quelquefois, en paroissant s'occuper d'une autre Science, c'étoit encore au progrès & à la propagation de l'Analyse, que ces travaux étoient consacrés, puisque la révolution qui en a été le fruit, est un de ses premiers droits à la reconnaissance des hommes, & un de ses plus beaux titres à la gloire.

Je n'ai pas cru devoir interrompre le détail des travaux de M. Euler, par le récit des évènements très-simples & très-peu multipliés de sa vie.

Il s'établit à Berlin en 1741, & y resta jusqu'en 1766.

Madame la Princesse d'Anhalt-Dessau, nièce du Roi de Prusse, voulut recevoir de lui quelques leçons de Physique, ces leçons ont été publiées sous le nom de *Lettres à une Princesse d'Allemagne* ; ouvrage précieux par la clarté singulière avec laquelle il y a exposé les vérités les plus importantes de la Mécanique, de l'Astronomie-physique, de l'Optique & de la Théorie des sons, & par des vues ingénieuses moins philosophiques, mais plus savantes que celles qui ont fait survivre la pluralité des Mondes de Fontenelle, au système des tourbillons. Le nom d'Euler, si grand dans les Sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses Ouvrages destinés à développer ce que l'Analyse a de plus épineux & de plus abstrait, donnent à ces Lettres si simples, si faciles, un charme singulier : ceux qui n'ont pas étudié les Mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un Ouvrage d'Euler, lui savent gré de s'être mis à leur portée ; & ces détails élémentaires des

Sciences, acquièrent une sorte de grandeur par le rapprochement qu'on en fait avec la gloire & le génie de l'homme illustre qui les a tracés.

Le Roi de Prusse employa M. Euler à des calculs sur les monnoies, à la conduite des eaux de Sans-souci, à l'examen de plusieurs canaux de navigation; ce Prince n'étoit pas né pour croire que de grands talens & des connoissances profondes, fussent jamais des qualités superflues ou dangereuses; & le bonheur de pouvoir être utile, un avantage réservé par la Nature à l'ignorance & à la médiocrité.

En 1750, M. Euler fit le voyage de Francfort pour y recevoir sa mère, veuve alors, & la ramener à Berlin; il eut le bonheur de l'y conserver jusqu'en 1761 : pendant onze ans elle jouit de la gloire de son fils, comme le cœur d'une mère fait en jouir, & fut plus heureuse encore peut-être, par ses soins tendres & assidus, dont cette gloire augmentoit le prix.

Ce fut pendant son séjour à Berlin, que M. Euler, lié par la reconnaissance à M. de Maupertuis, se crut obligé de défendre ce Principe de la moindre action, sur lequel le Président de l'Académie de Prusse avoit fondé l'espérance d'une si grande renommée; le moyen que choisit M. Euler, ne pouvoit guère être employé que par lui, c'étoit de résoudre par ce Principe quelques-uns des problèmes les plus difficiles de la Mécanique: ainsi dans les temps fabuleux, les Dieux daignoient fabriquer pour les guerriers qu'ils favorisoient, des armes impénétrables aux coups de leurs adversaires. Nous désirerions que la reconnaissance de M. Euler se fût bornée à une protection si noble & si digne de lui, mais on ne peut se dissimuler qu'il n'ait montré trop de dureté dans ses réponses à Koenig; & c'est avec douleur que nous sommes obligés de compter un Grand homme parmi les ennemis d'un Savant malheureux & persécuté: heureusement toute la vie de M. Euler le met à l'abri d'un soupçon plus grave; sans cette simpli-

cité, cette indifférence pour la renommée, qu'il a montrées constamment, on auroit pu croire que les plaisanteries d'un illustre Partisan de M. Kœnig (plaisanteries que M. de Voltaire lui-même a depuis condamnées à un juste oubli), avoient altéré le caractère du sage & paisible Géomètre; mais s'il fit alors une faute, c'est à l'excès seul de la reconnaissance qu'il faut l'attribuer; & c'est par un sentiment respectable qu'il a été injuste, une seule fois dans sa vie.

Les Russes ayant pénétré dans la Marche de Brandebourg; en 1760, pillèrent une métairie que M. Euler avoit auprès de Charlottenbourg: mais le Général Totleben n'étoit pas venu faire la guerre aux Sciences; instruit de la perte que M. Euler avoit essuyée, il s'empressa de la réparer, en faisant payer le dommage à un prix fort au-dessus de la valeur réelle; & il rendit compte de ce manque d'égards involontaire à l'Impératrice Élisabeth, qui ajouta un don de quatre mille florins à une indemnité déjà beaucoup plus que suffisante: ce trait n'a point été connu en Europe, & nous citons avec enthousiasme quelques actions semblables que les Anciens nous ont transmises; cette différence dans nos jugemens, n'est-elle pas une preuve de ces progrès heureux de l'espèce humaine, que quelques Écrivains s'obstinent à nier encore, apparemment pour éviter qu'on ne les accuse d'en avoir été les complices?

Le Gouvernement de Russie n'avoit jamais traité M. Euler comme un étranger, une partie de ses appointemens lui fut toujours payée malgré son absence; & l'Impératrice l'ayant appelé, en 1766, il consentit à retourner à Pétersbourg.

En 1735, les efforts que lui avoit coûtés un calcul astronomique, pour lequel les autres Académiciens demandoient plusieurs mois, & qu'il acheva en peu de jours, lui avoient causé une maladie suivie de la perte d'un œil; il avoit lieu de craindre une cécité complète s'il s'exposoit de nouveau dans un climat dont l'influence lui étoit contraire: l'intérêt de ses enfans l'emporta sur cette crainte; & si on songe que l'étude étoit pour M. Euler une passion

exclusive, on jugera sans doute que peu d'exemples d'amour paternel ont mieux prouvé qu'il est la plus puissante & la plus douce de nos affections.

Il effuya peu d'années après, le malheur qu'il avoit prévu, mais il conserva, heureusement pour lui & pour les Sciences, la faculté de distinguer encore de grands caractères tracés sur une ardoise avec de la craie; les fils, les élèves copioient les calculs, écrivoient sous la dictée le reste de ses Mémoires; & si on en juge par leur nombre, & souvent par le génie qu'on y retrouve, on pourroit croire que l'absence encore plus absolue de toute distraction, & la nouvelle énergie que ce recueillement forcé donnoit à toutes ses facultés, lui ont fait plus gagner, que l'affoiblissement de sa vue n'a pu lui faire perdre de facilité & de moyens pour le travail.

D'ailleurs, M. Euler, par la nature de son génie, par l'habitude de sa vie, s'étoit même involontairement préparé des ressources extraordinaires: en examinant ces grandes formules analytiques, si rares avant lui, si fréquentes dans ses Ouvrages, dont la combinaison & le développement réunissent tant de simplicité & d'élégance, dont la forme même plaît aux yeux comme à l'esprit, on voit qu'elles ne sont pas le fruit d'un calcul tracé sur le papier, & que produites toutes entières dans sa tête, elles y ont été créées par une imagination également puissante & active. Il existe dans l'Analyse (& M. Euler en a beaucoup multiplié le nombre), des formules d'une application commune & presque journalière; il les avoit toujours présentes à l'esprit, les savoit par cœur, les récitait dans la conversation; & M. d'Alembert, lorsqu'il le vit à Berlin, fut étonné d'un effort de mémoire qui supposoit dans l'esprit de M. Euler tant de netteté, & tant de vigueur à la fois. Enfin sa facilité à calculer de tête, étoit portée à un degré qu'on croiroit à peine, si l'histoire de ses travaux n'avoit accoutumé aux prodiges: on l'a vu, dans l'intention d'exercer son petit-fils aux extractions de racines, se former la Table des six premières puissances de tous les nombres, depuis 1.

jusqu'à 100, & la conserver exactement dans sa mémoire : deux de ses disciples avoient calculé jusqu'au dix-septième terme, une série convergente assez compliquée ; leurs résultats, quoique formés d'après un calcul écrit, différoient d'une unité au cinquantième chiffre ; ils firent part de cette dispute à leur maître, M. Euler refit le calcul entier dans sa tête, & sa décision se trouva conforme à la vérité.

Depuis la perte de la vue, il n'avoit d'autre amusement que de faire des aimants artificiels, & de donner des leçons de Mathématique à un de ses petits-fils, qui lui paroïssoit annoncer d'heureuses dispositions.

Il alloit encore quelquefois à l'Académie, principalement dans les circonstances difficiles, où il croyoit que sa présence pouvoit être utile pour y maintenir la liberté : on sent combien un Président perpétuel, nommé par la Cour, peut troubler le repos d'une Académie, & tout ce qu'elle en doit craindre, lorsque n'étant pas choisi dans la classe des Savans, il ne se sent pas même arrêté par le besoin qu'a sa réputation du suffrage de ses Confrères ; comment des hommes, uniquement occupés de leurs paisibles travaux, & ne sachant parler que le langage des Sciences, pourroient-ils alors se défendre, sur-tout si étrangers, isolés, éloignés de leur patrie, ils tiennent tout du Gouvernement auquel ils ont à demander justice contre le Chef que ce Gouvernement même leur a donné ?

Mais il est un degré de gloire où l'on se trouve au-dessus de la crainte ; c'est lorsque l'Europe entière s'élèveroit contre une injure personnelle faite à un Grand homme, qu'il peut sans risque déployer contre l'injustice l'autorité de sa renommée, & élever en faveur des Sciences, une voix qu'on ne peut empêcher de se faire entendre ; M. Euler, tout simple, tout modeste qu'il étoit, sentoit ses forces, & les a plus d'une fois heureusement employées.

En 1771, la ville de Pétersbourg éprouva un incendie terrible, les flammes gagnèrent la maison de M. Euler ; un Bâlois, M. Pierre Grimm (dont le nom mérite sans doute d'être conservé), apprend le danger de son illustre

compatriote , aveugle & souffrant , il se précipite au travers des flammes , pénètre jusqu'à lui , le charge sur ses épaules & le sauve au péril de sa vie : la bibliothèque , les meubles de M. Euler furent consumés , mais les soins pressés du comte Orloff , sauvèrent ses manuscrits ; & cette attention , au milieu du trouble & des horreurs de ce grand désastre , est un des hommages les plus vrais & les plus flatteurs que jamais l'autorité publique ait rendus au génie des Sciences : la maison de M. Euler étoit un des bienfaits de l'Impératrice , un nouveau bienfait en répara promptement la perte.

Il a eu de sa première femme treize enfans , dont huit morts en bas âge ; ses trois fils lui ont survécu , & il eut le malheur de perdre ses deux filles dans la dernière année de sa vie ; de trente-huit petits-enfans , vingt-six vivoient encore à l'époque de sa mort. En 1776 , il épousa en secondes nœces , M.^{lle} Gsell , sœur de père de sa première femme ; il avoit gardé toute la simplicité de mœurs dont la maison paternelle lui avoit donné l'exemple ; tant qu'il a conservé la vue , il rassembloit tous les soirs , pour la prière commune , ses petits-enfans , ses domestiques & ceux de ses élèves qui logeoient chez lui ; il leur lisoit un chapitre de la Bible , & quelquefois accompagnoit cette lecture d'une exhortation.

Il étoit très-religieux ; on a de lui une preuve nouvelle de l'existence de Dieu & de la spiritualité de l'ame , cette dernière même a été adoptée dans plusieurs écoles de Théologie : il avoit conservé scrupuleusement la Religion de son pays , qui est le Calvinisme rigide ; & il ne paroît pas qu'à l'exemple de la plupart des Savans Protestans , il se soit permis d'adopter des opinions particulières , & de se former un système de Religion.

Son érudition étoit très-étendue , sur-tout dans l'histoire des Mathématiques ; on a prétendu qu'il avoit porté sa curiosité jusqu'à s'instruire des procédés & des règles de l'Astrologie , & que même il en avoit fait quelques appli-

cations; cependant lorsqu'en 1740, on lui donna ordre de faire l'horoscope du Prince Yvan, il représenta que cette fonction appartenoit à M. Kraaff, qui, en qualité d'Astronome de la Cour, fut obligé de la remplir. Cette crédulité qu'on est étonné de trouver à cette époque dans la Cour de Russie, étoit générale un siècle auparavant dans toutes les Cours de l'Europe; celles de l'Asie n'en ont pas encore secoué le joug, & il faut avouer, que si on en excepte les maximes communes de la Morale, il n'y a jusqu'ici aucune vérité qui puisse se glorifier d'avoir été adoptée aussi généralement & aussi long-temps, que beaucoup d'erreurs, ou ridicules ou funestes.

M. Euler avoit étudié presque toutes les branches de la Physique, l'Anatomie, la Chimie, la Botanique; mais sa supériorité dans les Mathématiques ne lui permettoit pas d'attacher la plus petite importance à ses connoissances dans les autres genres, quoiqu'assez étendues pour qu'un homme plus susceptible des petitesesses de l'amour-propre, eût pu aspirer à une sorte d'universalité.

L'étude de la Littérature ancienne & des Langues savantes, avoit fait partie de son éducation; il en conserva le goût toute sa vie, & n'oublia rien de ce qu'il avoit appris; mais il n'eut jamais ni le temps ni le desir d'ajouter à ses premières études: il n'avoit pas lû les Poètes modernes, & savoit par cœur l'Énéide. Cependant M. Euler ne perdoit pas de vue les Mathématiques, même lorsqu'il récitoit les vers de Virgile; tout étoit propre à lui rappeler cet objet presque unique de ses pensées, & on trouve dans ses Ouvrages un savant Mémoire sur une question de Mécanique, dont il racontoit qu'un vers de l'Énéide lui avoit donné la première idée.

On a dit, que, pour les hommes d'un grand talent, le plaisir du travail en étoit une récompense plus douce encore que la gloire; si cette vérité avoit besoin d'être prouvée par des exemples, celui de M. Euler ne permettroit plus d'en douter.

Jamais

Jamais , dans les savantes discussions avec de célèbres Géomètres , il n'a laissé échapper un seul trait qui puisse faire soupçonner qu'il se soit occupé des intérêts de son amour-propre. Jamais il n'a réclamé aucune de ses découvertes ; & si on revendiquoit quelque chose dans ses Ouvrages , il s'empressoit de réparer une injustice involontaire , sans même trop examiner si l'équité rigoureuse exigeoit de lui un abandon absolu. Y avoit-on relevé quelqu'erreur , si le reproche étoit mal fondé , il l'oublioit ; s'il étoit juste , il se corrigeoit , & ne songeoit même pas à observer , que souvent le mérite de ceux qui se vantoient d'avoir aperçu ses fautes , consistoit seulement dans une application facile des méthodes que lui-même leur avoit enseignées , à des théories dont il avoit aplani d'avance les plus grandes difficultés.

Presque toujours les hommes médiocres cherchent à se faire valoir par une sévérité proportionnée à la haute idée qu'ils veulent donner de leur jugement ou de leur génie ; inexorables pour tout ce qui s'élève au-dessus d'eux , ils ne pardonnent même pas à l'infériorité ; on diroit qu'un sentiment secret les avertit du besoin qu'ils ont de rabaisser les autres. Au contraire , le premier mouvement de M. Euler le portoit à célébrer les talens dès l'instant où quelques essais heureux frapportoient ses regards , & sans attendre que l'opinion publique eût sollicité son suffrage. On le voit employer son temps à refaire , à éclaircir ses Ouvrages , & même à résoudre des problèmes déjà résolus , qui ne lui laissoient plus que le mérite de plus d'élégance & de méthode , avec la même ardeur , la même constance qu'il eût mises à poursuivre une vérité nouvelle dont la découverte auroit ajouté à sa renommée. D'ailleurs , si le desir ardent de la gloire eût existé au fond de son cœur , la franchise de son caractère ne lui eût pas permis d'en cacher les mouvemens. Mais cette gloire dont il s'occupoit si peu , vint le chercher. La fécondité singulière de son génie frapportoit même ceux qui n'étoient pas en état

d'entendre ses Ouvrages ; quoiqu'uniquement livré à la Géométrie , sa réputation s'étendit parmi les hommes les plus étrangers à cette Science ; & il fut pour l'Europe entière , non-seulement un grand Géomètre , mais un grand homme. Il est d'usage , en Russie , d'accorder des titres militaires à des hommes très-étrangers au service ; c'est rendre hommage au préjugé qui faisoit regarder cet état comme la seule profession noble , & avouer en même temps qu'on en reconnoît toute la fausseté : quelques Savans ont obtenu jusqu'au grade de Général-Major ; M. Euler n'en eut & n'en vouloit avoir aucun : mais quel titre pouvoit honorer le nom d'Euler ? Et alors le respect pour la conservation des droits naturels de l'homme , impose en quelque sorte le devoir de donner l'exemple d'une sage indifférence pour ces hochets de la vanité humaine, si puérils , mais si dangereux.

La plupart des Princes du Nord , dont il étoit personnellement connu , lui ont donné des marques de leur estime , ou plutôt de la vénération qu'on ne pouvoit refuser à la réunion d'une vertu si simple & d'un génie si vaste & si élevé. Dans le voyage que le Prince Royal de Prusse fit à Pétersbourg , il prévint la visite de M. Euler , & passa quelques heures à côté du lit de cet illustre vieillard , ayant ses mains dans les siennes , & tenant sur ses genoux un petit-fils d'Euler , que ses dispositions précoces pour la Géométrie , avoient rendu l'objet particulier de sa tendresse paternelle.

Tous les Mathématiciens célèbres qui existent aujourd'hui , sont ses Élèves : il n'en est aucun , qui ne se soit formé par la lecture de ses Ouvrages , qui n'ait reçu de lui les formules , la méthode qu'il emploie , qui , dans ses découvertes , ne soit guidé & soutenu par le génie d'Euler. Il doit cet honneur à la révolution qu'il a produite dans les Sciences Mathématiques , en les soumettant toutes à l'analyse ; à sa force pour le travail , qui lui a permis d'embrasser toute l'étendue de ces Sciences ; à l'ordre

qu'il a su mettre dans ses grands Ouvrages ; à la simplicité , à l'élégance de ses formules ; à la clarté de ses méthodes & de ses démonstrations qu'augmentent encore la multiplicité & le choix de ses exemples. Ni Newton , ni Descartes même , dont l'influence a été si puissante , n'ont obtenu cette gloire , & jusqu'ici , seul entre les Géomètres , M. Euler l'a possédée toute entière & sans partage.

Mais comme Professeur , il a formé des Élèves qui lui appartiennent plus particulièrement , & parmi lesquels nous citerons son fils aîné , que l'Académie des Sciences a choisi pour le remplacer , sans craindre que cette succession honorable accordée au nom d'Euler , comme à celui de Bernoulli , pût devenir un exemple dangereux ; un second fils , livré aujourd'hui à l'étude de la Médecine , mais qui dans sa jeunesse a remporté dans cette Académie un Prix sur les altérations du moyen mouvement des Planètes ; M. Lexell , qu'une mort prématurée vient d'enlever aux Sciences ; enfin , M. Fuss , le plus jeune de ses disciples , le compagnon de ses derniers travaux , qui , envoyé de Bâle à M. Euler , par M. Daniel Bernoulli , s'est montré digne par ses Ouvrages , du choix de Bernoulli & des leçons d'Euler ; & qui , après avoir rendu dans l'Académie de Pétersbourg , un hommage public à son illustre Maître , vient de s'unir à sa petite-fille.

De seize Professeurs attachés à l'Académie de Pétersbourg , huit avoient été formés par lui ; & tous , connus par leurs Ouvrages , & décorés de titres académiques , se glorifioient de pouvoir y ajouter celui de disciples d'Euler.

Il avoit conservé toute sa facilité , & en apparence toutes ses forces ; aucun changement n'annonçoit que les Sciences fussent menacées de le perdre. Le 7 Septembre 1783 , après s'être amusé à calculer sur une ardoise les loix du mouvement ascensionnel des machines aérostatiques , dont la découverte récente occupoit alors toute l'Europe , il dina avec M. Lexell & sa famille , parla de la Planète d'Herfchell , & des calculs qui en déterminent

l'orbite ; peu de temps après il fit venir son petit-fils , avec lequel il badinoit en prenant quelques tasses de thé , lorsque tout-à-coup , la pipe qu'il tenoit à la main lui échappa , & il cessa de calculer & de vivre.

Telle fut la fin d'un des hommes les plus grands & les plus extraordinaires que la Nature ait jamais produits ; dont le génie fut également capable des plus grands efforts & du travail le plus continu , qui multiplia ses productions au-delà de ce qu'on eût osé attendre des forces humaines , & qui cependant fut original dans chacune ; dont la tête fut toujours occupée & l'ame toujours calme , qui enfin , par une destinée malheureusement trop rare , réunit & mérita de réunir un bonheur presque sans nuage , à une gloire qui ne fut jamais contestée.

Sa mort a été regardée comme une perte publique , même dans le pays qu'il habitoit : l'Académie de Pétersbourg a porté solennellement son deuil , & lui a décerné à ses frais un buste de marbre qui doit être placé dans ses salles d'assemblées ; elle lui avoit déjà rendu pendant sa vie , un honneur plus singulier. Dans un tableau allégorique , la Géométrie s'appuie sur une planche chargée de calculs , & ce sont les formules de sa nouvelle théorie de la Lune , que l'Académie a ordonné d'y inscrire. Ainsi , un pays , qu'au commencement de ce siècle nous regardions encore comme barbare , apprend aux nations les plus éclairées de l'Europe , à honorer la vie des grands hommes & leur mémoire récente : il donne à ces nations un exemple que plusieurs d'entr'elles auroient à rougir , peut-être , de n'avoir su ni prévenir , ni même imiter.





ÉLOGE DE M. BÉZOUT.

ÉTIENNE BÉZOUT, de l'Académie des Sciences & de celle de Marine, Examineur des Gardes de la Marine & des Élèves du Corps de l'Artillerie, naquit à Nemours, le 31 Mars 1730, de Pierre Bézout & d'Hélène Filz.

Le hafard lui offrit dans le cours de ses études, quelques Livres de Géométrie élémentaire, qui lui en inspirèrent le goût, & les Éloges de Fontenelle, qui lui apprirent qu'une carrière paisible & honorée est presque toujours le prix du talent & même de l'amour des Sciences. Son père vit avec peine des dispositions qui s'opposoient aux vues qu'il avoit formées; mais il fallut céder à un penchant devenu bientôt irrésistible.

Il ne faut pas regarder cette opposition dont l'histoire des Sciences offre tant d'exemples, même dans ce siècle, comme la suite d'un mépris pour elles, heureusement bien éloigné de nos mœurs. Il est souvent difficile de distinguer si ce penchant pour l'étude, au lieu d'être l'effet ou le signe d'un véritable talent, n'est pas plutôt le fruit d'une effervescence passagère, si même il ne sert pas de voile à un dégoût pour d'autres états dont les commencemens exigent plus de contrainte & de sacrifices: ainsi un père qui fait que l'instruction & les lumières ne mènent dans les différentes classes de la société, ni aux distinctions ni à la fortune, est très-excusable de regarder comme perdu le temps qu'après ses études ordinaires, son fils auroit employé à perfectionner son esprit ou sa raison; & dans cette circonstance, comme dans bien d'autres, les fautes des particuliers sont l'ouvrage des institutions publiques.

M. Bézout prouva bientôt que son ardeur pour l'étude des Mathématiques, ne l'avoit pas trompé sur la véritable destination à laquelle la Nature l'avoit appelé, & dès 1758 ses travaux lui méritèrent une place à l'Académie.

Il lui avoit présenté deux Mémoires sur le Calcul intégral: dans le premier, il déterminoit la forme des fonctions semblables dont les variables sont liées entr'elles par une équation, & qui, multipliées par des facteurs constants, & ajoutées ensemble, deviennent intégrables algébriquement, quoique chacune d'elles en particulier ne le soit pas. Il donnoit dans le second, l'équation générale des courbes rectifiables, & dans certains cas de celles dont la rectification dépend de leur quadrature.

Ces Mémoires annonçoient dans M. Bézout, le goût des recherches générales de Calcul, & le talent propre à réussir dans ces recherches.

En 1763, M. le Duc de Choiseul crut devoir exiger de ceux qui se destinoient à la Marine, des connoissances mathématiques plus étendues, & les assujettir à un examen. M. Bézout fut chargé à la fois des fonctions d'Examineur, & de la composition d'un Cours de Mathématiques, destiné pour les Gardes de la Marine. Quelques années après, à la mort de M. Camus, il fut nommé Examineur des Élèves de l'Artillerie.

Il sentit que ces places exigeoient le sacrifice de ses goûts, & qu'il seroit obligé de renoncer à la fois au plaisir de suivre dans ses études l'impulsion de son talent, & à une partie de la gloire qu'il pouvoit espérer. Cependant il étoit père de famille, il étoit sans fortune, & il ne se crut point permis de balancer; mais il prit le parti qu'un esprit très-sage devoit choisir: il vit que s'il ne traçoit pas une ligne bien marquée entre son devoir & sa passion, il faudroit la combattre sans cesse, & finir toujours par lui céder. Il résolut donc de concentrer sur un seul objet ses méditations mathématiques, afin d'être plus sûr de ne leur donner que la partie de son temps qui n'appartenoit point

à l'État; & il choisit la Théorie générale des Équations déterminées.

On sait que les équations du troisième degré, & même celles du quatrième, ont été résolues par des Géomètres Italiens, vers le milieu du seizième siècle. Depuis ce temps l'analyse a fait des pas immenses, plusieurs découvertes importantes sur les équations, ont illustré les noms de Viète & de Descartes; cependant l'équation du cinquième degré n'a pas encore été résolue; & si les efforts que tous les Géomètres célèbres ont dirigé vers cet objet depuis deux cents ans, ont été plus d'une fois utiles aux progrès de la Science en général, ils l'ont été très-peu à la solution de ce problème en particulier.

M. Bézout trouva d'abord la solution d'une classe particulière d'Équations de tous les degrés. Sa méthode différente des méthodes déjà connues, se trouvoit générale pour le troisième & le quatrième degré, & commençoit à devenir particulière précisément au cinquième.

Cependant pour ce degré & pour les degrés supérieurs, si elle ne conduisoit pas à la solution générale, du moins elle fournissoit des lumières utiles sur la route qu'il falloit suivre pour y parvenir, & sur les obstacles qui jusqu'ici ont empêché d'y faire des progrès. Par cette méthode enfin on pénétoit un peu plus avant dans la connoissance de la nature des équations, & même elle semble offrir un fil qui peut-être servira quelque jour pour conduire à cette solution si désirée. Mais il se présentait un grand obstacle, l'énorme longueur des calculs auxquels il faudroit se livrer. Il étoit donc nécessaire de donner une méthode de simplifier ces calculs, d'éviter toute complication inutile, & sur-tout les erreurs où cette complication pourroit conduire. Ainsi le perfectionnement de la méthode d'éliminer, devoit être un premier pas sans lequel il étoit difficile de se flatter de parvenir à la solution du problème principal.

En supposant un nombre d'équations d'un degré quel-

conque, entre un nombre égal d'inconnues, il s'agit de trouver le degré où doit monter l'équation finale, & par conséquent de trouver cette équation telle qu'elle doit être sans aucune racine inutile : car en suivant la marche ordinaire, il arrive qu'on complique l'équation finale, qu'on la charge de racines superflues ; inconvénient d'autant plus grand, que ces racines ne servent pas à la solution des problèmes, & que l'élimination une fois achevée, il seroit ou très-difficile, ou très-pénible de les distinguer de celles qui doivent seules être employées.

Les équations proposées peuvent être complètes, ou manquer d'une partie de leurs termes, & c'est encore ici une nouvelle difficulté ; car ce seroit un défaut dans une solution de ce genre, d'être obligé de traiter l'équation comme complète, & d'achever l'opération dans cette hypothèse, pour déterminer ensuite d'après le résultat les changemens que le manquement de termes a pu produire. D'ailleurs, l'un des avantages les plus essentiels d'une méthode générale d'éliminer, est de dispenser dans bien des cas du travail d'exécuter cette opération, en donnant d'avance la forme & le degré de l'équation finale. Il se présente même un grand nombre de questions, & ce ne sont pas les moins importantes, où cette seule connoissance est nécessaire.

Le Traité sur l'Élimination, de M. Bézout, contient la solution de ce problème épineux & difficile, & il y parvient par le moyen de plusieurs théorèmes nouveaux sur le calcul des différences finies ; car toutes les parties de l'analyse, enchaînées l'une à l'autre, se prêtent des secours mutuels. Ces distinctions n'ont été faites que pour faciliter la méthode d'étudier ; & dans cette Science, comme dans toutes les autres, la Nature se joue de ces divisions qui doivent leur origine à son immensité & à notre foiblesse.

Cet Ouvrage ne parut qu'en 1779, & depuis 1762 M. Bézout n'avoit cessé de s'en occuper. Les Mathématiciens ne sont pas en général pressés de jouir, on a
d'autant

d'autant moins besoin de l'opinion des autres, qu'on est plus sûr d'avance de celle qu'ils doivent avoir. D'ailleurs M. Bézout ne se permit de publier ce travail entrepris pour sa gloire, & sur-tout pour le plaisir de s'y livrer, qu'après avoir donné ceux qui étoient pour lui des Ouvrages d'obligation. Il avoit composé deux Cours de Mathématiques; l'un pour la Marine, l'autre pour l'Artillerie; le fonds de ces Ouvrages étoit le même; les applications seules étoient différentes, & analogues dans chaque Cours, à l'objet principal des études de ceux auxquels il étoit destiné. La meilleure preuve du mérite des Livres Élémentaires, c'est leur succès; ceux qui les enseignent, ou qui les étudient trouvent trop d'avantage à choisir celui qui en renfermant une égale instruction, leur donne le moins de peine, pour ne pas être justes même par intérêt. Les Cours élémentaires de M. Bézout ont été adoptés dans un grand nombre d'Écoles & par beaucoup de Maîtres; & ce succès nous dispense d'en apprécier le mérite.

Les Examens des Élèves de deux Écoles, & les voyages auxquels ces examens l'obligeoient, étoient pour M. Bézout une distraction pénible, dont son zèle pour le bien public pouvoit seul le consoler. Encourager un Élève timide, faire oublier par un ton de bonhomie & par une douce familiarité, tout ce que le caractère d'Examineur a d'impôfant pour un jeune homme tourmenté à la fois par l'amour de la gloire & par celui de la liberté, par le désir de plaire à sa famille, & par l'ambition de s'avancer; distinguer dans les fautes qui échappent à un Élève, celles dont le défaut d'intelligence ou d'instruction est la cause, & celles qui naissent d'un trouble involontaire; démêler dans celui qui s'énonce mal, le savoir & le talent qui se cachent; ne pas confondre la facilité qui vient de la mémoire ou de la confiance, avec celle qui annonce la sagacité ou une conception rapide; juger le mérite d'un Élève d'après la manière dont il résout les questions qu'on lui propose,

& non d'après son exactitude plus ou moins servile à suivre les solutions que l'Examineur a données dans ses Ouvrages; mettre enfin chacun d'eux à sa place, & prononcer entre le plus jeune qui donne des espérances plus brillantes, & celui qui, éprouvé plus long-temps, en donne de plus certaines; entre l'Élève qui, également instruit sur toutes les parties, montre une heureuse facilité d'apprendre, & celui qui, foible sur quelques-unes & supérieur sur d'autres, annonce une tête capable de plus d'efforts & de combinaisons plus profondes; tels sont les devoirs d'un Examineur & le tableau des examens de M. Bézout.

Il est aussi dans cette place d'autres devoirs qui tiennent plus à l'Homme qu'au Savant; nous ne dirons pas ici avec quel scrupule il les a remplis, parce qu'un trait que nous allons rapporter, en fera mieux juger que tout ce que nous pourrions dire.

Pendant un examen à Toulon, il apprend que deux Élèves ne pourront se présenter, parce qu'ils sont attaqués de la petite vérole; il n'avoit pas eu cette maladie, il la craignoit; cependant il fait que s'il ne voit pas ces Élèves, il retardera d'un an leur avancement; dès ce moment ses répugnances se taisent, il se fait conduire au lit des malades, les examine & se trouve heureux de ce qu'ils ont été dignes du sacrifice qu'il a fait pour eux.

Un pareil acte d'une justice rigoureuse exercée même au péril de ses jours, est un de ces traits qui répondent d'une vie entière.

M. Bézout, quoique livré presque exclusivement à la Géométrie, n'avoit pas négligé d'acquérir des connoissances même très-étendues sur la plupart des branches de la Physique; & c'est à lui que l'Académie doit la première connoissance de ces grès cristallisés de Fontainebleau, sur lesquels M. de Laffone a donné depuis plusieurs savans Mémoires.

M. Bézout s'étoit marié très-jeune, & comme alors il étoit sans fortune, il avoit pu suivre le choix de son cœur;

cette union fut heureuse , il fut très-bon père , non-seulement parce que c'est un devoir , mais parce qu'il aimoit à vivre au milieu de sa famille , & qu'il préféreroit cette société si douce & si pure , ces soins si touchans , aux plaisirs qu'on trouve ou qu'on croit trouver dans le monde. Né avec un cœur droit , il aimoit le travail & la retraite , aussi eut-il toutes les vertus & quelques-uns des défauts qui sont la suite du goût de la solitude ; défauts bien plus excusables que ceux qui se contractent par l'habitude du monde & des affaires ; les premiers font souffrir , sur-tout celui qui n'a pu s'en préserver , au lieu que le poids des derniers retombe tout entier sur les autres hommes. Réservé dans la société , parce qu'il y étoit étranger , il ne s'y montrait pas tel qu'il étoit ; son extérieur étoit froid , & il avoit une ame ardente & sensible ; sa conversation n'annonçoit ni la sagacité de son esprit ni ses connoissances à la fois & étendues profondes : aussi son portrait tracé par ses amis , ou par ceux qui ne l'ont connu que superficiellement , paroîtroit celui de deux hommes absolument étrangers l'un à l'autre.

Tout sembloit lui promettre des jours heureux ; sa fortune suffisoit non-seulement à son bien-être personnel , mais aux desirs qu'il formoit pour sa famille , avec une modération égale à celle qu'il avoit pour lui-même. Il jouissoit de la juste réputation que ses Ouvrages lui avoient méritée , de l'estime de ses Confrères , de la considération des Ministres , qui connoissoient son zèle & sa droiture , & auxquels la voix publique avoit appris à respecter ses lumières ; enfin , de la tendresse de quelques amis & de celle d'une famille à laquelle il tenoit encore par le besoin qu'elle avoit de lui. Mais le travail , la fatigue de ses places , quelques chagrins personnels avoient altéré ses forces ; il fut attaqué d'une fièvre maligne , & y succomba le 27 Septembre 1783 , regretté de sa famille , de ses Confrères , de ses amis , de ses Élèves , de tous ceux qui avoient pu le bien connoître.





ÉLOGE

DE M. D'ALEMBERT.

JEAN LE ROND D'ALEMBERT, Secrétaire perpétuel de l'Académie Française, Membre des Académies des Sciences de France, de Prusse, de Russie, de Portugal, de Naples, de Turin, de Norvège, de Padoue; de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suède, de l'Institut de Bologne, de la Société littéraire de Cassel, & de la Société philosophique de Boston, naquit à Paris le 17. Novembre 1717.

Nous ne chercherons point à lever le voile dont le nom de ses parens a été couvert pendant sa vie; & qu'importe ce qu'ils ont pu être? les véritables aïeux d'un homme de génie, sont les Maîtres qui l'ont précédé dans la carrière; & les vrais descendans sont des Élèves dignes de lui.

Exposé près de l'église de Saint Jean-le-Rond, M. d'Alembert fut porté chez un Commissaire, qu'heureusement l'habitude des tristes fonctions de sa place n'avoit point endurci; il craignit que cet enfant débile & presque mourant, ne pût trouver dans un hospice public les soins, les attentions suivies, nécessaires pour sa conservation, il en chargea une ouvrière dont il connoissoit les mœurs & l'humanité; & c'est de ce hasard heureux qu'a dépendu l'existence d'un homme qui devoit être l'honneur de sa patrie & de son siècle, & que la Nature avoit destiné à enrichir de tant de vérités nouvelles le système des connoissances humaines.

Cet abandon, qui peut-être n'étoit même qu'apparent, ne dura que très-peu de jours; le père de M. d'Alembert le répara aussitôt qu'il en fut instruit, il fit pour l'éducation

de son fils, & pour lui assurer une subsistance indépendante, ce qu'exigeoient la Nature & le devoir : sa famille regarda M. d'Alembert, tant qu'il fut inconnu, comme un parent à qui elle devoit des soins & des égards ; & lorsqu'il fut devenu célèbre, elle s'honora de ces liens que la reconnaissance avoit resserrés.

M. d'Alembert fit ses études au collège des Quatre-nations, & les fit d'une manière brillante, indice quelquefois trompeur de ce qu'un homme doit être un jour.

L'importance que le Cardinal Mazarin eut la foiblesse ou l'imprudence de donner aux disputes des amis de Saint-Cyran avec les Jésuites, avoit produit des troubles qui, après quatre-vingts ans, agitoient encore la France, & dont le progrès des lumières a depuis presque anéanti jusqu'au souvenir ; mais en 1730, il n'y avoit aucun Corps, aucun Collège, pour ainsi dire aucun homme, qui, par zèle religieux, par politique ou par désœuvrement, n'eût embrassé un des deux partis.

Les Maîtres de M. d'Alembert étoient de celui qu'on appelloit *Janséniste*, car dans les disputes de ce genre, on cherche toujours à rendre ses adversaires odieux par un nom de secte dont ils ont grand soin de se défendre ; espèce d'hommage qu'ils rendent à la raison. M. d'Alembert fit, dans sa première année de Philosophie, un Commentaire sur l'Épître de Saint Paul aux Romains, & commença comme Newton avoit fini ; ce Commentaire donna de grandes espérances à ses Maîtres : les hommes distingués dans la Littérature ou dans les Sciences, montroient alors presque seuls à la Nation, l'exemple d'une indifférence salutaire ; on se flatta que M. d'Alembert rendroit au parti de Port-royal une portion de son ancienne gloire, & qu'il seroit un nouveau Pascal.

Pour rendre la ressemblance plus parfaite, on lui fit suivre des leçons de Mathématiques ; mais bientôt on s'aperçut qu'il avoit pris pour ces Sciences une passion qui décida du sort de sa vie : en vain ses Maîtres cherchèrent

à l'en détourner, en lui annonçant que cette étude lui dessécheroit le cœur (ils ne sentoient pas sans doute toute la force de l'aveu que renferme cette expression) : M. d'Alembert fut moins docile que Pascal, jamais on ne put lui faire regarder l'amour un peu exclusif des vérités certaines & claires, comme une erreur dangereuse, ou comme un penchant de la Nature corrompue.

En sortant du Collège, il jeta un coup-d'œil sur le monde, il s'y trouva seul, & courut chercher un asile auprès de sa nourrice; l'idée consolante, que sa fortune, toute médiocre qu'elle étoit, répandroit un peu d'aisance dans cette famille, la seule qu'il pût regarder comme la sienne, étoit encore pour lui un motif puissant: il y vécut près de quarante années, conservant toujours la même simplicité, ne laissant apercevoir l'augmentation de son revenu que par celle de ses bienfaits, ne voyant dans la grossièreté des manières de ceux avec lesquels il vivoit, qu'un sujet d'observations plaisantes ou philosophiques, & cachant tellement sa célébrité & sa gloire, que sa nourrice qui l'aimoit comme un fils, qui étoit touchée de sa reconnaissance & de ses soins, ne s'aperçut jamais qu'il fût un Grand homme: son activité pour l'étude, dont elle étoit témoin, ses nombreux Ouvrages dont elle entendoit parler, n'excitoient ni son admiration, ni le juste orgueil qu'elle auroit pu ressentir, mais plutôt une sorte de compassion: *vous ne serez jamais qu'un Philosophe*, lui disoit-elle; *et qu'est-ce qu'un Philosophe! — c'est un fou qui se tourmente pendant sa vie, pour qu'on parle de lui lorsqu'il n'y sera plus.*

Dans cette maison, M. d'Alembert s'occupoit presque uniquement de Géométrie, achetant quelques livres, allant chercher dans les Bibliothèques publiques ceux qu'il ne pouvoit acheter: souvent il se présentoit à lui des vues nouvelles, il les suivoit, il goûtoit déjà le plaisir de faire des découvertes; mais ce plaisir étoit court, il consultoit les Livres, & voyoit avec un sentiment un peu pénible, que ce qu'il croyoit avoir trouvé le premier, étoit déjà

connu : alors il se persuada que la Nature lui avoit refusé le génie, qu'il devoit se borner à savoir ce que les autres auroient découvert, & il se résigna sans peine à cette destinée; il sentoît que le plaisir d'étudier, même sans la gloire, suffiroit encore à son bonheur. Cette anecdote que nous tenons de lui-même, nous paroît un fait moral bien précieux; il est rare de pouvoir observer le cœur humain si près de sa pureté naturelle, & avant que l'amour-propre l'ait corrompu.

Cependant on fit apercevoir à M. d'Alembert, qu'avec une pension de douze cents livres, on n'étoit pas assez riche pour renoncer aux moyens d'augmenter son aisance; on lui fit sentir la nécessité de prendre un état, car celui de Géomètre n'en est pas un, & même les places où les connoissances mathématiques sont nécessaires, ne donnent pas cette heureuse indépendance que le Jurisconsulte & le Médecin sans fortune obtiennent dès les premiers pas de leur carrière. M. d'Alembert étudia d'abord en Droit & y prit des degrés, mais il abandonna bientôt cette étude: l'Ouvrage de Montesquieu n'existoit point encore, on ne prévoyoit pas la révolution qu'il devoit produire dans nos esprits; l'étude du Droit ne pouvoit paroître que celle de l'opinion, de la volonté, du caprice des hommes, qui, depuis trente siècles, avoient joui ou abusé du pouvoir, en Grèce, à Rome & chez les Barbares: comment un jeune Géomètre n'eût-il pas été bientôt dégoûté de pareils objets, sur lesquels il trouvoit à exercer sa mémoire bien plus que sa raison? Il préféra donc la carrière de la Médecine, mais la passion de la Géométrie lui faisoit encore négliger ses nouvelles études, & il prit le parti courageux de se séparer des objets de sa passion; ses Livres de Mathématiques furent portés chez un de ses amis, où il ne devoit les reprendre qu'après avoir été reçu Docteur en Médecine, lorsqu'ils ne seroient plus pour lui qu'un délassement, & non une distraction.

Cependant poursuivi par ses idées, il demandoit de

temps en temps à son ami, un livre qui lui étoit nécessaire pour se délivrer de cette inquiétude pénible que si peu d'hommes connoissent, & que produit le souvenir confus d'une vérité dont on cherche en vain les preuves dans sa mémoire; peu-à-peu tous ses Livres se retrouvèrent chez lui: alors, bien convaincu de l'inutilité de ses efforts pour combattre son penchant, il y céda, & se voua pour toujours aux Mathématiques & à la pauvreté; les années qui suivirent cette résolution, furent les plus heureuses de sa vie, il se plaisoit à en répéter les détails: à son réveil, il pensoit, disoit-il, avec un sentiment de joie, au travail commencé la veille, & qui alloit remplir la matinée; dans les intervalles nécessaires de ses méditations, il songeoit au plaisir vif que le soir il éprouveroit au Spectacle, où, pendant les entre-actes, il s'occupoit du plaisir plus grand que lui promettoit le travail du lendemain.

En 1741, il entra dans l'Académie des Sciences, il s'en étoit fait connoître par un Mémoire où il relevoit quelques fautes échappées au Père Reinau, dont l'*Analyse démontrée* étoit alors regardée en France comme un Livre classique; & c'étoit en l'étudiant pour s'instruire, que le jeune Géomètre avoit appris à le corriger.

Il s'étoit occupé ensuite d'examiner quel devoit être le mouvement d'un corps qui passe d'un fluide dans un autre plus dense, & dont la direction n'est pas perpendiculaire à la surface qui les sépare: lorsque cette direction est très-oblique, on voit le corps, au lieu de s'enfoncer dans le second fluide, se relever & former un ou plusieurs ricochets, phénomène qui avoit amusé les enfans long-temps avant la découverte des premiers principes des Sciences, & que cependant, jusqu'à M. d'Alembert, on n'avoit pas encore bien expliqué.

Deux ans après son entrée à l'Académie, il publia son traité de Dynamique.

Dans la Science du mouvement, il faut distinguer deux fortes

sortes de principes; les uns sont des vérités de pure définition, les autres sont ou des faits donnés par l'observation, ou des loix générales déduites de la nature des corps considérés comme impénétrables, indifférens au mouvement, & susceptibles d'en recevoir: de ces derniers principes, celui de la décomposition des forces, étoit le seul vraiment général qui fût connu jusqu'alors; & joint à ces vérités de définition, sur lesquelles Huygens & Newton n'avoient rien laissé à découvrir, il avoit suffi pour établir leurs sublimes théories, & pour résoudre ces problèmes de Statique, si célèbres dans le commencement de ce siècle. Mais si les corps ont une forme finie, si on les imagine liés entr'eux par des fils flexibles, ou par des verges inflexibles, & qu'on les suppose en mouvement, alors ces principes ne suffisoient plus; & il falloit en inventer un nouveau; M. d'Alembert le découvrit, & il n'avoit que vingt-six ans: ce principe consiste à établir l'égalité, à chaque instant, entre les changemens que le mouvement du corps a éprouvés, & les forces qui ont été employées à les produire, ou, en d'autres termes, à séparer en deux parties l'action des forces motrices, à considérer l'une comme produisant seule le mouvement du corps dans le second instant, & l'autre comme employée à détruire celui qu'il avoit dans le premier: ce principe si simple, qui réduisoit à la considération de l'équilibre toutes les loix du mouvement, a été l'époque d'une grande révolution dans les Sciences Physico-mathématiques. À la vérité, plusieurs des problèmes résolus dans le traité de Dynamique, l'avoient déjà été par des méthodes particulières; différentes en apparence pour chaque problème, elles n'étoient sans doute réellement qu'une seule & même méthode, sans doute elles renfermoient le principe général qui y étoit caché, mais personne n'avoit pu l'y découvrir; & si on refusoit, sous ce prétexte, à M. d'Alembert, la juste admiration qu'il mérite, on pourroit, avec autant de raison, faire honneur à Huygens des découvertes de Newton,

& accorder à Wallis la gloire que Léibnitz & Newton se sont disputée.

Les découvertes successives qui forment les Sciences, naissent les unes des autres; celle qui appartient exclusivement à un seul homme, est due à son génie aidé des travaux de ceux qui l'ont précédé, lui ont aplani la carrière, & ne lui ont plus laissé qu'un dernier obstacle à vaincre: mais parmi ces découvertes, il en est qui par leur étendue, leur influence sur le progrès général des Sciences, la nombreuse suite de théories nouvelles qui n'en sont que le développement, semblent former une classe particulière, & mériter à leur inventeur un rang à part dans le nombre déjà si petit des hommes de génie.

Telle a été celle du principe de M. d'Alembert; déjà, en 1744, il l'avoit appliqué à la théorie de l'équilibre & du mouvement des fluides, & tous les problèmes résolus jusqu'alors par les Géomètres, étoient devenus en quelque sorte des corollaires de ce principe: mais il avoit fallu employer en même temps les hypothèses ingénieuses de M. Daniel Bernoulli, que leur accord avec les phénomènes les plus généraux de l'Hydraulique, permettoit presque de regarder comme des faits. Dans la théorie des fluides, comme dans celle du mouvement des corps susceptibles de changer de forme, le principe de M. d'Alembert, lorsqu'on l'employoit seul, conduisoit à des équations qui échappoient aux méthodes connues, & cette première découverte sembloit rendre nécessaire celle d'un nouveau calcul; M. d'Alembert en eut encore l'honneur: dans un Ouvrage sur la théorie générale des Vents, couronné par l'Académie de Berlin, en 1746, il donna les premiers essais du calcul des différences partielles; l'année suivante, il l'appliqua au problème des cordes vibrantes, dont la solution, ainsi que la théorie des oscillations de l'air & de la propagation du son, n'avoient pu être données que d'une manière incomplète par les Géomètres qui

l'avoient précédé, & ces Géomètres étoient ou les maîtres ou les rivaux.

L'invention de ce calcul est encore une de ces découvertes destinées à être dans les Sciences une époque mémorable : elle le mérite d'autant plus, qu'en donnant un nouvel instrument d'un usage très-étendu, elle a montré en même-temps la route qu'il falloit suivre pour en former d'autres du même genre ; & toutes les parties de l'analyse où l'on considère des équations dont l'intégrale peut contenir des fonctions arbitraires de quantités variables, doivent être regardées comme des branches du calcul de M. d'Alembert, quels que soient la forme de ces arbitraires & le système de différentiation qui les ait fait évanouir.

Dans cette pièce sur la théorie des Vents, il ne considéra que l'effet qui peut être produit par l'action combinée de la Lune & du Soleil sur le fluide dont la Terre est enveloppée ; il examina quelle figure l'atmosphère doit prendre à chaque instant, en vertu de cette action, la force & la direction des courans qui en résultent, & les changemens que doit produire sur leur direction & sur leur vitesse, la forme des grandes vallées qui sillonnent la surface du globe.

Les changemens de température, produits dans l'atmosphère par la présence du Soleil, sont une autre cause générale, régulière, & susceptible d'être mesurée, M. d'Alembert se borne à en remarquer l'existence ; il auroit fallu, pour la calculer, adopter quelque hypothèse sur les loix de la dilatation de l'air, sur l'intensité de l'action de la chaleur du Soleil aux différentes hauteurs, & pour des couches d'air plus ou moins denses ; ses recherches n'eussent servi qu'à donner une preuve de plus de son génie pour l'analyse, mais sans conduire à aucun résultat réel ; il n'eût travaillé que pour la gloire, & il vouloit réserver ses forces pour des Ouvrages utiles aux progrès des Sciences.

Il lui restoit encore à donner un moyen d'appliquer son principe au mouvement d'un corps fini, d'une figure donnée ; & en 1749, il résolut le problème de la précession

des équinoxes. L'axe de la Terre ne répond point toujours au même lieu du ciel, mais il se dirige successivement vers tous les points d'un cercle parallèle au plan de l'orbite terrestre; & par une suite de ce mouvement, les équinoxes & les solstices répondent, dans la même période, à toutes les parties du Zodiaque: ce phénomène, connu sous le nom de *précession des équinoxes*, a été observé par les Anciens; Hipparque en avoit supposé la période de 25200, & les Modernes, par des observations plus exactes, l'ont fixée à environ 720 ans de plus. Ce mouvement en longitude n'est pas le seul qu'éprouve l'axe de la Terre; il en a un autre en latitude bien plus petit, qui n'est qu'une espèce de balancement, & dont la période est de dix-huit ans seulement; cette nutation n'a été découverte que dans ce siècle par Bradley, & jusqu'à lui on la confondoit avec les mouvemens irréguliers, propres aux Étoiles fixes. Newton attribuoit avec raison la précession des équinoxes à l'effet de l'attraction de la Lune & du Soleil sur la Terre; il favoit que notre Planète est un sphéroïde aplati vers les pôles, & que ces deux astres étant mus dans des plans où ils n'agissent pas d'une manière semblable sur les parties semblablement disposées autour de l'axe de la Terre, doivent altérer son mouvement de rotation; mais ce n'étoit pas assez, Newton avoit appris le premier aux Philosophes, à n'admettre pour vraies que des explications calculées, qui rendent raison du phénomène en lui-même, de sa quantité & de ses loix; aussi essayait-il de déterminer l'effet de l'attraction de la Lune & du Soleil sur le mouvement de l'axe de la Terre, mais les méthodes d'analyse & les principes même de Mécanique nécessaires pour une solution directe, manquoient à son génie, & il fut obligé d'admettre des hypothèses qui ne le conduisirent à un résultat conforme à l'observation, que par la compensation des erreurs produites par chacune d'elles: vingt-trois ans après sa mort, cette limite qu'il sembloit avoir posée, n'avoit pas été franchie; M. d'Alembert en eut la gloire, il expliqua

également le phénomène de la nutation, nouvellement découvert, & répara l'honneur de la France, ou plutôt du Continent, qui jusqu'alors n'avoit eu rien à opposer aux découvertes de Newton.

Un seul Géomètre, M. Euler, eût pu disputer cette gloire à M. d'Alembert; mais en donnant une solution nouvelle du problème, il avoua qu'il avoit lû l'Ouvrage de M. d'Alembert, & fit cet aveu avec cette noble franchise d'un Grand-homme qui sent qu'il peut, sans rien perdre de sa renommée, convenir du triomphe de son rival.

En 1752, M. d'Alembert publia un Traité sur la résistance des fluides, auquel il donna le titre modeste d'*Essai*, & qui est un de ses Ouvrages où l'on trouve le plus de choses originales & neuves.

La simple supposition, que chaque élément de la masse fluide, en changeant de forme à chaque instant, conserve le même volume, lui suffit pour appliquer son principe aux questions les plus difficiles, & il est conduit à des équations de la nature de celles dont sa nouvelle analyse peut donner la solution: les réflexions sur les causes générales des vents, contenoient le germe de ces découvertes; mais ici elles sont développées, & la théorie du mouvement des fluides est enfin véritablement assujettie au calcul.

A la même époque, M. d'Alembert avoit donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, des recherches sur le Calcul intégral, où la méthode de Jean Bernoulli, pour les fonctions rationnelles, étoit perfectionnée; où, par un usage adroit des substitutions, il étendoit cette méthode à plusieurs classes de fonctions irrationnelles; où il réduisoit à une même expression toutes les imaginaires, sous quelque forme qu'elles se présentent, quelle que soit l'équation à laquelle elles doivent satisfaire; où il donnoit la théorie des points de rebroussement de la seconde espèce, dont plusieurs Géomètres célèbres, & M. Euler lui-même, avoient combattu l'existence; où enfin il proposoit une

méthode d'intégrer les équations linéaires d'un ordre quelconque, intégration importante, qui est le fondement de toutes les méthodes d'approximation pour les équations différentielles, & par conséquent, dans l'état actuel de l'analyse, la clef de toutes les questions de l'Astronomie-physique. M. Euler avoit publié avant lui, une méthode également générale pour ces équations; mais le Géomètre François l'avoit aussi prévenu sur quelques autres points.

M. d'Alembert n'a donné aucun grand Ouvrage sur le Calcul; ses Mémoires même, à l'exception de ceux que nous venons de citer, & d'un petit nombre d'autres, ont pour objet des questions de Mécanique; mais il a répandu dans tous, de nouvelles méthodes d'analyse, ou des remarques importantes sur les méthodes déjà connues, & on lui doit en grande partie les progrès rapides que le Calcul intégral a faits dans ce siècle. Il sembloit seulement que l'idée de quelque application utile étoit nécessaire pour réveiller son génie qui déployoit alors toute sa finesse, toute sa profondeur & toute sa fécondité.

C'est ainsi que M. d'Alembert s'étoit montré, à trente-deux ans, le digne successeur de Newton, en résolvant le problème de la précession des équinoxes, dont la solution confirme, par une preuve victorieuse, la théorie de la gravitation universelle, en se consacrant comme lui à l'étude des loix mathématiques de la Nature, en créant comme lui une science nouvelle, en inventant aussi un nouveau calcul, mais dont personne n'a contesté la découverte à M. d'Alembert, ou n'a voulu la partager.

Tant qu'il n'a été que Géomètre, à peine étoit-il connu dans sa Patrie; borné à la société de quelques amis, n'ayant jamais vu, parmi les gens en place, que deux Ministres qui, par les agrémens de leur esprit, auroient été des particuliers aimables*; réduit au nécessaire le plus simple, mais heureux du plaisir que donne l'étude & de sa liberté, il avoit conservé sa gaieté naturelle dans toute la naïveté de la jeunesse. Content de son sort, il ne desiroit ni fortune

* M.^{rs} d'Argenson,

ni distinctions , & il n'en avoit point obtenu , parce qu'il est plus commode de les accorder à ceux qui les demandent , qu'à ceux qui savent les mériter. Sa gaieté , des saillies piquantes , le talent de conter & même de jouer ses contes , de la malice dans le ton avec de la bonté dans le caractère , autant de finesse dans la conversation que de simplicité dans la conduite : toutes ces qualités , en le rendant , par leur réunion , à la fois estimable & amusant , le faisoient rechercher dans le monde. On aimoit en lui cette bonhomie , si touchante quand elle se trouve dans les hommes supérieurs , chez qui pourtant elle est bien moins rare que dans ceux qui n'ont que la prétention de l'être.

Cependant un Roi , déjà illustré par cinq victoires , & dont la gloire devoit croître encore , avertit enfin la France qu'elle avoit un Grand-homme de plus ; ses bienfaits vinrent chercher M. d'Alembert , & il y joignit des témoignages d'estime & d'amitié fort au-dessus de ses bienfaits.

Peu de temps après , M. d'Alembert reçut une pension du Gouvernement ; il la devoit à l'amitié de M. le Comte d'Argenson , qui aimoit les gens d'esprit & n'en étoit point jaloux , parce que lui-même avoit beaucoup d'esprit. Cette jalousie est plus commune qu'on ne le croit , & elle a été souvent le motif secret de l'indifférence ou de la haine de quelques Ministres , pour les hommes de génie que le hasard avoit fait naître dans le même pays & dans le même siècle.

La tranquillité de M. d'Alembert fut altérée dès que sa réputation fut plus répandue. Lorsque son goût pour la Littérature & ses méditations sur la Philosophie , étoient un secret connu seulement de ses amis ; borné aux yeux de tous les autres à l'étude des Sciences abstraites , il échappoit à leur jugement ; apprécié par un petit nombre de rivaux ou de disciples , admiré d'eux seuls , sa gloire n'offensoit encore personne.

Mais il s'étoit lié , depuis sa jeunesse , par une amitié

tendre & solide avec un homme d'un esprit étendu, d'une imagination vive & brillante, dont le coup-d'œil vaste embrassoit à la fois les Sciences, les Lettres & les Arts, également passionné pour le vrai & pour le beau, également propre à pénétrer les vérités abstraites de la Philosophie, à discuter avec finesse les principes des Arts, & à peindre leurs effets avec enthousiasme; Philosophe ingénieux & souvent profond, Écrivain à la fois agréable & éloquent, hardi dans son style comme dans ses idées: instruisant ses Lecteurs, mais sur-tout leur inspirant le désir d'apprendre à penser, & faisant toujours aimer la vérité, même lorsqu'entraîné par son imagination, il avoit le malheur de la méconnoître.

Une Traduction de l'Encyclopédie Angloise de Chambers, qui avoit été proposée à M. Diderot, devint entre ses mains l'entreprise la plus grande & la plus utile que l'esprit humain ait jamais formée. Il se proposa de réunir dans un Dictionnaire tout ce qui avoit été découvert dans les Sciences, ce qu'on avoit pu connoître des productions du Globe, les détails des Arts que les hommes ont inventés, les principes de la Morale, ceux de la Politique & de la Législation, les Loix qui gouvernent les Sociétés, la Métaphysique des Langues & les règles de la Grammaire, l'analyse de nos facultés, & jusqu'à l'Histoire de nos opinions. M. d'Alembert fut associé à ce projet, & ce fut alors qu'il donna le Discours préliminaire de l'Encyclopédie.

Il y trace d'abord le développement de l'esprit humain, non tel que l'Histoire des Sciences & celle des Sociétés nous le présentent, mais tel qu'il s'offriroit à un homme qui auroit embrassé tout le système de nos connoissances, & qui réfléchissant sur l'origine & la liaison de ses idées, s'en formeroit un tableau dans l'ordre le plus naturel; il verroit la Morale & la Métaphysique naître de ses observations sur lui-même; la science des Gouvernemens, & celle des Loix, de ses observations sur la Société.

Excité

Excité par ses besoins , il voudroit acquérir la connoissance des productions de la Nature , & celle des moyens de les multiplier & de les employer. Le desir de soulager les maux lui feroit inventer toutes les Sciences sur lesquelles la Médecine s'appuie , & dont le but est de perfectionner ou de rendre plus sûr l'Art de guérir ; l'envie naturelle de connoître les propriétés les plus générales des corps , le conduiroit aux vérités de la Chimie & de la Physique. Bientôt dépouillant successivement ces corps de toutes leurs qualités , pour ne conserver que le nombre & l'étendue , il formeroit toutes les Sciences Mathématiques , il détermineroit ensuite pour chaque Science l'objet qu'elle doit se proposer , la méthode qu'elle doit suivre , le degré de certitude auquel elle peut atteindre. Forcé de les séparer pour en pouvoir saisir & embrasser chaque partie , il observeroit encore les liens imperceptibles qui les unissent , les secours qu'elles peuvent se prêter , & leur influence réciproque.

La suite de ce Discours contient un tableau précis de la marche des Sciences depuis leur renouvellement , de leurs richesses à l'époque où M. d'Alembert en traçoit l'Histoire , & des progrès qu'elles devoient espérer encore ; les grands Hommes des siècles passés y sont jugés par un de leurs égaux ; les Sciences , par un homme qui les avoit enrichies de grandes découvertes : & la réunion d'une vaste étendue de connoissances , cette manière d'envisager les Sciences qui n'appartient qu'à un homme de génie , un style clair , noble , énergique , ayant toute la sévérité qu'exige le sujet , & tout le piquant qu'il permet , ont mis le Discours préliminaire de l'Encyclopédie au nombre de ces Ouvrages précieux que deux ou trois hommes tout au plus dans chaque siècle sont en état d'exécuter.

Dès le moment où M. d'Alembert fut connu pour mériter une place distinguée parmi les Philosophes & les Écrivains , il eut , & il mérita toujours depuis d'avoir les ennemis que les succès dans les Lettres & dans la Philosophie ne manquent jamais d'attirer , c'est-à-dire , la foule

de ceux pour qui la Littérature est un métier, & la classe plus nombreuse encore de ces hommes aux yeux de qui la vérité ne paroît qu'une innovation dangereuse.

Il publia, peu de temps après, des *Mélanges de Philosophie, d'Histoire & de Littérature*, qui augmentèrent le nombre de ses détracteurs. Les *Mémoires de Christine* montrèrent qu'il connoissoit les droits des hommes, & qu'il avoit le courage de les réclamer.

L'Essai sur la société des Gens de Lettres avec les Grands, déplut à ceux des Littérateurs qui trouvoient dans cette Société une utilité réelle ou l'aliment d'une vaine gloire, & qui furent blessés de voir exposer aux yeux du Public la honte des fers qu'ils n'osoient rompre ou qu'ils ambitionnoient de porter. On ne peut mieux juger cet Essai, qu'en rapportant la réponse d'une femme de la Cour à des hommes qui reprochoient à M. d'Alembert d'avoir exagéré le despotisme des Grands & l'asservissement qu'ils exigent : *S'il m'avoit consultée, je lui en aurois appris bien davantage.*

Peut-être devons-nous en partie à cet Ouvrage le changement qui s'est fait dans la conduite des Gens de Lettres, & qui remonte vers la même époque ; ils ont senti enfin que toute dépendance personnelle d'un Mécène leur ôtoit le plus beau de leurs avantages, la liberté de faire connoître aux autres la vérité lorsqu'ils l'ont trouvée, & d'exposer dans leurs Ouvrages, non les prestiges de l'art d'écrire, mais le tableau de leur ame & de leurs pensées : ils ont renoncé à ces *Épîtres Dédicatoires* qui avilissoient l'Auteur, même lorsque l'Ouvrage pouvoit inspirer l'estime ou le respect ; ils ne se permettent plus ces flatteries, toujours d'autant plus exagérées, qu'ils méprisoient davantage au fond du cœur l'homme puissant dont ils mendoient la protection ; & par une révolution heureuse, la bassesse est devenue un ridicule que très-peu d'Hommes de Lettres ont eu le courage de braver.

M. d'Alembert joignit à ces Ouvrages philosophiques

la traduction de quelques morceaux choisis de Tacite; c'étoit s'exposer aux coups d'une classe d'hommes qui n'auroient pu l'atteindre, s'il fût resté dans la région où il s'étoit placé à côté de Newton: mais il sortit victorieux de ce combat, du moins au jugement des Philosophes & des gens du monde; & on convint qu'il n'y avoit personne qui, par son genre d'esprit & la précision de son style, fût plus en état d'entendre Tacite, & plus digne de le traduire.

Les occupations littéraires de M. d'Alembert ne lui avoient point fait négliger les Mathématiques; une foule d'articles insérés dans l'Encyclopédie, montrent, dans une exposition en apparence élémentaire, & le génie d'un Géomètre, & le coup-d'œil d'un Philosophe.

C'est dans le même espace de temps qu'il composa ses Recherches sur différens points importans du Systême du Monde; il y perfectionna sa solution du problème des perturbations des Planètes, déjà connue depuis plusieurs années de l'Académie & des Savans. Deux Géomètres en partageoient la gloire avec lui; tous trois, à peu-près dans le même-temps, donnoient une solution de ce problème; le fond de leur méthode étoit le même: tous trois avoient trouvé, par un premier calcul, que le mouvement de l'apogée de la Lune, n'étoit que la moitié de ce qu'il est réellement; tous trois, en calculant un terme de plus, avoient reconnu la conformité des résultats du calcul & de l'observation.

Cette concurrence qui subsista également dans l'application de la même méthode aux mouvemens des Comètes, produisit une longue discussion entre M. d'Alembert & M. Clairaut, car M. Euler resta simple spectateur. Lorsqu'on examine les disputes de ce genre, long-temps après le moment où elles se sont élevées, lorsque le temps a calmé les premiers mouvemens de l'amour-propre, lorsque l'amitié même, dont le zèle est quelquefois plus durable, peut considérer de sang-froid les objets de la discussion, souvent on s'étonne de l'importance qu'on y avoit attachée.

On pourroit demander ici pourquoi M. d'Alembert n'imita point la tranquillité de M. Euler; & comment, lorsque le mérite d'avoir résolu le problème, ne lui étoit point contesté, lorsqu'il ne partageoit avec personne, ni la gloire d'avoir découvert un principe fondamental de la Mécanique, & de l'avoir appliqué, soit à la théorie des fluides, soit au mouvement des corps finis, ni celle d'avoir inventé un nouveau calcul, il pouvoit mettre tant de prix à la part plus ou moins grande qu'il devoit obtenir dans l'honneur de la solution d'un problème moins difficile? Mais il est un effort presque impossible à notre foiblesse, celui de supporter tranquillement l'injustice; peut-être le sentiment de nos forces, qui fait souffrir tant de maux avec constance, est-il plus propre à fortifier qu'à détruire ce mouvement de la Nature indignée, qu'il ne faut pas confondre avec la vanité ou avec la jalousie.

M. d'Alembert éprouvoit alors les effets de cette injustice; depuis qu'il s'étoit placé parmi les gens de Lettres du premier ordre, on s'étoit rendu plus difficile sur sa réputation comme Géomètre. Le Public, qui laisse assez paisiblement les Mathématiciens (dont il ne connoît que les noms) régler les rangs entre eux, & se distribuer la gloire à leur gré, n'eut pas la même indulgence pour un Géomètre Littérateur & Philosophe; quelques Savans profitèrent de cette disposition générale, ils essayèrent modestement de faire croire qu'ils étoient au moins ses égaux; & souvent des Étrangers, qui n'avoient pas le même intérêt de déprimer sa réputation, ont été frappés de la contradiction qu'ils observoient entre l'opinion des Sociétés de Paris & le jugement de l'Europe. M. d'Alembert crut voir la suite de la même injustice dans la manière dont sa solution du problème des trois corps étoit appréciée par quelques personnes (ce n'étoient pas celles qui l'avoient résolu ou qui auroient pu le résoudre), & il défendit avec chaleur des droits qu'il eût abandonnés même par amour-propre, si on avoit été juste envers lui.

Dans ses recherches sur le Système du Monde, M. d'Alembert examina la question de la figure de la Terre; Newton doit être regardé comme celui qui l'a traitée le premier, car Huygens avoit seulement démêlé l'influence que le changement de la force centrifuge aux différentes latitudes devoit avoir sur la force de gravité, mais sans avoir bien connu la vraie direction & la véritable loi de la pesanteur. Newton résolut le problème, en regardant la Terre comme un solide homogène de révolution. M. Clairaut en donna la solution dans l'hypothèse d'une densité variable, mais la même dans chaque couche concentrique, & en supposant par conséquent que la force de la pesanteur est toujours perpendiculaire à la surface. Ces suppositions, quelques naturelles qu'elles paroissent, sont un peu arbitraires, & M. d'Alembert traita le problème d'une manière plus générale & plus rigoureuse, en supposant seulement la figure peu différente d'une sphère, & la densité assujettie à une loi quelconque.

On sait que dans ces questions, l'on suppose à la Terre une figure telle que, si elle étoit fluide, ses parties resteroient en équilibre, & qu'elle conserveroit la même figure, sans aucun autre changement que les oscillations produites dans la masse fluide par l'action des corps célestes; cette supposition fit découvrir à M. d'Alembert, qu'il existoit pour les fluides deux états d'équilibre, l'un fixe, auquel la masse reviendrait après avoir éprouvé un petit dérangement; & l'autre non-fixe, qu'un léger mouvement suffit pour détruire sans retour; observation qui, s'étendant à toutes les espèces de corps, est très-importante dans l'application des principes de la Mécanique aux phénomènes de la Nature.

Telles avoient été les découvertes de M. d'Alembert, lorsqu'en 1756, l'Académie lui donna le titre de Pensionnaire surnuméraire; cette distinction, accordée à son génie & à ses Ouvrages, prouve que les Compagnies sçavantes ont quelquefois assez d'équité, ou entendent assez bien les intérêts de leur gloire, pour honorer dans un

de leurs Membres un mérite & des talens supérieurs; si leur justice est plus lente, elle est aussi plus éclairée que celle des particuliers. Quelques Académiciens animés d'un zèle sans doute respectable par ses motifs, s'opposoient à cette violation de l'usage; ils alléguoient les inconvéniens de l'exemple: *Eh bien*, leur répondit M. Camus, *si un autre prétend à la même distinction, & qu'il ait autant de titres, il faudra bien l'accorder encore.*

En 1759, M. d'Alembert publia ses *Éléments de Philosophie*.

Il y développe les premiers principes & la véritable méthode des différentes Sciences; il montre les écueils qu'on doit éviter dans chacune, quand on ne veut pas risquer de s'égarer: il est peu de Livres qui, dans un si petit espace, renferment plus de vérités; & l'Auteur, par la clarté avec laquelle il les analyse, par la propriété des expressions & la précision de son style, a su rendre ces vérités usuelles & accessibles aux Lecteurs les moins familiarisés avec les idées abstraites. En retranchant un petit nombre de pages, où il est aisé de reconnoître les sacrifices que des convenances du moment ont exigés, cet Ouvrage mérite d'entrer dans l'éducation de tous les hommes qui cherchent à s'instruire; parce qu'il est également propre à donner des idées justes sur tous les objets de nos connoissances à ceux qui ne veulent en approfondir aucun, & à préserver les Savans des préjugés que l'étude à laquelle ils se livrent pourroit leur donner. On sait que chaque Science a les siens, dont l'étendue des connoissances ou le génie ne sauroient nous garantir, qui nuisent au progrès de la Science même, & dont la Philosophie est le seul préservatif.

On trouve dans ces *Éléments* la solution d'une question importante, déjà discutée dans la Préface du *Traité de Dynamique*. Les Philosophes dispuoient encore pour savoir si les loix du mouvement sont d'une vérité nécessaire ou contingente; c'est-à-dire, si elles sont les unes des vérités de définition, les autres des conséquences absolues

de l'étendue & de l'impénétrabilité des corps, ou bien si ces loix sont l'effet d'une volonté libre, qui les a établies pour conserver l'ordre de l'Univers: M. d'Alembert résolut la question, & montra que ces loix sont nécessaires; la découverte de son principe lui donna les preuves de cette vérité, & on peut regarder cette partie de son Ouvrage comme une découverte en Métaphysique, celle de toutes les Sciences où jusqu'ici il a été le plus rare d'en faire de vraiment dignes de ce nom.

M. d'Alembert établit pour principe de morale l'obligation de ne pas regarder comme légitime l'usage de son superflu lorsque d'autres hommes sont privés du nécessaire; & de ne disposer pour soi-même que de la portion de sa fortune, qui est formée non aux dépens du nécessaire des autres, mais par la réunion d'une partie de leur superflu.

Il fait sentir dans ce même Ouvrage l'utilité d'Éléments de Morale mis à la portée de tous les hommes, où les règles du devoir seroient établies par la raison, & les motifs de le remplir fondés sur la Nature & sur la vérité. Plus d'une fois il fut tenté d'entreprendre ces Éléments; une seule raison l'en empêcha; il en avoit formé le plan, & ce plan l'avoit conduit à une question importante pour laquelle il n'avoit pas trouvé de solution. L'Ouvrage auroit été incomplet, & auroit perdu une grande partie de son utilité, si cette question n'y avoit pas été résolue; il pensoit d'ailleurs que, tant qu'elle restoit indécise, il n'étoit ni juste ni prudent de rendre publiques les difficultés qu'elle présentait, & nous croyons devoir imiter ici sa discrétion.

Le Roi de Prusse lut ces Éléments de Philosophie, & montra combien il les estimoit, en proposant à l'Auteur des difficultés sur lesquelles il lui demanda des éclaircissements; ils ont été imprimés depuis, mais non absolument tels qu'ils avoient été envoyés au Roi: on pouvoit dire à ce Prince des vérités que des particuliers, revêtus ailleurs d'une autorité précaire, auroient craint d'entendre; & il falloit développer aux hommes ordinaires ce qu'il suffisoit d'indiquer à ce Monarque.

Qu'il me soit permis de tracer ici, d'après les conversations, comme d'après les Ouvrages de M d'Alembert, un tableau foible, mais fidèle, des principes de sa Philosophie, & de discuter même quelques-uns des reproches qu'on a pu lui faire sur ses opinions; l'amitié ne me fera point altérer la vérité, elle a aussi son orgueil, & je croirois l'offenser si je paroïssois craindre que M. d'Alembert ne fût pas assez Grand pour que ses amis même pussent avouer ses défauts.

Long-temps occupé de Sciences Mathématiques, M. d'Alembert avoit contracté l'habitude de n'être frappé que des vérités susceptibles de preuves rigoureuses; il voyoit la certitude s'éloigner, à mesure que l'on ajoutoit des idées accessoires aux idées simples, sur lesquelles s'exercent la Géométrie pure & la Mécanique rationnelle; & son goût pour les Sciences, sembloit suivre absolument la même proportion. Il vouloit que les Sciences physiques se bornassent à des faits & à des explications calculées; que pour juger de la réalité d'un phénomène, on vérifiât le fait en lui-même, au lieu de le rejeter d'après une impossibilité apparente; qu'on ne dît pas d'une chose qui blesse les idées communes, elle est absurde, mais elle n'est pas prouvée. On l'accusoit de faire peu de cas des Sciences Physiques, & cette accusation étoit injuste; il ne méprisoit que ces systèmes dont les preuves se réduisent à montrer que l'impossibilité absolue n'en est pas encore rigoureusement démontrée; ces aperçus incertains, qu'on annonce pour de grandes vues; ces explications appuyées sur des raisonnemens vagues, qui pourroient tout au plus conduire à de légères probabilités, enfin cet abus du langage scientifique, qui change quelquefois en une Science de mots, ce qui ne devrait être qu'une Science de faits & de calculs. On pourroit croire seulement qu'il a poussé trop loin sa rigueur; car si ces hypothèses, ces vues, ces explications ne forment point une véritable Science, elles servent à multiplier les expériences, les observations, à les montrer sous leurs différentes faces; elles nous guident

dans

dans nos recherches, elles préparent les découvertes, & semblent être l'aurore du jour dont peuvent espérer de jouir les Siècles qui nous suivront.

M. d'Alembert réduisoit à un petit nombre de vérités générales, de premiers principes, le peu que nous pouvons savoir certainement sur la Métaphysique, sur la Morale, sur les Sciences politiques; peut-être donnoit-il à l'esprit humain des limites trop étroites, peut-être qu'accoutumé à des vérités démontrées & formées d'idées simples & déterminées avec précision, il n'étoit pas assez frappé des vérités d'un autre ordre, qui ont pour objet des idées plus compliquées, & dans la discussion desquelles il faut même se faire des définitions, & pour ainsi dire, des idées nouvelles, parce que les mots employés dans ces Sciences, tirés de la Langue vulgaire, & employés dans le langage commun, n'ont qu'un sens vague & indéterminé. Peut-être paroissoit-il n'avoir pas assez senti que, dans des Sciences dont le but est d'enseigner comment on doit agir, l'homme peut, comme dans la conduite de la vie, se contenter de probabilités plus ou moins fortes, & qu'alors la véritable méthode consiste moins à chercher des vérités rigoureusement prouvées, qu'à choisir entre des propositions probables, & sur-tout à savoir évaluer leur degré de probabilité.

L'opinion de M. d'Alembert a le danger de trop resserrer le champ où l'esprit humain peut s'exercer, de rendre l'ignorance présomptueuse, en lui montrant ce qu'elle ne connoît pas comme impossible à connoître; enfin, de livrer au doute, à l'incertitude, & par conséquent à des principes vagues & arbitraires, des questions importantes au bonheur de l'humanité; inconvénient d'autant plus grand, que bien des hommes sont intéressés à faire croire que ces questions ne peuvent avoir de principes fixes, pour se réserver le droit de les décider suivant leurs vues personnelles ou leur caprice.

Mais ce danger est peut-être moindre que celui d'une Philosophie plus tranchante, qui érigeroit en vérités certaines,

ses opinions & ses préjugés: Après tout, ceux qu'on refuse de croire n'ont pas à se plaindre lorsqu'on se borne à être difficile sur les preuves; & quand on est bien sûr d'avoir trouvé la vérité, on ne peut se fâcher contre ceux qui nous disent: *prouvez; & nous vous croirons*,

Aussi le tort de M. d'Alembert se réduit-il à n'avoir pas voulu quelquefois examiner ces preuves qu'on lui disoit certaines, ou approfondir ces questions qu'il regardoit comme insolubles; & ce tort est bien léger, si l'on songe combien de fois il avoit été trompé par de fausses promesses.

Les Philosophes qui, sur les opinions spéculatives, se renferment dans le doute presque absolu, ont, par une conséquence nécessaire, des opinions pratiques très-modérées.

M. d'Alembert croyoit, comme Fontenelle, que l'homme sage n'est pas obligé de sacrifier son repos à l'espérance incertaine d'être utile, qu'il doit la vérité aux hommes, mais avec les ménagemens nécessaires pour ne point avertir ceux qu'elle blesse de se soulever & de se réunir contre elle; que souvent, au lieu d'attaquer de front des préjugés dangereux, il vaut mieux élever à côté d'eux les vérités, dont la fausseté de ces opinions est une conséquence facile à déduire; qu'au lieu de porter à l'erreur des coups directs, il suffit d'accoutumer peu-à-peu les hommes à raisonner juste, afin qu'après en avoir pris l'heureuse habitude, ils puissent avoir eux-mêmes le plaisir & la gloire de rompre les chaînes dont leur raison étoit opprimée, & de briser les idoles devant lesquelles ils étoient lassés de fléchir.

Il regardoit l'amour de l'occupation, le goût du repos, celui de la vie privée, comme les barrières les plus sûres qu'on pût opposer aux vices; il craignoit que ceux qui aspirent à des vertus plus éclatantes ne se trompassent eux-mêmes, ou ne cherchassent à tromper les autres, & que l'amour trop inquiet du bien public, ne fût souvent une ambition déguisée. Il étoit indulgent par philosophie comme par caractère, persuadé qu'il faut exiger peu des hommes, pour être plus sûr d'en obtenir ce qu'on exige, leur prescrire

seulement ce qu'on leur a montré , par son exemple , n'être pas au-dessus des forces humaines , & ne pas mettre l'estime publique, la satisfaction intérieure, à trop haut prix, de peur que la plupart des hommes n'aiment mieux y renoncer que d'y prétendre.

Dans les différens travaux de l'esprit, il proscrivoit avec sévérité tout ce qui ne tendoit pas à la découverte de vérités positives , tout ce qui n'étoit pas d'une utilité immédiate. Un motif très-respectable , l'amour du vrai & celui du bien général, lui avoit fait même exagérer un peu cette sévérité: en effet, il n'existe pas d'étude où l'on ne trouve du moins l'avantage d'employer le temps d'une manière qui n'est ni dangereuse pour soi, ni nuisible pour les autres: il en est du travail de l'esprit comme de l'exercice, celui même qui n'a pas d'objet, contribue à la santé, fortifie le corps; il n'emploie pas nos forces, mais il nous apprend à les employer: des vérités isolées peuvent être indifférentes, mais aucun système, aucun ordre de vérités ne peuvent l'être; il n'en est point dont une main sage & industrieuse ne sache tirer quelque jour une utilité réelle.

M. d'Alembert avoit appliqué l'esprit de raisonnement & de discussion à la Littérature & aux principes du goût; avec une philosophie plus profonde que Fontenelle & la Motte, il avoit marché sur leurs traces, en évitant les erreurs où l'amour du paradoxe & l'esprit de parti avoient pu les entraîner: il ne croyoit pas qu'il y eût en Littérature des loix générales fondées sur la raison. Écrire simplement, & sur-tout avec clarté; n'employer que des mots dont le sens soit précis, ou du moins déterminé par l'usage qu'on en fait; éviter ce qui offense l'oreille, ce qui choque les convenances, le simple bon sens a dicté ces règles, & il n'en vouloit point d'autres; *l'art d'écrire, disoit-il, n'est que l'art de penser, & celui de l'éloquence n'est que le don de réunir une logique exacte & une ame passionnée.* Quant à la poésie, dont le but principal est de plaire, M. d'Alembert ajoutoit seulement à ces règles la nécessité de se soumettre

aux loix de convention établies; il faut craindre de blesser les hommes dont on veut captiver les suffrages, & l'on doit respecter alors les jugemens de leurs préjugés, presque autant que ceux de leur raison. Ces opinions furent combattues par beaucoup de Littérateurs, qui apparemment croyoient qu'ils auroient trop à perdre si l'on vouloit borner leur mérite à celui de leurs idées. Les Poètes sur-tout furent indignés d'être jugés par un Géomètre. La sécheresse des Mathématiques leur sembloit devoir éteindre l'imagination, & ils ignoroient sans doute qu'Archimède & Euler en ont mis autant dans leurs Ouvrages, qu'Homère ou l'Arioste en ont montré dans leurs Poësies.

Cependant M. d'Alembert avoit aussi fait des vers, mais en petit nombre : il réussissoit sur-tout dans ceux qui, placés au bas d'un portrait, doivent renfermer en peu de mots une pensée vraie, fine ou profonde, exprimée d'une manière forte ou piquante, & rendre, par un petit nombre de traits, le caractère, les talens, les vertus d'un homme célèbre.

Il n'avoit pas prononcé, à beaucoup près, toutes ses opinions littéraires & philosophiques : ce qu'il en avoit laissé pénétrer lui avoit suscité assez de haines; aussi proposoit-il que chaque homme de Lettres, pour concilier les intérêts de la vérité ou ceux de son repos, déposât dans une espèce de testament littéraire ses opinions bien entières, bien dégagées de toutes restrictions. Il ne faut pas croire qu'il entendît par-là certaines doctrines hardies, déjà si clairement énoncées dans un grand nombre de livres : mais il existe en Littérature, en Philosophie, en Morale, beaucoup d'opinions très-vraies, qu'on n'ose avouer, non qu'elles exposent à quelque danger réel celui qui les soutiendrait, mais parce qu'elles blessent l'opinion commune de la Société, dont il faut ménager les erreurs générales, si l'on ne veut pas renoncer aux agrémens qu'elle procure. Cette condescendance presque nécessaire, perpétue une foule de petits préjugés, la plupart peu importans s'ils étoient seuls, mais qui, réunis ensemble, forment un grand obstacle aux

progrès de la vérité , & entretiennent l'habitude de penser & de juger d'après autrui.

Nous devons regretter que M. d'Alembert n'ait pas exécuté ce projet ; peu d'hommes auroient pu faire un Ouvrage meilleur & plus étendu ; il en est peu qui aient conservé moins de préjugés. Malheureusement la plupart de ceux qui se vantent de n'en plus avoir , en ont seulement abandonné un ou deux des plus grossiers , & tiennent d'autant plus fortement à ceux qui leur restent , qu'ils s'enorgueillissent davantage de la victoire qu'ils ont remportée sur les autres. Combien d'hommes croient dans ce Siècle à la Philosophie , comme leurs pères ont cru à l'Astrologie judiciaire ! & souvent une chimère nouvelle n'a pas d'enthousiastes plus zélés que les fougueux adversaires des vieux préjugés.

Sage sans être timide , alliant la prudence & l'amour de la vérité , M. d'Alembert sembloit pouvoir espérer que son repos ne seroit pas troublé. L'Encyclopédie en fut l'écueil : un seul article de ce Dictionnaire (l'article *Genève*) lui suscita deux disputes très-vives. Cette ville , que Calvin & Beze avoient rendue célèbre dans le seizième Siècle , étoit devenue une seconde fois , par le séjour de M. de Voltaire , l'objet de l'attention de l'Europe. M. d'Alembert avoit fait l'éloge de la Constitution que Genève avoit alors , de la douceur de ses Loix , de l'équité de ses Magistrats , de l'esprit philosophique qui s'étoit répandu même parmi le peuple ; mais il montrait quelques doutes sur l'orthodoxie de ses Pasteurs , & regrettoit que la proscription prononcée par Calvin contre les Spectacles , fût encore respectée.

Il étoit en effet singulier que les Pasteurs Gênois ou leurs Protecteurs prétendissent au droit d'empêcher des Citoyens libres de se livrer à un amusement qui n'a rien de contraire aux droits des autres hommes. Cette liberté étoit le seul objet de la réclamation de M. d'Alembert ; il ne proposoit point de sacrifier une partie du trésor public pour dissiper l'ennui qui poursuit les gens oisifs , & de faire payer par une Nation libre les plaisirs de ses chefs ; mais il croyoit que , puisque les hommes ont besoin d'amu-

fement, un plaisir dont le goût, même excessif, n'expose point au risque de perdre ou sa fortune, ou son temps, ou sa santé; un plaisir qui exerce l'esprit, donne le goût de la Littérature, & peut, s'il est bien dirigé, inspirer des vertus, ou détruire des préjugés, devoit mériter quelque indulgence, ou même quelque encouragement. M. Rousseau combattit l'opinion de M. d'Alembert avec beaucoup d'éloquence & de chaleur; cet Écrit contre les Théâtres, composé par un Auteur qui avoit fait une Comédie & un Opéra, eut en France un succès prodigieux, sur-tout parmi les gens du monde qui fréquentent le plus les Spectacles: il sembloit que pour y aller avec plus de plaisir, ils avoient attendu à être bien sûrs de ne pouvoir en retirer aucune utilité réelle. M. d'Alembert répondit à la Lettre de M. Rousseau, & nous avouons sans peine que sa réponse eut moins de succès; c'est, dans toute dispute, le sort des Ouvrages dont l'Auteur, sachant éviter les deux extrêmes, garde ce juste milieu où se plaît la vérité. Les ennemis de M. d'Alembert espérèrent un moment que sa querelle avec les Pasteurs Génevois laisseroit quelques doutes sur la pureté de sa conduite, mais ils virent bientôt que cette espérance n'étoit pas fondée, & la dispute fut oubliée.

Pendant que les Éditeurs de l'Encyclopédie s'occupaient à rendre ce Livre plus digne de son succès; que les défauts qu'on avoit reprochés aux premiers volumes, s'effaçoient de plus en plus; que les hommes les plus éclairés s'empressoient d'y contribuer, ce même Ouvrage essuyoit une sorte de persécution. Les deux partis qui avoient long-temps partagé l'Église de France, étoient alors dans le moment où la chute de l'un d'eux, devenue inévitable, alloit entraîner l'autre avec lui: l'Encyclopédie gardoit entr'eux une neutralité absolue, & tous deux se réunirent contre elle; des Libelles enfantés par des Écrivains incapables de l'entendre ou d'en profiter, persuadèrent à des hommes puissans, que ce Livre pouvoit être dangereux pour la Nation, ou du moins pour eux-mêmes. L'accusation d'impiété avoit cessé d'être effrayante, à force d'avoir été

prodiguée ; on fit du mot d'*Encyclopédiste* & de *Philosophe*, le nom d'une secte à laquelle on imputa le projet de détruire la Morale & d'ébranler les fondemens de la paix publique ; tous ceux qu'on marquoit de ces noms, devoient être nécessairement de mauvais Citoyens, parce qu'alors la France étoit ennemie d'un Roi Philosophe, qui, juste appréciateur du mérite, avoit donné des témoignages publics d'estime à quelques-uns des Auteurs de l'*Encyclopédie*.

Cette guerre littéraire (qui eut l'honneur de faire quelquefois oublier aux oisifs de Paris les malheurs d'une guerre plus importante) compromettoit le repos de M. d'Alembert, & réunissoit aux ennemis méprisables que son génie lui avoit faits, d'autres ennemis dont il ne pouvoit du moins mépriser le pouvoir. Le Roi de Prusse lui offrit, après la paix de 1763, un asile dans sa Cour, la place de Président de son Académie, une fortune fort au-dessus de ses desirs, mais que le plaisir qu'il goûtoit à faire le bien, pouvoit rendre séduisante, enfin le repos & la liberté : M. d'Alembert refusa ces offres, il préféra sa Patrie, où il étoit pauvre & persécuté, à la Cour d'un Roi qui, dépouillé de l'éclat du trône, eût encore mérité qu'un homme de génie recherchât sa société & son suffrage, & ce sacrifice lui coûta peu ; ses amis, la liberté de suivre ses recherches mathématiques suffisoient à son bonheur, & il attendit tranquillement que le temps de l'injustice fût passé.

Ce Monarque, qu'il avoit vu à Clèves avant la guerre, & qui alors lui avoit proposé la survivance de M. de Maupertuis, ne fut point blessé de ce nouveau refus, & voulut que la place de Président de son Académie restât vacante, tant que l'homme qu'il en avoit jugé digne pourroit l'occuper ; M. d'Alembert crut lui devoir l'hommage de sa reconnoissance, & après l'avoir été trouver dans ses États de Westphalie, il le suivit à Berlin, où il passa plusieurs mois. On vit un Philosophe paisible, appelé sans aucun titre dans une Cour guerrière, & admis dans la familiarité d'un Roi qui, après avoir résisté à une

ligue formidable, venoit de couronner ses victoires par une paix glorieuse. Aucun Capitaine de son Siècle n'avoit gagné tant de batailles; & lui seul avoit enrichi par des découvertes cet Art destructeur de la guerre, dont les progrès sont pourtant le seul moyen de faire jouir les Peuples d'une paix presque perpétuelle; car telle est la nature de l'homme que sa fureur pour les jeux de toute espèce diminue à mesure que l'on y affoiblit l'influence du hasard. Cependant ce Prince n'étoit enivré ni de ses triomphes, ni du bruit de sa renommée, il se plaisoit à cultiver, dans la paix, la Philosophie & les Arts; parlant avec simplicité de ses succès, de ses revers, de ses dangers, de ses ressources, & même de ses fautes, il comparoit la gloire d'avoir fait Athalie à celle de ses victoires, en observant que le Poète ne devoit rien au sort ni à d'autres qu'à lui-même; & vivoit avec le Philosophe François dans cette égalité qui, malgré la différence des rangs, s'établit nécessairement entre les hommes de génie.

M. d'Alembert avoit refusé, peu de temps auparavant, une offre plus brillante; l'Impératrice de Russie lui avoit proposé de le charger de l'éducation de son fils, & de l'en charger seul; les titres, les récompenses, tous les avantages qui eussent flatté ou séduit un homme ordinaire, étoient prodigués. La gloire d'élever l'héritier d'un grand Empire, eût pu éblouir un homme d'un esprit supérieur; & l'espérance de contribuer au bonheur de cent Peuples réunis sous les mêmes Loix, pouvoit toucher un Philosophe; M. d'Alembert ne fût point ébranlé, il crut qu'il ne devoit pas à une Nation étrangère le sacrifice de son repos; que si ses talens pouvoient être utiles, ils appartenoient à sa Patrie; & qu'une Cour orageuse, où, dans l'espace de vingt ans, deux révolutions avoient renversé le trône, & où le changement du Ministère avoit été souvent aussi funeste qu'une révolution, ne devoit pas être le séjour d'un Philosophe qui étoit bien sûr de n'avoir aucun des talens nécessaires pour s'y conduire.

Il refusa donc cet honneur, comme il l'auroit accepté, sans orgueil & sans ostentation; cependant ces offres lui furent utiles, elles servirent à faire mieux connoître à la Nation Françoisë la valeur de ce qu'elle possédoit; & la jalousie littéraire, la haine des partis furent envenimées, mais subjuguées par la force de l'opinion publique.

En 1765, M. d'Alembert donna son Ouvrage sur la destruction des Jésuites; l'abolition de cet Ordre lui parut un évènement assez important dans l'Histoire des opinions humaines, pour mériter qu'il en traçât les détails, & cette Histoire fut impartiale; aussi ne manqua-t-elle pas d'augmenter la haine que les deux partis avoient contre lui: cette haine se signala par des Libelles dont les Auteurs ne prouvoient qu'une seule chose, c'est que M. d'Alembert avoit eu raison dans ce qu'il avoit dit de leur parti; ils répondoient à l'accusation d'être fanatiques, en laissant échapper naïvement les traits du fanatisme le plus emporté & le plus stupide, & M. d'Alembert ne crut pas devoir répondre à des Adversaires qui savoient si bien défendre sa cause.

Après avoir donné ses *Recherches sur le Système du Monde*, il n'entreprit plus de grands Ouvrages Mathématiques; mais il publia dans les Recueils des Académies dont il étoit Membre, & dans neuf volumes d'Opuscules, un nombre très-grand de Mémoires; on y trouve l'application de ses principes & de ses méthodes au problème de la libration de la Lune, à ceux de la précession des Équinoxes, & de la nutation de l'axe de la Terre dans l'hypothèse de la dissimilitude des méridiens, aux loix générales du mouvement de rotation, à celles des oscillations des corps plongés dans les fluides; il y perfectionne la théorie des fluides, & la solution du problème des trois corps; il y étend ses méthodes de calcul: mais nous devons nous arrêter ici seulement aux objets entièrement nouveaux, qui ont été alors le sujet de ses méditations.

Les Mathématiques offrent souvent des questions où les

résultats des calculs présentent des difficultés que le calcul ne peut résoudre seul ; il faut qu'il emploie le secours quelquefois dangereux de la Métaphysique ; ce n'est plus seulement du génie de la Géométrie que dépend la solution des difficultés, mais de la finesse, de la justesse naturelle de l'esprit. M. d'Alembert a discuté, dans ses Opuscules, quelques-unes de ces questions.

Telle fut celle de la nature des logarithmes des quantités négatives ; Léibnitz & Jean Bernoulli l'avoient agitée , M.^{rs} Euler & d'Alembert la renouvelèrent : le premier soutint l'avis de Léibnitz, le second celui de Bernoulli ; ils se servirent de toutes les raisons que les nouvelles vérités découvertes dans l'Analyse, pouvoient leur offrir ; avec un génie égal à celui des deux premiers combattans, ils employèrent des armes plus fortes ; cependant la victoire resta encore incise, & l'on peut juger de la difficulté d'une question dont de tels hommes n'ont pu dissiper tous les nuages.

M. d'Alembert eut une autre discussion du même genre avec M.^{rs} de la Grange & Euler , sur la discontinuité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, question plus importante, & sur laquelle leurs Ouvrages ont répandu plus de lumière.

Les premiers principes du mouvement, comme la loi du levier, celle de la décomposition des forces, paroissent d'une vérité si naturelle, si palpable, qu'il faut déjà de la sagacité pour sentir qu'elles ont besoin d'être prouvées, & que la démonstration rigoureuse en est difficile ; M. d'Alembert l'a cherchée avec succès dans la théorie générale des fonctions analytiques : c'est sans doute un spectacle bien intéressant pour les Philosophes, de voir, dans les objets soumis au calcul, des questions très-compiquées, résolues avec facilité & d'un trait de plume ; tandis que les vérités, en apparence les plus simples, exigent un appareil singulier de preuves établies sur des théories savantes dont on n'avoit pas encore la première idée, long-temps après que ces vérités, déjà découvertes & admises par tous les Savans, étoient devenues d'un usage universel & commun.

C'est dans les Opuscules mathématiques de M. d'Alembert, que l'on trouve & ses travaux sur la théorie des lunettes acromatiques & ses recherches sur plusieurs points d'Optique; il y demontre la fausseté de l'hypothèse où l'on ne suppose dans la lumière solaire que sept rayons différemment réfrangibles, quoique le spectre allongé par le prisme, reste continu; il y remarque que nous rapportons les objets, non à leur vraie direction, mais à celle du rayon qui, perpendiculaire au fond de l'œil, exerce sur cet organe une force plus grande.

Le calcul des probabilités occupe une partie importante de ces Opuscules; & si ce calcul s'appuie un jour sur des bases plus certaines, c'est à M. d'Alembert que nous en aurons l'obligation.

Il expose dans ses recherches, comment, si de deux évènements contraires l'un est arrivé un certain nombre de fois de suite, on peut, en cherchant la probabilité que l'un de ces deux évènements arrivera plutôt que l'autre, ou la trouver égale pour les deux évènements, ou la supposer plus grande, soit en faveur de celui qu'on a déjà obtenu, soit en faveur de l'évènement contraire: il fait voir que ces conclusions opposées entr'elles, sont la conséquence de trois méthodes de raisonner, qui paroissent également justes, également naturelles.

Il examine la règle qui prescrit de faire les avantages en raison inverse des probabilités, & montre combien, dans une foule d'exemples, les conclusions déduites de ce principe, semblent en contradiction avec celles où le simple bon sens auroit conduit; il prouve que les moyens employés par plusieurs Géomètres, pour détruire cette contradiction, ont été insuffisans; lui-même en propose de nouveaux, mais il a soin d'en remarquer également les difficultés & les exceptions.

Dans l'application de ce calcul à l'inoculation, M. d'Alembert fait sentir que, s'il est facile de prouver combien cette opération est utile pour la société en général, le calcul

de l'avantage dont elle peut être pour chaque particulier, exige d'autres principes: en effet, il s'agit pour chacun, de s'exposer à un risque certain & présent, pour éviter un risque plus grand, mais éloigné & incertain; & cette circonstance paroît changer la nature de la question. M. d'Alembert n'a pas donné la solution du problème envisagé sous ce point de vue, car celle qu'il propose, & qui consiste à comparer le risque de mourir de l'inoculation dans un court espace de temps, à celui d'être attaqué de la petite vérole naturelle, & d'en mourir aussi dans un temps très-petit, donne seulement une limite au-dessous de laquelle le risque que court un inoculé, n'empêche pas que l'inoculation ne lui soit avantageuse; mais ce risque pourroit être au-dessus de la même limite, sans que l'on dût louer le courage ou condamner l'imprudence de celui qui s'exposeroit à ce danger. La vraie solution du problème dépend d'une méthode d'évaluer la vie, ou plutôt de l'apprécier (car sa durée ne doit pas entrer seule dans le calcul); & il seroit bien difficile de trouver pour cette méthode, des principes dont tous les hommes, même raisonnables, voulussent convenir, soit pour eux-mêmes, soit pour leurs enfans. C'est principalement dans cette dernière hypothèse, que la question devient difficile, & qu'elle peut être importante; en prononçant sur notre propre danger, nous pouvons suivre notre volonté, nos penchans; & après avoir balancé nos intérêts, nous décider pour celui que nous préférons: en prononçant sur le sort d'autrui, la justice la plus sévère doit nous conduire: le droit que nous avons sur l'existence d'un autre, n'est fondé que sur l'ignorance qui l'empêche de juger pour lui-même; c'est donc sur son avantage réel, & non sur notre seule opinion, que notre volonté doit se régler; il ne suffit point de croire qu'il soit utile pour lui de l'exposer à un danger, il faut que cette utilité soit prouvée. On chercheroit vainement à éluder la difficulté, en décidant qu'alors l'intérêt général doit l'emporter, ce patriotisme exagéré n'est qu'une illusion dangereuse, capable d'entraîner à des

injustices, & même à des crimes, les hommes ignorans & passionnés: sans doute il est des circonstances où l'on peut devoir au bonheur public le sacrifice volontaire de ses droits, mais jamais celui des droits d'un autre ne peut être ni juste ni légitime.

Parmi les Mémoires de M. d'Alembert, on en trouve plusieurs qui ont pour objet le Calcul intégral, & qui renferment en quelques pages un grand nombre de méthodes particulières ou de vues nouvelles sur la théorie générale de ce calcul; telle est une méthode pour réduire à la solution d'une équation linéaire, la recherche de l'intégrale indéfiniment approchée d'une équation quelconque; méthode à la fois élégante & singulière: telles sont des observations importantes sur la forme générale du facteur, qui rend l'équation qu'il multiplie, la différentielle exacte d'une fonction ou finie, ou d'un ordre moins élevé: dans ces morceaux dispersés, les vérités se pressent, & comme elles sont peu développées, elles peuvent échapper à un lecteur inattentif ou peu instruit; l'Auteur y paroît plus occupé d'assurer aux Géomètres des vérités nouvelles, que de jouir de la gloire qu'il pouvoit en attendre; ainsi la plupart de ces Mémoires offriront à ceux qui sauront les méditer & en faire usage, des lumières utiles, & peut-être même leur vaudront beaucoup de gloire, s'ils n'ont pas la générosité de la rapporter au premier auteur.

La solution du problème des tautochrones, mérite une mention particulière: ce problème, résolu d'abord par Jean Bernoulli & par M. Euler, l'avoit été depuis par M. Fontaine, qui avoit employé une méthode nouvelle & vraiment originale; sa solution, plus générale que les premières, contenoit des principes de calcul, d'une utilité plus étendue que celle du problème; cependant M. Fontaine n'avoit cherché, comme les Géomètres qui l'avoient précédé, qu'à déterminer la courbe tautochrone dans quelques hypothèses de force accélératrice; & la question de savoir s'il existe une tautochrone dans toutes les hypothèses, & de déterminer celles où elle existe, n'avoit pas été encore

examinée. M. d'Alembert reçut de M. de la Grange une formule qui contenoit la solution de cette nouvelle question, plus curieuse & plus difficile; il en chercha la démonstration, & non-seulement il la découvrit, mais il parvint à une formule plus générale encore, que M. de la Grange trouvoit aussi en même temps: ces exemples sont fréquens dans l'histoire des Mathématiques, & ils doivent l'être, puisque les objets sur lesquels l'étendue & la nature des méthodes, permettent de s'exercer, sont également sous les yeux de tous; que le progrès des Sciences auxquelles on applique le calcul, offre également à tous, dans chaque époque, un certain nombre de questions à résoudre; que la vérité est une, & qu'ils emploient à peu-près les mêmes instrumens: cependant il est rare que les preuves de l'égalité soient aussi claires qu'elles l'ont été dans cette occasion; d'ailleurs on n'y croit que dans le cas où chacun de ceux qui veulent partager la gloire d'une découverte, en ont fait d'autres qu'ils ne partagent avec personne.

M. d'Alembert a publié des *Éléments de Musique*; on s'étonnera peut-être que l'Analyste profond qui avoit résolu le problème des cordes vibrantes, se soit borné à donner une exposition du système de Rameau, qu'il parvint à rendre intelligible; mais il ne croyoit pas que la théorie mathématique du corps sonore pût encore rendre raison des règles de la Musique. Il a aimé pendant toute sa vie cet Art qui se lie, d'un côté, aux recherches les plus subtiles & les plus savantes de la Mécanique rationnelle, tandis que sa puissance sur nos sens & sur notre ame, offre aux Philosophes des phénomènes non moins singuliers, & plus inexplicables encore.

On doit compter au nombre des services que M. d'Alembert a rendus aux Mathématiques, & sur-tout à la Philosophie, le soin qu'il a pris d'éclaircir une dispute célèbre sur la mesure des forces, dispute qui, pendant une partie de ce siècle, a partagé les Géomètres; & d'apprécier ces principes tirés de la métaphysique des causes finales qu'on vouloit substituer aux principes directs de la Méca-

nique, & employer à la découverte des loix de la Nature: ces questions avoient égaré quelques bons esprits, & consumé en pure perte le temps toujours si précieux de plusieurs hommes de génie; M. d'Alembert les discuta, & on n'en parla plus: les questions les plus profondes de la Métaphysique ont eu souvent le même sort que ces tours d'adresse ou de combinaison, qui étonnent, qui excitent la curiosité tant qu'on en ignore le secret, mais qu'on méprise aussitôt qu'il a été deviné.

Nous n'avons pu donner ici qu'une esquisse très-abrégée des travaux immenses de M. d'Alembert, sur les Mathématiques; travaux que ni les distractions, ni la foiblesse de sa santé, ni ses infirmités n'interrompirent jamais, qu'il suivoit encore il n'y a pas une année, au milieu de ses douleurs, & qui ont produit à cette époque un nouveau volume d'Opuscules, où l'on retrouve son génie & cette même finesse, ce même esprit philosophique qui caractérisent toutes ses productions.

Le goût très-vif qu'il avoit eu pendant quelque temps pour la Littérature & pour la Philosophie, n'avoit point affoibli sa première passion; ses Ouvrages mathématiques étoient les seuls auxquels il attachât une importance sérieuse, il disoit, il répétoit souvent qu'il n'y avoit de réel que ces vérités; & tandis que les Savans lui reprochoient son goût pour la Littérature, & le prix qu'il mettoit à l'art d'écrire, souvent il offensoit les Littérateurs, en laissant échapper son opinion secrète sur le mérite ou l'utilité de leurs travaux.

L'Académie des Sciences a souvent profité de ces mêmes talens qu'on lui faisoit un reproche d'avoir cultivés: dans ces assemblées solennelles, où des Souverains sont venus au milieu de nous, rendre hommage aux Sciences, & recevoir celui de notre reconnoissance pour l'intérêt qu'ils prennent à leurs progrès, M. d'Alembert a été plus d'une fois l'organe de cette Compagnie; les circonstances où il est permis de dire des vérités aux Princes, sont si rares, que

M. d'Alembert n'en laissoit point alors échapper l'occasion, il savoit exprimer avec force celles qu'il étoit temps de prononcer, & faire entendre avec finesse d'autres vérités plus contraires aux opinions communes, mais aussi dont il croyoit plus utile que les Rois fussent convaincus; il avoit l'art de plaire aux Princes qui l'écoutoient, en défendant devant eux la cause de l'humanité, & savoit leur rendre les Sciences respectables en leur montrant que leur gloire véritable, leur puissance, leur sûreté même, dépendent, plus qu'on ne croit, de l'instruction répandue dans toutes les classes de leurs Sujets, & que, par une révolution dont l'origine remonte à l'invention de l'Imprimerie, & dont rien ne peut plus arrêter les progrès, la force, les richesses, la félicité des Nations, sont devenues le prix des lumières.

En 1772, M. d'Alembert fut nommé Secrétaire de l'Académie Françoisse, dont il étoit Membre depuis 1754, & il s'imposa un devoir que ses prédécesseurs avoient jusqu'alors négligé, celui de continuer l'Histoire de cette Compagnie. Il s'engagea donc à écrire la vie de tous les Académiciens morts depuis 1700 jusqu'en 1772; l'obscurité de quelques-uns, l'esprit de parti qui exagéroit ou rabaissoit la réputation de plusieurs, le contraste du jugement de la Postérité & de l'opinion des Contemporains, la grande variété des talens par lesquels chacun d'eux s'étoit distingué, toutes ces difficultés auroient pu arrêter un Écrivain moins zélé pour la gloire de l'Académie, ou moins sûr de les vaincre; elles ne firent qu'exciter l'ardeur de M. d'Alembert, & dans l'espace de trois ans, près de soixante-dix Éloges furent achevés. Il s'étoit auparavant exercé dans le même genre; les Éloges de Jean Bernoulli & de l'Abbé Teraillon avoient même été ses premiers essais; celui de Montesquieu étoit digne de l'Homme illustre à qui ce monument étoit consacré. L'article *Éloge*, dans l'Encyclopédie, contient des préceptes excellens sur les Éloges historiques; ces préceptes, dictés par la raison & par le goût, font sentir toute la difficulté de ce genre d'Ouvrages,

&c

& doivent décourager ceux qui, honorés de cette fonction par une Compagnie savante, sentent combien ils restent au-dessous & des leçons que leur donne M. d'Alembert, & des exemples qu'il leur a tracés.

Les premiers Éloges de M. d'Alembert sont écrits d'un style clair & précis, tantôt énergique, tantôt piquant & plein de finesse, mais toujours noble, rapide, soutenu. Dans ceux qu'il a faits pour l'Histoire de l'Académie Française, il s'est permis plus de simplicité, de familiarité même; des traits plaisans, des mots échappés à ceux dont il parle, ou dits à leur occasion, un grand nombre d'anecdotes propres à peindre ou les hommes ou les opinions de leur temps, donnent à ces Ouvrages un autre caractère; & le Public, après avoir encouragé cette liberté par des applaudissemens multipliés, parut ensuite la désapprouver. Nous osons croire qu'avant de prononcer si cette sévérité n'a pas été injuste, il faut avoir vu tout l'Ouvrage; en effet, si dans une suite d'Éloges, ce ton familier rend la lecture de la collection plus facile, si cette liberté d'entre-mêler des plaisanteries ou des anecdotes à des discussions philosophiques & littéraires, augmente l'intérêt & le nombre des Lecteurs, alors il seroit difficile de blâmer M. d'Alembert d'avoir changé sa manière; d'ailleurs le ton dans les Ouvrages, comme dans la société, doit naturellement changer avec l'âge; on exige d'un jeune homme un maintien plus soigné, une attention sur lui-même toujours soutenue; on pardonne à un vieillard plus de familiarité & de négligence; on veut que l'un marque par toutes ses manières les égards qu'il doit à ceux qui l'environnent; on ne demande à l'autre que d'intéresser ou de plaire: ainsi, dans les premiers Ouvrages d'un Écrivain, on exige avec raison qu'il montre, par son attention à soigner, à soutenir son style, le desir qu'il a de mériter le suffrage de ses Lecteurs: mais lorsque sa réputation est consommée, lorsque son âge & ses travaux lui ont donné le droit de regarder comme ses disciples une partie de ceux qui le lisent ou qui l'écoutent, alors

il peut se négliger davantage, s'abandonner à tous ses mouvemens, & traiter ses Lecteurs plutôt comme des amis que comme des juges.

La partie de cet Ouvrage, qui a déjà été publiée, nous assure que ce recueil sera un monument précieux pour l'histoire littéraire, & un de ces Livres si rares, où les hommes qui craignent l'application, mais qui aiment la vérité & les Lettres, peuvent trouver des leçons utiles de Philosophie, de Morale & de goût.

On peut juger du caractère des grands Hommes par la liste de leurs amis, & malheureusement cette liste a paru prouver quelquefois qu'ils aimoient mieux des flatteurs que des amis véritables, comme si l'idée de l'égalité les eût fatigués: cependant si l'on pénètre plus avant, si l'on va chercher jusqu'au fond de leur cœur le motif caché de cette préférence pour les hommes médiocres, peut-être s'apercevra-t-on que ce sentiment tient à une défiance secrète d'eux-mêmes, qu'ils n'osent avouer; on verra que la plupart de ceux qui ont mérité ce reproche, avoient usurpé une partie de leur célébrité, & on en pourra conclure qu'ils craignoient plus les lumières de leurs égaux que leur société, & d'être jugés que d'être surpassés. La réputation de M. d'Alembert est appuyée sur une base trop folide, pour lui faire un mérite de s'être élevé au-dessus de cette foiblesse; ami constant de Voltaire pendant plus de trente ans, loin d'être fatigué de sa gloire, comme tant d'autres, il s'occupoit avec un soin presque superstitieux, de multiplier les hommages que ce Grand-homme recevoit de ses compatriotes; il ne parla de l'illustre Euler à un grand Roi, dans les États duquel M. Euler vivoit alors, que pour lui apprendre à le regarder comme un Grand-homme; & même un sacrifice d'amour-propre, que l'exakte équité n'eût pas exigé, ne lui coûta point pour faire rendre justice à un rival, dont le génie s'exerçant sur une seule Science, ne pouvoit frapper ceux à qui cette Science étoit étrangère. Lorsque M. Euler retourna en Russie,

M. d'Alembert, consulté par le même Prince, lui proposa de réparer cette perte en appelant à Berlin M. de la Grange; & ce fut par lui seul, qu'un Souverain qui l'estimoit, apprit qu'il existoit en Europe des hommes qu'on pouvoit regarder comme ses égaux.

Son amitié étoit active & même inquiète, les affaires de ses amis l'occupaient, l'agitoient, & souvent troublaient son repos encore plus que le leur; il étoit étonné de l'indifférence, de la tranquillité qu'ils montraient, leur en faisoit des reproches; & quelquefois son intérêt étoit si vif, qu'il les forçoit de desirer le succès pour lui plus encore que pour eux-mêmes.

Peu d'hommes ont été aussi bienfaisans, & il regardoit cette bienfaisance comme un devoir de justice; il ne croyoit pas (comme nous l'avons dit) qu'il fût permis d'avoir du superflu, lorsque d'autres hommes n'ont pas même le nécessaire; mais ses dons, si peu proportionnés à la médiocrité de sa fortune, ne suffisoient pas au besoin que son cœur avoit de faire du bien, son temps, le crédit de ses amis, l'autorité que lui donnoient son génie & ses vertus, tout appartenoit également aux malheureux & aux opprimés: en lisant ses Ouvrages, on est étonné que la vie d'un seul homme ait suffi à tant de travaux, & les soins de la bienfaisance & de l'amitié en ont rempli la moitié; & il y sacrifioit sans peine, nous ne disons pas une partie de sa gloire, ce sacrifice coûte peu aux hommes capables de véritables affections, mais l'attrait puissant qui l'entraînoit au travail. Son zèle pour le progrès des Sciences & la gloire des Lettres, ne se bornoit pas à y contribuer par ses Ouvrages, il devenoit le bienfaiteur, l'appui, le conseil de tous ceux qui, dans leur jeunesse, annonçoient du talent, ou montraient du zèle pour l'étude: souvent il a éprouvé de l'ingratitude, mais l'amitié, qu'il a trouvée quelquefois pour prix de ses services & de ses leçons, le consolait, & il ne se croyoit pas malheureux d'avoir fait cent ingrats pour acquérir un ami. Vers la fin de sa vie, à mesure qu'il

voyoit successivement se briser les liens formés dans sa jeunesse, c'est parmi ses anciens disciples qu'il avoit choisi ses amis les plus chers, ceux qui étoient pour lui l'objet d'un sentiment plus tendre, & sur l'amitié desquels il comptoit le plus; & comme il avoit toujours préféré la Géométrie à toute autre étude, c'est sur deux Géomètres de l'Académie que le choix de son cœur s'étoit sur-tout arrêté.

Ami de l'humanité, les intérêts, les droits des hommes étoient pour lui des objets sacrés, souvent il les a défendus, & jamais il ne les a trahis: si on ne mérite pas le nom de citoyen en flattant basement l'autorité, de quelque manière qu'elle s'exerce, en exaltant toujours les vertus & les actions de ceux qui gouvernent, au risque de louer tour à tour des principes contradictoires, on s'en rend également indigne en blâmant tout au hasard, en donnant pour patriotisme son attachement à une cabale dont on espère partager le crédit, en cachant, sous l'apparence de l'amour naturel & légitime de la liberté, l'humeur secrète de n'avoir pas d'empire sur celle des autres: un bon citoyen s'intéresse vivement au bonheur général, s'élève avec courage contre ceux qui font le mal ou qui le permettent; il obéit aux loix, mais en réclamant contre celles qui blessent l'humanité & la justice; soumis à l'autorité, il respecte ceux qui en sont les dépositaires, mais il les juge; il combat toutes les erreurs qui peuvent troubler la paix, ou attenter aux droits des hommes; il desire enfin qu'ils soient éclairés sur leurs vrais intérêts comme sur leurs droits, parce que leur félicité commune & la tranquillité publique dépendent de la liberté qu'ils ont de s'instruire, & de la destruction des préjugés: tel fut constamment M. d'Alembert, mauvais citoyen pour l'homme puissant & corrompu, mais bon patriote aux yeux des Ministres justes & éclairés, comme aux yeux de la Nation.

Il avoit prouvé, par des traits éclatans, qu'il étoit inaccessible à l'intérêt, autant qu'à la vanité; mais les augmentations successives, & toujours très-modiques, que reçut son revenu, n'étoient pas reçues avec l'indifférence

à laquelle on auroit pu s'attendre, elles lui donnoient plus de facilité pour acquitter des dettes de bienfaisance qu'il regardoit comme de véritables obligations ; ses inquiétudes sur ses affaires n'avoient jamais d'autre objet : *& je serai forcé de retrancher sur ce que je donne*, étoit la seule crainte qu'il confiât à ses amis, lorsque des circonstances imprévues le menaçoient de quelque perte ou de quelque retardement : avec de tels sentimens, il ne devoit avoir & il n'eut jamais qu'une fortune médiocre, on ne parvient pas à s'enrichir, quand c'est pour les autres seulement qu'on veut être riche ; & ceux qui en accumulant des trésors, parlent encore de leur mépris pour les richesses, prouvent seulement qu'ils joignent l'hypocrisie à leurs autres vices.

Le caractère de M. d'Alembert étoit franc, vif & gai, il se livroit à ses premiers mouvemens, mais il n'en avoit point qu'il eût intérêt de cacher. Dans ses dernières années, une inquiétude habituelle avoit altéré sa gaieté, il s'irritoit facilement, mais revenoit plus facilement encore ; cédoit à un mouvement de colère, mais ne gardoit point d'humeur ; malgré la tournure quelquefois maligne de son esprit, on n'a jamais eu à lui reprocher la plus petite méchanceté, & il n'a jamais affligé, même ses ennemis, que par son mépris & son silence. Après avoir demeuré près de quarante ans dans la maison de sa nourrice, sa santé l'obligea de quitter le logement qu'il occupoit chez elle, & l'âge de cette femme respectable ne lui permit pas de le suivre : tant qu'elle vécut, deux fois chaque semaine il se rendoit auprès d'elle, s'assuroit par ses yeux des soins qu'on avoit de sa vieillesse, cherchoit à prévenir, à deviner ce qui pouvoit rendre plus douce la fin d'une vie sur laquelle la reconnoissance & la tendresse avoient répandu l'aisance & le bonheur. En quittant cette maison, il chercha un asile dans l'amitié, dans la société habituelle d'une femme aimable, qui, par une sensibilité simple & vraie, par les grâces piquantes & naturelles de son esprit, par la force de son ame & de son caractère, avoit fait naître en lui un sentiment, que les malheurs qu'elle avoit long-temps

éprouvés, rendirent plus profond & plus tendre, & qui eût été la consolation de la vie de M. d'Alembert, s'il n'avoit pas eu le malheur de lui survivre.

Les Savans & les Écrivains les plus célèbres, des Étrangers distingués par leurs lumières, des hommes de tous les ordres, mais choisis parmi ceux qui aimoient la vérité, & qui étoient dignes de l'entendre, lui formèrent alors une société nombreuse, où se joignoient une foule de jeunes Littérateurs & de gens du monde, que le desir de voir un Grand-homme, ou la vanité de dire qu'ils l'avoient vu, attiroit auprès de lui; cette société rassembloit, pour ainsi dire, tous les hommes qui, zélés pour les intérêts de l'humanité, mais différens par leurs occupations, leurs goûts, leurs opinions, n'étoient rapprochés que par un desir égal de hâter le progrès des lumières, un même amour pour le bien, & un respect commun pour l'homme illustre, que son génie & sa gloire avoient naturellement placé à leur tête: elle offroit aux jeunes gens qui entrent dans la carrière des Lettres, les moyens de faire des connoissances utiles à leur avancement ou à leur fortune, sans se livrer à une dissipation d'autant plus funeste pour le talent, qu'il est encore moins formé; ils y trouvoient les encouragemens que donne le suffrage libre & éclairé des hommes supérieurs, les lumières utiles qui s'échappent de leur conversation, enfin la crainte salutaire pour la jeunesse, de perdre par sa conduite, l'estime d'une société qu'on respecte & qu'on recherche. Ce n'est point ici mon jugement que j'expose, c'est l'expression fidèle des sentimens de plusieurs de ceux qui étoient admis chez M. d'Alembert, telle qu'elle leur est échappée au milieu de leurs regrets.

La constitution de M. d'Alembert étoit naturellement foible; le régime le plus exact, l'abstinence absolue de toute liqueur fermentée, l'habitude de ne manger que seul, d'un très-petit nombre de mets sains & apprêtés simplement, ne purent le préserver d'éprouver avant l'âge les infirmités & le dépérissement de la vieillesse; il ne lui restoit depuis long-temps que deux plaisirs, le travail & la

conversation ; son état de foiblesse lui enlevoit celui des deux qui lui étoit le plus cher : cette privation altéra un peu son humeur , son penchant à l'inquiétude augmenta , son ame paroissoit s'affoiblir comme ses organes , mais cette foiblesse n'étoit qu'apparente ; on le croyoit accablé par la douleur , & on ignoroit qu'il en employoit les intervalles à discuter quelques Questions mathématiques qui avoient piqué sa curiosité , à perfectionner son Histoire de l'Académie , à augmenter sa Traduction de Tacite , & à la corriger ; on ne devinoit pas que , dans le moment où il verroit que son terme approchoit , & qu'il n'avoit plus qu'à quitter la vie , il reprendroit tout son courage. Dans ses derniers jours , au milieu d'une société nombreuse , écoutant la conversation , l'animant encore quelquefois par des plaisanteries ou par des contes , lui seul étoit tranquille , lui seul pouvoit s'occuper d'un autre objet que de lui-même , & avoit la force de se livrer à la gaieté & à des amusemens frivoles.

Illustre par plusieurs de ces grandes découvertes qui assurent au siècle où elles ont été dévoilées , l'honneur de former une époque dans la suite éternelle des siècles ; digne par sa modération , son désintéressement , la candeur & la noblesse de son caractère , de servir de modèle à ceux qui cultivent les Sciences , & d'exemple aux Philosophes qui cherchent le bonheur ; ami constant de la vérité & des hommes ; fidèle jusqu'au scrupule aux devoirs communs de la Morale , comme aux devoirs que son cœur lui avoit prescrits ; défenseur courageux de la liberté , & de l'égalité dans les Sociétés savantes ou littéraires dont il étoit Membre ; admirateur impartial & sensible de tous les vrais talens ; appui zélé de quiconque avoit du mérite ou des vertus ; aussi éloigné de toute jalousie que de toute vanité ; n'ayant d'ennemis que parce qu'il avoit combattu des partis , aimé la vérité & pratiqué la justice ; ami assez tendre pour que la supériorité de son génie , loin de refroidir l'amitié en blessant l'amour-propre , ne fit qu'y ajouter un charme plus touchant , il a mérité de vivre dans le cœur de ses amis , comme dans la mémoire des hommes.

Il s'est assuré que ses vues de bienfaisance seront exécutées après lui; que les Ouvrages qu'il laisse, disposés par lui-même dans le plus grand ordre, seront donnés au Public, à l'utilité duquel il les a consacrés, & il a confié ses dispositions à trois de ses amis: l'un son Confrère à l'Académie François, distingué par des Ouvrages ingénieux & utiles, par son goût éclairé pour les Arts, par un caractère aimable & solide, étoit uni avec lui par une amitié de

* M. Watelet. trente ans, qui avoit toujours été sans nuage^a; un autre, Magistrat d'une Cour souveraine, respecté pour sa probité sévère, l'avoit connu dès son enfance, l'avoit aimé avant

^b M. Remi. que sa gloire fût répandue, & l'a toujours aimé depuis^b: je n'ai pu avoir d'autre titre pour être placé dans une liste si honorable, que l'amitié même de M. d'Alembert, amitié que mon zèle pour l'étude m'avoit méritée dès ma jeunesse, que pendant plus de quinze ans j'ai regardée comme un des premiers biens de ma vie, & dont le souvenir doux & cruel ne s'affoiblira jamais dans mon cœur, car il est des pertes qui ne peuvent s'oublier, parce qu'elles ne peuvent se réparer; & lorsque l'ami qui nous a été enlevé, étoit un de ces hommes rares que plusieurs générations ne peuvent quelquefois remplacer; lorsque son amitié, tendre, active, courageuse, éclairée, étoit unique comme lui-même; lorsqu'on étoit uni avec lui par ces rapports d'opinions, de goûts, de sentimens, par cet attrait naturel, qui rendroient irréparable la privation même d'un ami qui n'auroit point d'autres titres à nos regrets, il ne doit rester à ceux qui ont éprouvé de telles pertes, & qui les ont vues se renouveler en peu d'années, que la triste & douloureuse consolation de n'avoir pas vécu sans connoître le bonheur,

M. d'Alembert est mort le 29 Octobre 1783.





ÉLOGE DE M. DE TRESSAN.

LOUIS-ÉLISABETH DE LA VERGNE, COMTE DE TRESSAN, Lieutenant général des armées du Roi, Commandeur de l'Ordre de Saint-Lazare, l'un des quarante de l'Académie Française, Associé-libre de celle des Sciences; de la Société royale de Londres; des Académies de Berlin & d'Édimbourg, naquit au Mans, le 4 Novembre 1705, de François de la Vergne-Tressan & de Magdeleine Brulart de Genlis.

La Maison de la Vergne étoit établie en Languedoc, lorsque Simon de Montfort, à la tête d'une troupe de Brigands que l'amour du pillage & le fanatisme rassembloient sous sa bannière, vint convertir & ravager cette belle province: les la Vergne, fidèles à leur Prince, Raimond, Comte de Toulouse, prirent avec lui la défense de son peuple; mais la férocité l'emporta sur le courage, plus de trois cents mille habitans paisibles & désarmés, furent la proie des Soldats & des bourreaux, tandis que les biens & les titres de ceux qui avoient voulu les défendre, devinrent la récompense de leurs assassins.

Les la Vergne abandonnèrent leurs possessions & leur patrie, heureusement qu'un siècle après, un Cardinal de la Vergne, Archevêque de Sens, répara le mal que les Légats d'Innocent III avoient fait à sa famille, & acheta la terre de Tressan, dont une des branches de la Vergne a depuis toujours porté le nom.

Cette branche embrassa, au seizième siècle, la Religion réformée: à la bataille de Jarnac, la Vergne, suivi de vingt-cinq de ses neveux, défendit long-temps le Prince de Condé blessé & abandonné de son armée: quinze de ces braves Chevaliers y périrent, la plupart des autres furent

Hist. 1783.

Q

bleffés & faits prifonniers. La Vergne, ami de Coligni, le fuivit au mariage de Henri IV; mais plus défiante que l'Amiral, parce qu'on employa moins d'artifices pour le tromper, il prévint la trahifon que l'on tramoit contre fon parti, raffembla chez lui les Gentilshommes qui l'avoient fuivi à la guerre, arma fes domestiques, fe précautionna contre une furprife, & au premier bruit du maffacre, fit monter fa troupe à cheval, chargea celle des Meurtriers qui entouroient déjà fa maifon, les difperfa, & courut fe réfugier dans fes terres: ainfi par fa prudence & fa valeur il fut échapper à cette horrible confpiration d'un Roi contre fon peuple, attentat dont on ne feroit trop fouvent rappeler la mémoire, pour apprendre aux Rois quels crimes ils s'exposent à commettre; & aux peuples, à quels malheurs ils doivent s'attendre, lorsqu'ils n'ont pas la fageffe d'étouffer les premiers cris du fanatisme fous le poids du mépris & de la rifée publique.

Le fils de la Vergne, digne de fon père, commanda l'Infanterie de l'aile droite à la bataille d'Ivry, & y reçut trois bleffures; il eut pour fils François de Treflan, bif-aïeul de celui dont nous faisons ici l'éloge; Louife de Monteinard fa femme étoit dans Béziers, lorsque le Duc de Montmorenci fon parent y fut affiégé, elle demanda au Commandant de l'armée du Roi, ou plutôt du Cardinal de Richelieu, la liberté de fortir de la ville, l'obtint, & emmena avec elle dans fa voiture, le Duc de Montmorenci caché fous fon vertugadin; le Cardinal ne put s'empêcher de louer hautement cette action qui lui enlevoit cependant une victime, à la vérité pour bien peu de temps.

Elle eut vingt-deux enfans, dont dix-neuf vécurent plus de foixante-dix ans, une des filles en vécut cent.

Ces détails généalogiques paroîtront peut-être étrangers à l'éloge d'un Académicien, mais ce font les actions de fes ancêtres, & non leurs titres, que nous venons de rapporter; & ces actions font une partie du patrimoine de leurs defcendans.

M. le Comte de Tressan fut élevé d'abord chez l'Évêque du Mans, son grand-oncle, car sa famille avoit quitté la Religion réformée, elle avoit même produit un Missionnaire célèbre, qui, sous le règne de Louis XIV, convertit beaucoup de Protestans, & n'en fut pas moins persécuté comme janséniste. L'Évêque du Mans avoit quitté la Cour de bonne heure, pour se retirer volontairement dans son diocèse, avec un Évêque anglois, son ami : ils vécurent ensemble pendant quarante-deux ans, & eurent le bonheur de mourir le même jour : M. de Tressan fut alors élevé par son oncle, archevêque de Rouen, premier Aumônier du duc d'Orléans, Régent du royaume.

L'archevêque de Rouen fit venir son neveu à la Cour, école bien dangereuse pour un jeune homme de treize ans : mais ce jeune homme ne se borna ni aux leçons qu'il pouvoit y recevoir, ni aux sociétés qu'il y trouva ; il se lia dès sa première jeunesse avec Voltaire & avec Fontenelle, eut l'avantage de leur plaire, & le mérite de sentir le prix de leur amitié ; ils lui inspirèrent le goût de la Philosophie & des Lettres, & ce respect pour les Hommes illustres dans les Sciences ou dans la Littérature, qui malheureusement n'en est pas toujours une suite : car on a vu souvent les gens du monde, loin de trouver des plaisirs ou un remède contre l'ennui, dans la culture des beaux Arts, devenir les victimes de cet amour-propre malheureux, qui accompagne les demi-talens, & haïr les hommes célèbres, dont la gloire humilioit en secret leur orgueil.

M. de Tressan, quoiqu'occupé autant qu'aucun autre homme de la Cour, des plaisirs ou de ce qui en a le nom, réservoir tous les jours quelques heures qu'il consacroit au travail ; il s'instruisoit par le commerce des Savans, dont il avoit su se concilier la bienveillance, & se préparoit des ressources pour le temps de sa vieillesse, des consolations contre les malheurs de l'ambition & de la fortune.

Il fit dans la guerre de 1741, toutes les campagnes de Flandre, avec le feu Roi, dont il étoit Aide-de-camp à

la bataille de Fontenoi, la première qu'un roi de France eût gagnée contre les Anglois, depuis celle de Taillebourg.

En 1750 il entra dans l'Académie comme Associé-libre; il s'étoit déclaré Physicien peu de temps auparavant, par un Mémoire sur l'Électricité; matière alors très-nouvelle & très-peu connue. Dans cet Ouvrage, il s'étoit un peu livré à son imagination, & elle l'avoit bien servi, puisqu'il a prédit une partie des découvertes qui ont été faites depuis.

Ces Recherches qui n'ont pas encore été imprimées, annoncent une étendue de connoissances qu'on est étonné que M. le Comte de Tressan ait eu le temps d'acquérir, & montrent une sagacité qu'on regrette de n'avoir pas été plus constamment employée; elles donnent même lieu de croire que son goût pour la Physique seroit devenu un véritable talent, s'il avoit pu le suivre avec cette opiniâtreté & cette constance sans lesquelles on ne fait, dans les Sciences, ni de véritables découvertes, ni même de véritables progrès.

Vers le même-temps, il composa pour l'Encyclopédie plusieurs articles, presque tous sur l'Art Militaire; & il eut soin d'y faire entrer quelques leçons d'humanité & de justice, que malheureusement on ne peut pas encore regarder comme absolument inutiles.

M. le Comte de Tressan passa de la Cour de France à celle de Lorraine, où il fut grand Maréchal-des-Logis du Roi de Pologne Stanislas, & successivement Commandant du Toulinois & de la Lorraine-allemande.

Il contribua beaucoup à l'établissement de l'Académie de Nanci; il y lut plusieurs Discours, & y prononça souvent l'Éloge des hommes célèbres qu'il y avoit fait associer. Le Roi de Pologne qui aimoit les Lettres & qui les cultivoit, avoit pris pour M. de Tressan un goût assez vif pour inspirer de la jalousie au père Menou; aussi ce Jésuite ne manqua-t-il pas d'accuser M. de Tressan d'avoir mis de la philosophie dans quelques-uns de ses Discours Académiques; le Roi lui en parla: *Je conviens de mon tort*, lui répondit

M. de Tressan , *mais je supplie votre Majesté, de se rappeler qu'à la Proceffion de la Ligue, il y avoit trois mille Moines & pas un Philosophe.*

La mort de ce Prince, celle de sa fille & de son petit-fils, firent perdre à M. de Tressan, toutes les personnes augustes dont les bontés pouvoient nourrir en lui des restes d'ambition; c'est en général pour les hommes la dernière de leurs passions, & sur-tout elle ne quitte jamais absolument ceux qui ont vécu dans les Cours. Ce fut alors qu'il sentit le prix de l'habitude qu'il s'étoit formée de cultiver son esprit, & par la lecture & par la composition de quelques Ouvrages. Le premier fruit de sa retraite fut consacré à l'éducation de ses enfans, mais après avoir rempli ce devoir par un Livre sérieux, intitulé *Réflexions sur l'Esprit*, il renonça aux Recherches philosophiques, abrégéa les *Amadis*, traduisit l'*Arioste*, & fit des Romans de Chevalerie.

Il trouvoit dans sa famille les noms de *Laure*, de *Diane de Château-Morand*, de *la Fayette*, noms célèbres dans les Romans; mais ce dernier pouvoit l'exposer à une comparaison dangereuse, aussi eut-il ou la galanterie ou la prudence de ne pas s'exposer au parallèle.

Il crut qu'un Chevalier ne devoit point parler d'amour comme une femme tendre & sensible, il substitua une gaieté piquante, mais modeste; des images voluptueuses, mais toujours enveloppées du voile de la décence; une liberté qui amuse, qui séduit, mais sans alarmer la pudeur, à cette douce sensibilité, à cette délicatesse, à cette pureté de sentimens qui caractérisent les Ouvrages de M.^{me} de la Fayette: tous deux semblent avoir conservé le caractère de leur sexe, dans leur manière de peindre l'amour, & l'on y aperçoit à peu-près la même différence que parmi les gens du monde on peut observer dans la manière de le sentir.

Il ne nous appartient pas de fixer la place que mérite M. le Comte de Tressan dans un genre moins frivole qu'on ne croit, puisque la plupart des hommes, & sur-tout des femmes, ont pris dans les Romans qu'ils ont lûs, une partie de leurs préjugés ou de leurs principes, mais nous

nous bornerons à observer qu'il n'est aucun Romancier, ni même aucun Poète, qui ne puisse envier le tableau si naïf, si original, & si touchant de l'éducation d'Ursino.

C'est à l'âge de soixante-treize ans qu'on vit M. de Tressan se livrer à ces Ouvrages dans lesquels on trouve toute la fraîcheur, toute la gaieté d'une imagination jeune & riante; c'est à cet âge qu'il montra pour le travail une ardeur telle qu'un homme de Lettres avide de renommée, peut l'avoir au commencement de sa carrière.

Au milieu des douleurs de la goutte, il dictoit un conte rempli des peintures les plus animées: il sembloit que son corps & ses sens eussent vieilli seuls, & que l'âge & les infirmités eussent respecté son imagination & son esprit.

Si l'on regarde ces Ouvrages comme ceux d'un vieillard, combien doit-on regretter que dans sa jeunesse il n'ait pas suivi la carrière des Lettres avec la même ardeur? mais peut-être aussi que son esprit, qu'il avoit exercé toujours sans se fatiguer jamais, avoit conservé toute sa force, & que la dépendance où l'ame est de nos organes, n'est ni si absolue ni assujettie à des loix si régulières, qu'une observation superficielle nous porte à le croire.

Il desira vivement d'être de l'Académie Française, & obtint à l'âge de soixante-quinze ans un titre dont il ne devoit pas jouir long-temps, mais dont il jouit avec toute la vivacité, toute la sensibilité d'un jeune homme qui l'auroit obtenu pour le prix d'un premier succès.

Le dernier Ouvrage de M. de Tressan doit intéresser particulièrement l'Académie des Sciences: c'est un éloge de Fontenelle, de cet homme qu'elle regrettera long-temps, à qui peut-être elle doit une partie de sa gloire, & ce qui est encore plus précieux de cet esprit philosophique qui lui fait tolérer toutes les hypothèses sans en adopter aucune; résister aux opinions nouvelles, mais encourager les découvertes; &, en conservant l'esprit de doute dans les justes bornes que prescrit la sagesse, être à la fois un appui utile pour les véritables inventeurs, & une barrière contre le charlatanisme. M. de Tressan avoit beaucoup vécu avec

Fontenelle; il l'avoit vu contribuer au progrès des Sciences autant peut-être qu'aucun homme de génie, sans cependant les avoir enrichies d'une seule découverte; & cacher avec autant de soin, la profondeur & l'étendue de ses vues philosophiques, que d'autres mettent de prétention à en montrer, ne voulant pas que les hommes appriissent trop-tôt, tout le bien que la raison pouvoit leur faire, ne disant les vérités qu'à mesure qu'il les croyoit utiles, mais ayant soin de faire entendre celles qu'il ne disoit pas, pour qu'elles ne fussent point perdues, & qu'on pût les retrouver lorsqu'il seroit temps de les révéler. M. de Tressan avoit vu Fontenelle, pendant le cours d'une si longue vie, rendre les Sciences respectables par ses mœurs, en inspirer le goût, & en faire sentir l'utilité par ses Ouvrages, sans jamais leur attirer d'ennemis, sans blesser l'amour-propre des ignorans, sans les éblouir par trop d'éclat, ou les effrayer en attaquant de front trop de préjugés à la fois. Modeste, réservé dans son zèle pour la vérité, comme dans sa conduite, il exerçoit ainsi sur les esprits de son siècle une influence d'autant plus forte qu'elle se faisoit moins sentir, & qu'on profitoit de la lumière qu'il avoit répandue sans apercevoir de quel point elle étoit partie; c'étoit à lui que M. de Tressan devoit en grande partie le bonheur que la culture des Lettres avoit répandu sur les dernières années de sa vie, & c'est à lui qu'il voulut consacrer les derniers fruits de sa vieillesse. Dans la préface de cet Éloge, M. de Tressan semble prévoir sa fin prochaine, & céder sans regret à la force qui l'entraînoit dans le tombeau, pourvu qu'elle lui permît de s'arrêter encore un moment pour rendre un dernier hommage à une mémoire chérie.

Des attaques de goutte répétées avoient épuisé ses forces, & il y succomba le 31 Octobre 1783, laissant deux fils au service, dont l'un ne lui a survécu que très-peu de temps, un troisième Grand-Vicaire de Rouen, & une fille mariée à M. le Marquis de Maupeou.





ÉLOGE

DE M. WARGENTIN.

PIERRE WARGENTIN, Chevalier de l'Étoile polaire; Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Stockholm; des Académies de Pétersbourg, d'Upsal, de Copenhague, de Gottingue; de la Société Royale de Londres; Associé-étranger de l'Académie des Sciences, naquit le 22 Septembre 1717, dans la paroisse de Junne en Suède, de Guillaume Wargentin, Pasteur de cette Église, & de Christine Arosell.

Parmi les découvertes qui ajoutent successivement à la masse toujours croissante des connoissances humaines, il en est dont une seule suffisant pour assurer à celui qui l'a faite, la reconnoissance de ses contemporains, ou même les hommages de la postérité, le dispense en quelque sorte de chercher d'autres titres à la gloire; elles doivent cet avantage à leur utilité, à leur éclat, ou au mérite d'offrir la réunion inattendue de vérités long-temps isolées: l'on pourroit être tenté de regarder comme l'ouvrage du hasard, le bonheur qu'ont eu quelques Savans, d'être conduits par leurs recherches à de telles découvertes, si ce choix n'étoit pas déjà par lui-même, une preuve d'un bon esprit, qui connoît l'état de la Science qu'il cultive, & fait distinguer, dans les travaux qu'elle présente, ceux qui sont importants, & dont le succès n'est au-dessus ni de ses forces ni des ressources qu'offrent les méthodes connues.

Telle a été la découverte des équations empiriques des satellites de Jupiter, par M. Wargentin.

Les Astronomes qui considèrent les mouvemens des corps célestes comme circulaires & uniformes, ont nommé

équation

équation, la loi régulière suivant laquelle les mouvemens d'une Planète s'écartent de cette hypothèse.

Depuis la découverte de la force générale à laquelle les Planètes obéissent, il existe deux manières de déterminer ces équations; l'une par le calcul des perturbations que cause dans le mouvement d'une Planète l'attraction des autres corps célestes; l'autre, en cherchant par l'examen des effets, & sans remonter à leur cause, une loi constante formée d'un petit nombre de termes qui puisse satisfaire à toutes les observations, & l'on a donné le nom d'*équations empiriques* à celles qui sont trouvées par cette dernière méthode: lorsque M. Wargentin s'occupa de déterminer les équations des satellites de Jupiter, les Géomètres n'avoient pas encore donné une méthode générale pour ces sortes de recherches; comme Képler, il n'eut d'autres secours que celui de cet instinct du génie, qui fait suppléer aux méthodes, & cet instinct le servit heureusement.

Il trouva d'abord pour chaque Satellite une équation du temps, & quelque temps après, les équations pour le changement d'inclinaison; ces équations représentoient le mouvement des Satellites, avec une exactitude à laquelle on n'eût osé s'attendre: à la vérité elle n'étoit pas égale pour toutes, mais la théorie, en prouvant depuis, qu'une équation d'un seul terme ne peut suffire à représenter les phénomènes dans les cas où celle de M. Wargentin s'en éloigne, a fait voir en même temps, qu'il seroit injuste d'attribuer à l'auteur de cette découverte, une imperfection qui naît uniquement de la nature du problème.

C'est en 1746, que M. Wargentin donna ses premières équations empiriques, il n'avoit alors que vingt-neuf ans; trois ans après, en 1749, l'Académie de Stockholm le choisit pour son Secrétaire: il a rempli cette place pendant trente-quatre ans. Un goût éclairé pour toutes les Sciences, qui lui faisoit pardonner la préférence pour les Mathématiques; la douceur, la simplicité & la modération de son caractère, moyens plus sûrs que l'adresse pour concilier ou ménager

Hist. 1783.

R

des amours-propres opposés ; son activité pour publier , pour répandre promptement les Ouvrages de ses Confrères , aux dépens même des travaux particuliers qui n'eussent illustré que lui ; son zèle pour le progrès des Sciences , & cette espèce d'abandon de sa propre renommée pour ne paroître occupé que de la gloire commune ou de l'utilité générale , une dignité modeste qui savoit faire respecter les Sciences , mais sans armer contre elles , en paroissant trop exiger , les préjugés encore puissans & dangereux ; une probité rigoureuse qui rassuroit même contre les effets de ces préventions auxquelles la vertu la plus pure n'échappe pas toujours ; ce désintéressement sans faste qui touche les âmes généreuses , & gagne si bien les autres en leur ôtant la crainte de la concurrence ; enfin , ce desir d'être utile , qui se marquant dans les plus petites choses , annonce ce qu'on doit en attendre dans les occasions plus importantes , telles furent les qualités qui méritèrent à M. Wargentin l'estime générale & l'amitié de ses Confrères.

En 1759, on érigea un Observatoire à Stockholm , sur une hauteur à l'extrémité d'un faubourg ; il étoit naturel qu'on en offrît la direction à M. Wargentin , on lui proposa de s'y établir & il y consentit : il savoit qu'entouré des objets qui l'intéressoient le plus , sa famille , les instrumens & ses livres , il y trouveroit la solitude & la paix ; & il y resta jusqu'à la fin de sa vie.

Il étoit Membre d'une Commission chargée de rassembler tous les détails relatifs à la population de la Suède , à la durée de la vie des hommes , à l'influence des différentes causes de mortalité , à la connoissance exacte de la culture & des productions , en un mot à tous les faits d'économie politique , que l'on peut avoir intérêt d'observer dans un grand royaume : on avoit cru , en Suède , qu'un Mathématicien habile , pouvoit , lorsqu'il s'agissoit de prononcer sur des résultats de calculs , siéger à côté des Membres de l'Administration ; & qu'une sage politique pouvoit conseiller

d'honorer les Savans, & non de les tenir dans une dépendance qui repousse les vrais talens ou qui les rend inutiles.

Les registres de ce Bureau lui ont fourni le sujet de plusieurs Mémoires intéressans qui sont insérés dans les Recueils de l'Académie de Stockholm, & il avoit rassemblé le résultat de tous ses travaux en ce genre, dans un grand Ouvrage qu'il n'a pas eu le temps de publier : la sagacité dont M. Wargentin a donné une preuve si éclatante, précisément dans l'art de déduire des observations, leurs résultats généraux, doit faire desirer que l'on ne soit pas privé d'un travail si utile pour son pays, & peut-être pour l'Europe entière ; il faut même former des vœux pour que cet établissement honorable à la Suède qui a donné l'exemple, soit imité par les autres peuples, & assure enfin à des connoissances dont dépend essentiellement le bonheur des hommes, une base à la fois moins incertaine & plus précise.

Comme Secrétaire de l'Académie de Stockholm, M. Wargentin a fait plusieurs discours & quelques éloges d'Académiciens ; ses Compatriotes sont les seuls juges compétens du mérite de cette partie de ses travaux, & ils lui accordent celui d'avoir connu le véritable style de ce genre d'Ouvrages, d'y avoir été toujours simple & noble, élégant & naturel, d'avoir enfin mérité une place parmi les premiers Écrivains de sa Nation.

Environ un an avant sa mort, sa santé avoit commencé à déperir, de manière à laisser peu d'espérance, il apprit alors que l'Académie des Sciences de Paris lui avoit donné une de ses huit places d'Associés-étrangers, & qu'ainsi il ne mourroit point sans avoir obtenu ce qui avoit fait l'objet le plus vif de son ambition littéraire.

Son désintéressement ne lui avoit permis de s'occuper ni de sa fortune ni de celle de sa famille, & sur la fin de sa vie il éprouva des inquiétudes pour ses enfans, il sentit que l'homme isolé & dégagé de tout bien, a seul la liberté de se livrer sans réserve à ce que l'élévation de son ame lui inspire ; il eut des remords, ou du moins des regrets

de l'avoir portée trop loin : heureusement l'amitié de ses Confrères avoit tout réparé ; peu de temps avant sa mort il apprit que l'Académie lui avoit accordé une gratification sur les fonds dont elle dispose, & sollicitoit auprès du Gouvernement une pension pour ses enfans ; à peine pouvoit-il encore faire entendre quelques sons, mais la joie que lui inspira cette nouvelle ranima ses traits que l'approche de la mort avoit effacés, & il expira en jetant sur ses enfans qui pleuroient autour de lui, un regard tendre & serein, dont aucune amertume n'empoisonnoit plus la douceur.

Il mourut le 13 Décembre 1783, âgé de soixante-six ans.

L'Académie de Suède lui a fait frapper une médaille, honneur qu'elle ne rend qu'à ses Membres les plus illustres.





M É M O I R E S
 D E
 MATHÉMATIQUE
 E T
 D E P H Y S I Q U E,
T I R É S D E S R E G I S T R E S
de l'Académie Royale des Sciences.
 Année M. DCCLXXXIII.

M É M O I R E
S U R
L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE,
ET SUR SA DIMINUTION.
 Par M. LE GENTIL.

J'AI déjà traité deux fois cette matière. On trouve dans le Volume de 1757, un Mémoire de moi, très-détaillé, sur ce sujet, avec toutes les Observations que j'ai faites à
Mém. 1783. A

Lû
 le 3 Mai
 1783.

l'Observatoire royal, sous les yeux de M. Cassini de Thury, en 1751 & 1756, avec le grand quart-de-cercle mobile, de 6 pieds de rayon ; j'en ai conclu pour 1753, l'obliquité de l'Écliptique, de $23^{\text{d}} 28' 17''{,}6$, & par la comparaison de cette obliquité avec les observations du dernier siècle, celles qui m'ont paru mériter la préférence, j'ai conclu que l'on pouvoit admettre une diminution dans l'obliquité de l'Écliptique, de 34 secondes en cent ans.

Cette diminution, de laquelle je conviens dans mon Mémoire, que l'on pouvoit appeler aux observations futures, remplissoit pour lors l'objet que je me proposois, qui étoit de réduire les observations de Bouillaud avec toute l'exactitude possible.

A Pondichéry, en 1768 & 1769, je me suis appliqué à la recherche de cet élément si important, d'Astronomie. Placé dans la Zone torride, à 12 degrés de latitude, dans un beau climat, où les objets paroissent plus éclairés, plus nets, & mieux terminés que dans celui-ci, je crus que c'étoit pour moi une circonstance à ne pas laisser échapper : je m'appliquai d'abord aux réfractions, dont j'ai construit une Table pour ce pays-là.

J'ai rapporté toutes ces observations dans mon Voyage, (*tome I, page 458 & suiv.*) où l'on trouve que pour 1768 complet, j'avois établi l'obliquité de l'Écliptique, de $23^{\text{d}} 28' 9''{,}1$. M. le Monnier (*volume de l'Académie, année 1771*) ayant réduit l'observation de M. Richer, faite à Cayenne, en consultant la Table des Réfractions de M. Bouguer, pour la Zone torride, & donnant par ce moyen l'obliquité de l'Écliptique pour 1772, de $23^{\text{d}} 28' 39''$, j'en ai encore conclu une diminution de 31 secondes par siècle.

Étant sûr, autant qu'on peut l'être, de la bonté de mon quart-de-cercle, par le grand nombre d'observations & de vérifications que j'ai faites dans mes voyages, j'ai encore recherché ici cette obliquité, que j'avois déjà observée il y a trente ans à l'Observatoire royal ; j'en ai donc répété les observations l'an passé dans la tour occidentale : je les

communiquai à l'Académie quelques jours après le solstice. Il en résulte que j'avois trouvé la hauteur apparente du bord supérieur du Soleil, au moment du solstice, de $65^{\text{d}} 1' 12''$. (Voyez ci-après page 12).

La difficulté consistoit à vérifier mon quart-de-cercle, parce que je ne pouvois observer au Zénith, & que pour faire cette vérification, il faut user des plus grandes précautions, & avoir pour cela son quart-de-cercle dans un endroit commode, & sur-tout dont on ait la clef.

M. le Président de Saron ayant bien voulu que je fisse usage d'une guérite à lui, qui a ci-devant appartenu à M. le Marquis de Courtenvaux, elle s'est heureusement trouvée assez grande pour y mettre mon quart-de-cercle : je l'ai fait placer contre un mur de mon jardin, où elle m'est de la plus grande commodité pour observer à toutes sortes de hauteurs au-dessus de l'horizon, tant du côté du nord que du côté du midi ; j'y ai même un assez vaste horizon, & je peux y prendre des hauteurs correspondantes, au moyen d'un compteur astronomique que j'y ai fait placer depuis peu : l'endroit où cette guérite est placée, est de vingt-une toises, & environ trois pieds plus septentrional que la fenêtre du sud-est de la tour occidentale où j'ai observé le solstice.

Lorsque j'ai été arrangé, j'ai commencé par observer α de Persée & de la Chèvre ; la saison, sans être rigoureuse, a été fort pluvieuse, en sorte que je ne pus avoir de hauteurs de Persée que d'un côté ; mais m'ayant paru assez bonnes, & y ayant joint celles de α de la Chèvre, faites du même côté, je crus qu'en employant le Catalogue des Étoiles de M. l'abbé de la Caille, je pouvois tirer un premier résultat qui ne pouvoit pas s'éloigner beaucoup du véritable : il me donna pour l'obliquité de l'Écliptique, $23^{\text{d}} 28' 14''$.9 apparente : ce fut cette obliquité que je communiquai à l'Académie, le mois de Février dernier.

La saison, comme je l'ai remarqué, n'a pas été rigoureuse lors de la première vérification de mon quart-de-cercle, & le thermomètre se soutint dans ma guérite pendant les obser-

uations que je fis de α de Persée & de la Chèvre, depuis 7 degrés jusqu'à 10 degrés au-dessus du terme de la glace, comptés sur un excellent thermomètre de M. Lavoisier.

Sachant bien que cette vérification n'étoit pas suffisante, j'ai employé depuis, pour la même vérification, γ de la grande Ourse (la boréale des deux qui sont à l'extrémité du pied droit) que M. l'abbé de la Caille a observée particulièrement, & dont il s'est servi pour fixer la ligne de collimation de son sextant de six pieds de rayon.

J'ai d'abord fait trois bonnes observations de cette Étoile, la face de mon quart-de-cercle regardant l'orient; & quoique j'aie été obligé de me faire éclairer, je fus fort satisfait de ces trois observations.

Ayant tourné le quart-de-cercle, la face à l'occident, j'observai deux jours de suite la même Étoile, & j'eus encore besoin de la lumière; mais le troisième jour je l'observai sans ce secours, & je fus satisfait de mon observation.

Je me contentai donc de cette seule observation faite à la faveur du crépuscule, & elle me parut décisive avec les deux précédentes: alors, je retournai le quart-de-cercle, la face à l'orient, afin de profiter de deux à trois jours encore, si le temps me le permettoit, pour voir l'Étoile pendant le crépuscule, & vérifier, par ce moyen, les trois premières observations faites de ce côté, à la faveur de la bougie.

Je vis en effet encore l'Étoile, & j'en fis une fort bonne observation le 14 d'Avril; mais je ne fus pas également satisfait de celle du 17, ce qui me fit redoubler d'attention, le 18, que je vis encore l'Étoile pour la dernière fois, par le plus beau temps du monde. Toutes ces observations seront rapportées à la fin de ce Mémoire. Avant d'entamer actuellement le calcul de l'obliquité, je dois dire un mot de la hauteur du Pôle à l'Observatoire royal.

La hauteur du Pôle, à l'Observatoire royal, par les dernières observations de M. Cassini de Thury, est de $48^{\text{d}} 50' 10''$, & $48^{\text{d}} 50' 12''$, avec une différence de 2 secondes seulement dans les résultats. (Mérid. vérifiée, p. 281.)

La distance entre le zénith de l'Observatoire royal, & le zénith de l'Observatoire du collège Mazarin, est de $1' 15''$, selon M. de la Caille : or, la latitude de cet Observatoire, étant de $48^d 51' 29'',2$, selon le même Astronome, il en résulte la hauteur du pôle à l'Observatoire royal, de $48^d 50' 14'',2$.

En l'année 1716, on trouve dans la Connoissance des Temps, $48^d 50' 2''$ pour la latitude de l'Observatoire royal, & dès 1720, on y met cette même latitude de $48^d 50' 10''$ à peu-près, telle qu'on la trouve aujourd'hui ; & ce n'est que dans la Connoissance des Temps de 1765, que M. de la Lande mit cette latitude de $48^d 50' 14''$, conformément à la détermination de celle du Collège Mazarin, par M. l'abbé de la Caille.

Il paroîtroit, d'après les recherches de M. de Thury, dont nous venons de parler, que l'on pourroit supposer $48^d 50' 10''$ ou $48^d 50' 12''$, & en prenant un milieu, $48^d 50' 11''$; en sorte que toute la différence entre les Astronomes modernes, sur la hauteur du pôle de l'Observatoire, se réduiroit à $3''$ seulement ; & n'ayant nulle raison pour adopter un résultat plutôt qu'un autre, c'est - à - dire, pour décider entre deux déterminations faites par d'habiles Observateurs, & qui diffèrent si peu entr'elles, je me suis trouvé embarrassé dans le choix de cet élément, d'ailleurs si important pour la recherche de l'obliquité de l'Écliptique : mais sans vouloir avoir la prétention de fixer les doutes que pourroient avoir les Astronomes sur ces trois secondes de différence, je dirai que j'ai supposé dans mes calculs la hauteur de l'Équateur à l'Observatoire royal, de $41^d 9' 47'',2$; & voici sur quoi je me suis fondé.

J'ai employé pour cela α de Persée, que j'ai observé à Pondichéry à 52^d de hauteur ; hauteur, comme l'on voit, assez grande, & où la réfraction ne doit point varier dans un climat si beau que celui de Pondichéry, où les Étoiles n'ont aucune scintillation. Ici j'ai observé la même Étoile qui, passant par le Zénith, m'a procuré l'avantage de ne point employer la réfraction.

Voici donc la marche que j'ai suivie.

La déclinaison de α de Persée pour 1769, lorsque je l'observai à Pondichéry, étoit, selon le Catalogue de M. l'abbé de la Caille, de $49^{\circ} 1' 26'',2$ apparente: je l'ai trouvée, par mes propres observations (*Voyage aux Indes, tome I*) de $49^{\circ} 1' 30'',8$ apparente.

Différence..... $4'',6$.

La déclinaison de la Chèvre pour 1783, lorsque je l'ai observée, étoit à très-peu de chose près, d'après le Catalogue de l'abbé de la Caille, de $45^{\circ} 45' 51'',2$ apparente, & celle de α de Persée, de $49. 4. 43,4$ apparente.

Différence..... $3. 18. 52,2$.

Je l'ai trouvée par mon quart-de-cercle, corrigée par la réfraction, de..... $3^{\circ} 18' 52''$.

Je peux donc supposer que j'ai bien observé, puisque je suis d'accord avec M. de la Caille, & je peux adopter les résultats que j'ai trouvés par mon quart-de-cercle.

Maintenant, en reprenant & en partant de mes observations faites à Pondichéry en 1769, j'ai supposé la déclinaison de α de Persée en 1783, lorsque je l'ai observée, de..... $49^{\circ} 4' 38'',8$: or j'ai observé sa hauteur, de..... $90. 21. 20$.

Il en résulte..... $41. 9. 46$ pour la hauteur de l'équateur, à l'endroit où j'ai observé; & si j'y ajoute, pour ne rien négliger, $1'',2$ pour les vingt-une toises dont j'ai parlé ci-dessus, j'aurai $41^{\circ} 9' 47'',2$; & enfin la hauteur du pôle, dans la tour occidentale où j'ai observé le solstice de $48^{\circ} 50' 12'',8$.

Telle est la hauteur du pôle que j'ai cru pouvoir employer dans les calculs suivans, sans prétendre, je le répète, faire adopter ce résultat, comme décidant la question sur les trois secondes dont j'ai parlé plus haut: il est au moins certain que mon résultat tient à très-peu-près le milieu entre $48^{\circ} 50' 11''$ &..... $48. 50. 14$.

Suite du calcul de l'obliquité de l'Écliptique.

Hauteurs solsticiales du Soleil.....	65 ^d	1'	12 ^{''} ,3.
Demi-épaisseur du fil.....	—	0.	6,5.
Erreur du quart-de-cercle.....	—	0.	55,2.
Réfraction.....	—	0.	24,0.
Parallaxe.....	+	2.	9,0.
Demi-diamètre du Soleil.....	—	15.	46,5.
Donc obliquité apparente.....	23.	28.	15,8.
Otant la nutation.....	—	0.	8,9.
Obliquité vraie ou moyenne.....	23.	28.	6,9.

Je ne perdrai pas de temps à discuter les observations des siècles précédens sur l'obliquité de l'Écliptique, je l'ai fait dans le volume de 1757; & j'avoue aujourd'hui que malgré toutes les peines que j'ai prises & que je prendrois encore à les discuter de nouveau, je me trouverois au milieu d'un labyrinthe inextricable de difficultés. Je ne mettrai point la main aux observations des Astronomes mes contemporains, sur la même obliquité; les discuter, ce seroit vouloir les juger, mon intention n'est pas de juger personne. Je me contenterai de rapporter ici les résultats que j'ai trouvés sur cette obliquité en 1753, 1769 & 1782, qui donnent une petite diminution entr'elles; je répéterai en même-temps ici l'avertissement ou la remarque que j'ai faite en 1757: savoir que l'obliquité de l'Écliptique auroit réellement diminué de la quantité indiquée par mes observations, s'il n'y avoit point d'erreur dans ces observations ni dans la vérification de l'instrument, mais que la chose n'est pas possible, & que cette erreur peut, sans peine, monter à 2" ou 2" $\frac{1}{2}$; ce qui ne supposeroit pas plus d'un quart de seconde d'erreur sur chaque élément qu'on est obligé d'employer dans le calcul.

Maintenant de 1753 à 1782, c'est-à-dire, un intervalle de vingt-neuf ans, m'a donné 10" $\frac{7}{10}$; ce qui supposeroit 37" en cent ans; de 1753 à 1769, c'est-à-dire, un inter-

valle de seize ans, m'a donné $7'' \frac{7}{10}$, ce qui supposeroit 48 secondes $\frac{1}{10}$ en cent ans; de 1769 à 1782, c'est-à-dire, le dernier intervalle qui est de treize ans seulement, ne m'a donné que 3 secondes, ce qui ne supposeroit que 23 en cent ans. Enfin ce seroit 36 secondes en cent ans en prenant un terme moyen entre ces trois résultats; car je n'ai pas plus de doute sur l'un que sur l'autre, & je suis également satisfait des trois; mais parce qu'un trop petit intervalle entre les observations multiplie les erreurs autant de fois qu'il est contenu dans l'intervalle de cent ans; les grands intervalles doivent être préférés aux petits dans ce cas; par cette raison, quoique je n'aie pas de sujet de doute sur les observations d'une des trois époques que je rapporte, plus que sur les autres; je m'en tiendrai à l'intervalle de vingt-neuf ans, qui m'a donné 10 secondes $\frac{7}{10}$, & par conséquent 37 secondes en cent ans.

TABLE des Observations de α de Persée, de α de la Chèvre, & de ι de la grande Ourse.

Hauteurs méridiennes de α de Persée, la face de l'instrument à l'Orient; à la faveur du Crépuscule.

1783.	10 Fév. α Persée..	90 ^d ,00 + 10.*	Tours — $\frac{1}{2}$ sec. bonne.
	11 Fév.	90,00 + 10.1"	bonne.
	14 Fév.	90,00 + 10.6"	bonne.

Dans cette observation-ci, j'ai fait en sorte que l'étoile rasât exactement, autant qu'il est possible, le bord supérieur du fil de mon micromètre, qui est vu sous un angle de 13 secondes, l'Étoile a suivi ce fil très-exactement pendant plus d'une minute & demie, tant avant qu'après son passage par le Méridien.

Hauteurs méridiennes de α de la Chèvre, la face de l'instrument à l'Orient.

1783.	24 Février α de la Chèvre.....	870 ^d + 1. 22".
	26 Février.....	870 + 1. 26.

* Le cadran du micromètre de mon quart-de-cercle est divisé en 128 parties qui valent 128 secondes.

Le fil un peu à gauche du centre du point.

1783. 7 Mars.....	87 ^d ,00 + 1. 24".
8 Mars.....	87,00 + 1. 21, <i>bonne.</i>
9 Mars.....	87,00 + 0. 22 $\frac{1}{4}$.

On a éclairé dans la première Observation; mais on a très-bien vu.

Le thermomètre s'est soutenu entre 7 & 10 degrés au-dessus de la congélation.

Hauteurs méridiennes de 1 de la grande Ourse, la face de l'instrument à l'Orient.

1783. 4 Avril.....	90 ^d ,00 + 4. 60 $\frac{3}{4}$.
5 Avril.....	90,00 + 4. 60 $\frac{3}{4}$.
6 Avril.....	90,00 + 4. 65 $\frac{3}{4}$.

La face de l'instrument à l'Occident.

7 Avril.....	90 ^d ,00 + 2. 1".
8 Avril.....	90,00 + 2. 1.
12 Avril.....	90,00 + 1. 126 $\frac{1}{2}$.

La face de l'instrument à l'Orient.

13 Avril.....	90 ^d ,00' + 4. 64".
14 Avril.....	90,00 + 4. 66, <i>bonne.</i>
18 Avril.....	90,00 + 4. 65, <i>bonne.</i>

Il résulte de toutes ces observations de 1 de la grande Ourse, que la ligne de collimation de mon quart-de-cercle est bien fixée à 90^d 6' 55",22''' ou $\frac{2}{10}$.

Le thermomètre a constamment marqué entre 10 & 15^d au-dessus de la glace pendant ces observations.

Remarques sur les Observations faites avec ce même quart-de-cercle, par M. l'abbé de la Caille, il y a quarante ans.

Je n'ai point comparé mes observations, comme je devois le faire, à celles de M. de la Caille, faites au collège Mazarin

Mém. 1783.

B

avec le même instrument il y a quarante ans, rapportées dans les volumes de l'Académie, & qui paroissent cependant très-bien faites; j'ai voulu éviter par-là de m'embarquer dans la difficulté que m'a faite M. le Monnier, au sujet de ces observations: la voici.

Le quart-de-cercle de M. l'abbé de la Caille, dont je me sers depuis vingt-trois ans, a trois pieds de rayon; la lunette a trois pieds également, & par conséquent l'objectif; mais lorsque M. de la Caille fit faire ce quart-de-cercle, il paroît qu'il avoit fait adapter un petit tuyau au bout de celui de trois pieds, fortement serré avec des vis; en sorte que la longueur de ce tuyau étant de deux pieds, la lunette totale avoit cinq pieds de longueur, comme le dit M. l'abbé de la Caille, dans le volume de l'Académie, *année 1742*.

Or, M. Bouguer a donné dans son Livre *de la figure de la Terre*, un article dans lequel il détaille les inconvéniens auxquels on s'expose en ne donnant pas aux lunettes des instrumens destinés à prendre les hauteurs des Astres, la même longueur exactement que celle du rayon de l'instrument; mais je crois pouvoir faire ici quelques remarques. M. Bouguer, dans ce qu'il dit, ne parle que des secteurs d'un grand rayon, tel qu'étoit le sien, qui avoit douze pieds; & il démontre que si à un pareil instrument qui n'a qu'un très-petit arc, on se contentoit d'appliquer une lunette de quatre pieds seulement de foyer: c'est à-dire, deux tiers plus petite que le rayon du secteur, on pourroit tomber dans de très-grands inconvéniens; & je crois qu'il a raison: mais je pense que le cas est bien différent ici, c'est un arc de 90 degrés entiers & plus, de trois pieds de rayon seulement, & très-solidement construit dans toutes les parties, & qui ne peut pas éprouver les flexions d'un secteur de douze pieds de rayon: or, la lunette de mon quart-de-cercle, pour répondre à l'hypothèse de M. Bouguer, auroit dû n'avoir qu'un pied de rayon, elle en avoit cinq, c'est-à-dire deux pieds seulement de plus que n'est le rayon de l'instrument. Il me semble donc que la seule & petite flexion qu'il y

auroit à craindre dans ce cas , seroit celle qui pourroit se faire à la lunette au centre de l'instrument: je laisse maintenant aux Astronomes à juger si l'erreur qui peut résulter des observations de M. l'abbé de la Caille, faites avec cet instrument, doit être bien considérable, & si elle auroit bien influé ici , supposé que j'eusse comparé mes observations aux siennes.

Au surplus, quoique je sois très-persuadé qu'il n'y a de ce côté aucune erreur sensible à soupçonner dans les observations de M. l'abbé de la Caille, j'ai voulu éviter de m'en servir dans ce Mémoire, pour qu'on n'ait rien à m'objecter à ce sujet: M. l'abbé de la Caille a supprimé dans la suite, à son voyage du Cap, ce tuyau excédant de deux pieds le rayon de son quart-de-cercle; & c'est dans cet état-ci qu'il me donna, en 1760, ce quart-de-cercle pour mon voyage, & que je lui remis à la place celui que j'avois eu à la mort de M. Bouguer.



OBSERVATION

DES

HAUTEURS SOLSTICIALES DU SOLEIL.

Au mois de Juin 1782.

Par M. LE GENTIL.

J'AI fait ces Observations à l'Observatoire royal, dans la tour occidentale, où j'ai fait construire deux cabinets, l'un à la fenêtre qui regarde le sud-est, & l'autre à la fenêtre qui est à l'ouest: j'ai destiné ces cabinets principalement pour répéter les observations que j'ai faites dans l'Inde avec mon quart-de-cercle, & principalement celle des réfractions horizontales. Mon but aujourd'hui, en observant la plus grande hauteur solsticiale du Soleil, a été de la comparer à celle que M. de la Caille nous a donnée, faite par cet Académicien, avec le même instrument, au collège Mazarin, en 1744 & 1745.

Je rapporterai mes observations telles qu'elles sont consignées dans mon Registre; elles sont affectées de la réfraction, & sur-tout de l'erreur de l'instrument, dont je n'assignerai point ici la véritable quantité, n'ayant encore point pu vérifier mon quart-de-cercle au Zénith; vérification que je me propose d'entreprendre incessamment; en attendant, j'ai cru que je pouvois présenter ces observations à l'Académie.

Hauteurs méridiennes du Soleil.

1782. Juin 14.....	64. 50 + 0,084 =	64 ^d 51' 24"
15.....	64. 50 + 1,109 =	64. 53. 57.
16.....	64. 50 + 2,116 $\frac{1}{2}$ =	64. 56. 12. $\frac{1}{2}$
18.....	64. 50 + 4,055 =	64. 59. 27.
19.....	64. 50 + 4,112 =	65. 0. 24.
20.....	64. 50 + 5,024 $\frac{1}{2}$ =	65. 1. 4.
22.....	64. 50 + 5,017 =	65. 0. 57.
23.....	64. 50 + 4,099 =	65. 0. 11.
24.....	64. 50 + 4,037 $\frac{1}{2}$ =	64. 59. 9. $\frac{1}{2}$
25.....	64. 50 + 3,093 $\frac{1}{2}$ =	64. 57. 57. $\frac{1}{2}$

En comparant l'observation du 20 avec celle du 22, comme ayant été les plus voisines du solstice, & celles où j'ai pris plus de précautions: on a pour la plus grande distance apparente du bord du Soleil à l'horizon, au moment du solstice, prise dans le Méridien, $65^d\ 1' 12''3$.

OBSERVATION

DE LA

HAUTEUR SOLSTICIALE DU SOLEIL.

Faite à l'Observatoire Royal, en Juin 1783.

Par M. LE GENTIL.

LES observations suivantes des hauteurs méridiennes du Soleil aux environs du solstice, ont été faites dans ma guérite, qui, comme je l'ai dit dans mon Mémoire sur l'obliquité de l'Écliptique, conclue des observations que je fis l'an passé dans la tour occidentale de l'Observatoire, est de $1''2$ de degré plus nord, ou plus septentrionale que cette tour.

La
le 6 Sept.
1783.

Je n'ai pas employé cette année moins de précautions que la précédente.

Mon quart-de-cercle ayant été placé fort exactement dans le Méridien, & n'ayant point été dérangé du 16 au 27 de Juin, j'ai observé pendant cet intervalle les hauteurs du Soleil lorsque le temps me l'a permis; voici celles qui ont été prises aux environs du solstice, qui m'ont paru aussi les plus précises:

Le 20, beau temps; mais l'air fort embrumé: le Soleil m'a paru faire des espèces de sauts ou de trémoussemens fort sensibles. Malgré cela, l'Observation est bonne.

$64^d\ 50'\ 5$ tours & $20''$.

Le 21..... $64^d\ 50'\ 5$ tours & $39''$.

14 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Le 23..... 64^d 50' 4 tours & 120, *bonne*.

Le 24..... 64. 50. 4 tours & 65, *passable*.

Le 25..... 64. 50. 3 tours & 110, *très-bonne*. Grand brouillard hier 24 & aujourd'hui 25, qui m'a paru occasionner une espèce de trémoussement ou de trépidation dans le bord du Soleil, de 2 à 3 secondes; les vents au sud-est calme.

Hauteurs réduites au moment du Solstice.

Le 20..... 65^d 1' 15",0.

Le 21..... 65. 1. 21,5.

Le 23..... 65. 1. 15,0.

Le 24..... 65. 1. 19,0.

Le 25..... 65. 1. 17,0.

Hauteur moyenne en 1783..... 65. 1. 17,5.

Hauteur moyenne en 1782..... 65. 1. 12,3.

Différence..... 0. 0. 5,2.

d'où il résulte que j'ai trouvé cette année la hauteur solsticiale plus grande de 5 secondes que l'année dernière; mais comme j'ai déjà prévenu plusieurs fois que je ne répondois de ces observations qu'à 2 à 3 secondes près; il suffit que l'erreur ait été l'an passé dans un sens, & cette année-ci dans le sens opposé, pour produire la différence que je trouve.

Calcul de l'obliquité de l'Écliptique.

Hauteurs solsticiales..... 65^d 1' 17",5.

Erreur de l'index..... 0. 0. 0,0.

Demi-épaisseur du fil..... — 0. 6,5.

65. 1. 11,0.

Erreur du quart-de-cercle..... 0. 6. 55,2.

64. 54. 15,8.

Réfraction..... — 0. 24.

64. 53. 51,8.

Parallaxe.	+	0. 2,9.
		<hr/>
Demi-diamètre du Soleil.....	64. 53. 54,7.	
	-	15. 46,5.
		<hr/>
	64. 38. 8,2.	
	41. 9. 47,2.	
		<hr/>
Donc obliquité apparente en 1783.....	23. 28. 21,0.	
Obliquité apparente en 1782.....	23. 28. 15,8.	
		<hr/>
Différence.....	0. 0. 5,2.	
		<hr/>

Cette différence de 5 secondes, que je trouve ici dans l'obliquité de l'Écliptique, dont elle est plus grande cette année que l'année précédente, vient évidemment, comme je l'ai remarqué plus haut, de l'erreur de mes observations; ainsi je pense que cette obliquité pour le commencement de Janvier de cette année est entre $23^{\text{d}} 28' 15'' 8$ & $23^{\text{d}} 28' 21''$: c'est-à-dire que mon opinion est, d'après mes observations, que l'obliquité apparente de l'Écliptique n'est pas plus petite actuellement que de $23^{\text{d}} 28' 16$ à $17''$.

*COMPARAISON avec les Observations de M. l'abbé
de la Caille, faites au collège Mazarin,
avec le même instrument.*

QUOIQUE mon intention n'ait point été de comparer ces observations à celles que M. l'abbé de la Caille a faites au Collège Mazarin, avec le même instrument & au même point, il y a quarante ans, & cela par les raisons que j'ai alléguées dans le Mémoire précédent; cependant comme les Astronomes seroient peut-être bien aîsés de voir tout de suite la différence qu'il peut y avoir entre ma détermination & celle de cet Astronome, je vais rapporter ici ses résultats: en 1744, M. l'abbé de la Caille trouva au Collège Mazarin la hauteur apparente du bord supérieur du Soleil au moment du solstice,

de.....	64 ^d	53'	28" $\frac{1}{2}$.
& en 1745, de.....	64.	53.	28 $\frac{1}{2}$.
ce qui donne pour l'Observatoire royal....	64.	54.	43 $\frac{1}{2}$.
ou bien pour l'endroit où j'ai observé.....	64.	54.	42,3.
or j'ai trouvé en 1782.....	64.	54.	15,8.
& en 1783.....	64.	54.	21,0.

La différence seroit donc pour 39 à 40 ans entre 0. 0. 21,3.

&..... 0. 0. 26,5.

Ce seroit une minute en cent ans, au lieu de 37 secondes que nous avons trouvées ci-dessus. L'obliquité de l'Écliptique ne diminue peut-être pas uniformément; ce dernier résultat, si on l'admettoit, sembleroit le prouver.



M É M O I R E

SUR LA FIGURE DE LA TERRE.

Par M. DE LA PLACE.

I.

LES mouvemens du centre de gravité de la Terre autour du Soleil, & de la Terre elle-même autour de son centre de gravité, ont été déterminés avec beaucoup de précision, & s'il reste quelque incertitude à cet égard, elle n'a pour objet que des inégalités périodiques dont la petitesse échappe aux observations, ou des inégalités séculaires que la suite des temps peut seule rendre sensibles; mais nous sommes bien loin de connoître avec la même exactitude, la constitution du globe terrestre, c'est-à-dire, la figure, celle de ses couches, & la loi suivant laquelle leur densité varie du centre à la surface. La Nature oppose à nos recherches sur ce point, des obstacles qu'il nous sera toujours impossible de surmonter: nous sommes ainsi réduits à tirer des phénomènes qui dépendent de la constitution de la Terre, & que nous pouvons observer à sa surface, sinon les vrais élémens de la théorie physique de cette Planète, du moins les limites entre lesquelles ils sont compris. Ces recherches intéressantes par elles-mêmes, sont encore d'une grande utilité en Astronomie; les mouvemens du Soleil & de la Lune donnés par les Tables, sont rapportés au centre de gravité de la Terre; c'est ce point que l'on regarde comme immobile dans la théorie de la Lune, & d'où l'on suppose émaner la force principale qui retient cet Astre dans son orbite; ainsi pour comparer la théorie aux observations, il faut les réduire au centre de gravité de la Terre, ce qui suppose une connoissance au moins fort approchée de la longueur des rayons menés de ce point à la surface. La Terre étant à très-peu-près sphérique, la variation des

parallaxes, dépendante de la figure, est inappréciable par rapport au Soleil & aux Planètes; mais elle est sensible relativement à la Lune; elle seroit de plus de 20 secondes, si l'aplatissement de la Terre étoit $\frac{1}{178}$, comme plusieurs Astronomes le supposent. Cette quantité n'est point à négliger, & demande à être déterminée avec soin, dans l'état actuel de l'Astronomie, où les observations sont susceptibles d'une grande précision, & dans un temps où la théorie de la Lune est devenue si importante pour la Navigation & pour la Géographie. Je me propose d'exposer dans ce Mémoire, ce que les observations & la théorie nous apprennent sur la constitution de la Terre, & de déterminer aussi exactement qu'il est possible, la figure que l'on doit supposer à cette Planète, dans le calcul des principaux phénomènes qui en dépendent, tels que la variation de la pesanteur de l'Équateur aux Pôles, les parallaxes, les Éclipses, la précession des équinoxes, & la nutation de l'axe terrestre.

I I.

DES mesures très-multipliées des Degrés du Méridien, & des perpendiculaires à la méridienne, donneroient la loi des rayons osculateurs de la surface de la Terre, & par conséquent la nature de cette surface; mais ce moyen est impraticable par la multiplicité des mesures qu'il exige: d'ailleurs on n'auroit ainsi que les rayons osculateurs des continens & des îles, dont la surface n'est qu'une petite partie de celle du globe terrestre. Les observations seules ne peuvent donc pas nous conduire à la vraie figure de la Terre, & pour y parvenir, il est nécessaire de les combiner avec le principe de la pesanteur universelle.

La Terre étant recouverte en grande partie des eaux de la mer, les conditions de leur équilibre sont les données les plus générales que nous ayons sur la figure de cette Planète; or, les Géomètres ont fait voir qu'en lui supposant la figure d'un Ellipsoïde de révolution très-peu différent

de la Sphère, cet équilibre peut subsister en vertu de toutes les forces dont elle est animée; il suffit alors de la mesure de deux Degrés pour déterminer la figure de la Terre, & c'est dans cette vue que les voyages célèbres des Astronomes françois, vers le Pôle & à l'Équateur, ont été entrepris. A l'observation de la mesure des Degrés, ils ont joint l'observation non moins importante de la longueur du Pendule à secondes. Des mesures semblables ont été faites avec un grand soin dans plusieurs parties du Globe, & cela étoit indispensable pour vérifier l'hypothèse de l'ellipticité de la Terre, qui n'est une suite nécessaire de l'équilibre de la mer, que dans le cas où cette Planète est homogène. La Théorie elliptique offre encore un moyen de vérifier cette hypothèse; car alors les loix de la variation de la Pesanteur, & de celle des Degrés, sont liées entre elles de manière qu'en ajoutant l'ellipticité de la Terre au rapport de la variation totale de la pesanteur à la pesanteur moyenne, la somme est égale à cinq fois la moitié du rapport de la force centrifuge à la pesanteur, rapport qui, comme l'on sait, est $\frac{1}{289}$. Voyons maintenant ce que l'observation nous a fait connoître.

I I I.

PARMI toutes les mesures des degrés du Méridien, nous ne considérerons que celles qui ont été faites au Nord, en France, à l'Équateur & au cap de Bonne-espérance, & qui, par les soins & les noms des Observateurs, méritent une entière confiance. Ces mesures sont comprises dans la Table suivante. (*Cosmographie de M. l'Abbé Ferfi, tome II, page 87*).

	Latitudes.	Degrés mesurés.
Équateur.....	0 ^d 0'	56753 toises.
Cap de Bonne-espérance, 33. 18.		57037.
France.....	49. 23.	57074.
Nord.....	66. 20.	57405.

Supposons que les erreurs de ces mesures soient exprimées

respectivement par les nombres de toises x , x^I , x^{II} , x^{III} ; si l'on nomme θ la latitude, & $\frac{\frac{1}{2}y}{56753}$ l'ellipticité de la Terre, ou, ce qui revient au même, la différence de ses axes, celui du Pôle étant pris pour l'unité; l'expression générale en toises, du degré du Méridien, sera à très-peu-près, dans l'hypothèse elliptique,

$$56753 + x + y. \sin. \theta^2.$$

Si l'on compare la première des quatre mesures précédentes, successivement avec la seconde, la troisième & la quatrième, on aura les trois expressions suivantes de y ,

$$y = 942,19 + (x^I - x) \cdot 3,3176;$$

$$y = 557,09 + (x^{II} - x) \cdot 1,7355;$$

$$y = 777,24 + (x^{III} - x) \cdot 1,1921.$$

S'il n'y avoit point d'erreur sensible dans les mesures, les grandes différences de ces trois valeurs de y , indiqueroient évidemment que la Terre n'est point un ellipsoïde de révolution; mais avant que de rejeter cette figure, il faut examiner si les erreurs que l'on doit supposer aux observations, sont au-dessus de celles que comportent ces observations, ce qui se réduit à déterminer le système des valeurs de x , x^I , x^{II} , x^{III} , qui satisfaisant aux trois équations précédentes, donne, abstraction faite du signe, la plus petite valeur possible à la plus grande de ces quantités. C'est une question de *minimis*, d'un genre particulier, & dont la solution est utile dans toutes les circonstances où il s'agit de voir si les résultats d'une hypothèse sont dans les limites des erreurs dont les observations sont susceptibles; on peut la résoudre par la méthode suivante.

Les trois équations précédentes donnent, en retranchant la seconde successivement de la première & de la troisième,

$$0 = 385,10 - x^{II} \cdot 1,7355 + x^I \cdot 3,3176 - x \cdot 1,5821;$$

$$0 = 220,15 + x^{III} \cdot 1,1921 - x^{II} \cdot 1,7355 + x \cdot 0,5434.$$

Supposons d'abord que l'on n'ait entre un nombre quelconque d'indéterminées $x, x', x'', x''', \&c.$ qu'une seule équation du premier degré, que nous représenterons par celle-ci,

$$a = m x + n x' + p x'' + \&c.$$

a étant positif.

On aura le système des valeurs de $x, x', x'', x''', \&c.$ qui donne, abstraction faite du signe, la plus petite valeur possible à la plus grande de ces quantités, en les supposant, au signe près, toutes égales entr'elles, & au quotient de a divisé par la somme des coefficients $m, n, p, \&c.$ pris positivement; quant au signe que chaque quantité doit avoir, il doit être le même que celui du coefficient de cette quantité, dans l'équation proposée.

Si l'on a deux équations entre ces indéterminées, le système qui donnera la plus petite valeur possible à la plus grande, sera tel, qu'abstraction faite du signe, toutes ces indéterminées seront égales entr'elles, à l'exception d'une seule qui sera plus petite que les autres, ou du moins qui ne les surpassera pas. En supposant donc que x soit cette quantité, on la déterminera en fonction de $x', x'', \&c.$ au moyen de l'une des équations proposées; en substituant ensuite cette valeur de x , dans l'autre équation, on en formera une entre $x', x'', \&c.$ Représentons-la par la suivante,

$$a = n x' + p x'' + \&c.$$

a étant positif; on en tirera, comme ci-dessus, les valeurs de $x', x'', \&c.$ en divisant a par la somme des coefficients $n, p, \&c.$ pris positivement, & en donnant successivement au quotient, les signes de $n, p, \&c.$ Ces valeurs substituées dans l'expression de x en $x', x'', \&c.$ donneront la valeur de x ; & si cette valeur, abstraction faite du signe, n'est pas plus grande que celles de $x', x'', \&c.$ ce système de valeurs sera celui qu'il faut adopter; mais si elle est plus grande, il faudra opérer successivement sur $x', x'', \&c.$ comme on vient de le prescrire relativement à x , & l'on

arrivera infailliblement au système cherché. Il est facile d'étendre cette méthode, au cas où l'on auroit trois ou un plus grand nombre d'équations entre les indéterminées $x, x', x'', \&c.$

En l'appliquant aux équations précédentes, on trouve

$$x = 2^{\text{toises}}, 04; x' = -75^{\text{toises}}, 57;$$

$$x'' = 75^{\text{toises}}, 57; x''' = -75^{\text{toises}}, 57;$$

d'où l'on tire $y = 684^{\text{toises}}, 4$; c'est la différence des deux degrés du Pôle & de l'Équateur. Suivant cette valeur de y , les deux axes du Pôle & de l'Équateur, sont à très-peu-près dans le rapport de 249 à 250, & l'on est assuré que tout autre rapport donneroit dans quelques-unes des quatre mesures précédentes, une erreur au-dessus de $75^{\text{toises}} \frac{1}{2}$.

Une erreur de $75^{\text{toises}} \frac{1}{2}$, est peu vraisemblable; il est moins vraisemblable encore qu'elle se rencontre à la fois dans les trois mesures du Nord, de France & du cap de Bonne-espérance: d'ailleurs le cas qui ne donne que $75^{\text{toises}} \frac{1}{2}$ d'erreur, étant une limite, il est infiniment peu probable. Enfin, on trouveroit de plus grandes erreurs, si l'on faisoit usage des autres mesures des degrés terrestres; car en adoptant les valeurs précédentes de x & de y , le degré correspondant à la latitude de $39^{\text{d}} 12'$, & calculé d'après l'expression du degré terrestre $56753 + x + y \cdot \sin. \theta^2$, seroit de $57028^{\text{toises}}, 55$: le degré mesuré à cette latitude en Pensilvanie, a été trouvé de 56888^{toises} , moindre que le précédent de $140^{\text{toises}}, 55$; & il est visible que l'on ne peut diminuer cette erreur, qu'en augmentant celles des autres mesures.

De-là nous pouvons conclure que l'hypothèse d'une figure elliptique ne peut pas se concilier avec les observations de la mesure des degrés terrestres, & que la Terre s'écarte sensiblement de cette figure; de plus, il est fort probable qu'elle n'est pas formée de deux parties semblables de chaque côté de l'Équateur; car le degré mesuré au cap de Bonne-espérance, est presque égal au degré de Paris, quoique les latitudes de ces deux lieux soient différentes; & il surpasse

de 149 toises, le degré de Pensilvanie, qui cependant est plus voisin du Pôle d'environ six degrés; ce qui semble indiquer que la Terre est plus aplatie vers le Pôle austral, que vers le Pôle boréal. On peut même soupçonner, d'après ces mesures, que la Terre n'est pas un solide de révolution; mais les erreurs dont elles sont susceptibles, ne permettent pas de prononcer sur cet objet.

I V.

LES variations observées dans la longueur du pendule à secondes, suivent une marche bien plus régulière que les variations des degrés des méridiens; elles s'éloignent fort peu de la loi du carré du sinus de la latitude, & la formule suivante les représente à un dixième de ligne près, c'est-à-dire, avec toute l'exactitude qu'elles comportent:

Longueur du pendule à secondes = $439^{\text{lignes}},30 + 2^{\text{lignes}},438 \cdot \sin^2 \theta$.

On peut facilement s'en convaincre par l'inspection de la Table suivante,

Latitude,		Longueur observée du pendule à secondes.	Longueur calculée par la formule précédente.	Erreur de la formule.
0 ^d	0.....	439 ^{lig.} ,21.....	439 ^{lig.} ,30.....	0 ^{lig.} ,09.
9.	34'.....	439,30.....	439,37.....	0,07.
18.	27.....	439,47.....	439,54.....	0,07.
33.	18.....	440,14.....	440,04.....	— 0,10.
41.	54.....	440,38.....	440,39.....	0,01.
48.	12.....	440,56.....	440,65.....	0,09.
48.	50.....	440,67.....	440,68.....	0,01.
51.	31.....	440,75.....	440,79.....	0,04.
59.	56.....	441,23.....	441,13.....	— 0,10.
66.	48.....	441,27.....	441,36.....	0,09.

V.

LA longueur moyenne du pendule à secondes, est, suivant la formule précédente, de $440^{\text{lignes}},52$; & la variation totale

de la pesanteur est de 2^{lignes},438 : les longueurs du pendule étant proportionnelles aux pesanteurs, le rapport de la variation totale de la pesanteur, à la pesanteur moyenne, sera

$$\frac{2,438}{440,52}, \text{ ou } 0,0055344. \text{ Nous avons observé (article II)}$$

que si la Terre est elliptique, le rapport précédent ajouté à l'ellipticité de la Terre, est égal à $\frac{\frac{5}{2}}{289}$, ou à 0,0086505 ;

en retranchant donc 0,0055344 de ce dernier nombre, on aura 0,0031161, pour l'ellipticité de la Terre, tirée de la variation de la pesanteur, ce qui donne les deux axes de la Terre, dans le rapport de 320 à 321. Ce rapport diffère trop de celui de 249 à 250, qui, par l'article III, approche le plus de satisfaire aux mesures des degrés, pour que cette différence puisse être attribuée aux erreurs des observations ; ainsi, les deux moyens qui doivent servir à vérifier l'hypothèse elliptique, savoir, la mesure de plusieurs degrés, & la variation observée de la pesanteur, se réunissent pour exclure cette hypothèse : mais il est très-remarquable que tandis que les variations des degrés s'écartent sensiblement de la loi du carré du sinus de la latitude, cette loi représente à très-peu-près les variations de la pesanteur. Ce phénomène est un des points les plus importants de la théorie de la Terre ; en le combinant avec les conditions de l'équilibre de la mer, nous allons en voir naître la loi de la variation des rayons terrestres.

V I.

POUR cela il est nécessaire de considérer la figure de la Terre avec la plus grande généralité, sans s'astreindre à aucune hypothèse sur la figure & sur la densité de ses couches, en supposant uniquement qu'elle est peu différente d'une sphère, & que le fluide qui la recouvre est en équilibre : c'est ainsi que j'ai envisagé la figure des Planètes, dans l'Ouvrage que j'ai publié sur cette matière, dans le volume de nos Mémoires pour l'année 1782 ; j'y suis parvenu à des formules générales & simples

simples sur les attractions des sphéroïdes quelconques peu différens de la sphère, & j'en ai tiré les loix de la variation des rayons & de la pesanteur à leur surface, qui résultent de l'équilibre du fluide dont on les suppose recouvertes, quelles que soient d'ailleurs les forces qui l'animent : ces formules appliquées à la Terre, donnent les résultats suivans.

Soit θ , l'angle que forme un rayon quelconque d'une couche du sphéroïde terrestre, avec l'axe de rotation; ϖ l'angle que forme le plan qui passe par ces deux lignes, avec un plan invariable passant par l'axe de rotation : soit $a \cdot (1 + \alpha y)$, le rayon mené du centre de gravité de la Terre, à la surface de cette couche, α étant un très-petit coëfficient, & y étant une fonction de μ & de ϖ ; supposons que cette fonction soit mise sous la forme suivante,

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \&c.$$

$Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, &c. étant des fonctions rationnelles & entières de μ , $\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. \varpi$, $\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin. \varpi$, d'un ordre égal à l'indice de ces fonctions, & qui soient telles que la fonction $Y^{(i)}$, satisfasse, quel que soit i , à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{ \frac{\partial \left\{ (1 - \mu\mu) \cdot \left[\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu} \right] \right\}}{\partial \mu} \right\} + \frac{\left[\frac{\partial^2 Y^{(i)}}{\partial \varpi^2} \right]}{1 - \mu\mu} + \frac{i}{i + 1} Y^{(i)},$$

Soit enfin ρ la densité de la couche, ρ étant fonction de a ; & nommons $\alpha \phi$ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur; les conditions de l'équilibre donnent à la surface, les équations suivantes:

$$0 = Y^{(0)} \cdot f \rho \cdot \partial . a^3 - 3 \cdot f \rho \cdot \partial [a^3 Y^{(0)}] - \frac{1}{3} \phi f \rho \cdot \partial . a^3;$$

$$0 = Y^{(1)} \cdot f \rho \cdot \partial . a^3 - f \rho \cdot \partial [a^4 Y^{(1)}];$$

$$0 = Y^{(2)} \cdot f \rho \cdot \partial . a^3 - \frac{3}{7} \cdot f \rho \cdot \partial [a^5 Y^{(2)}] + \frac{1}{2} \phi (\mu^2 - \frac{1}{3}) f \rho \cdot \partial . a^3;$$

.....

$$0 = Y^{(i)} \cdot f \rho \cdot \partial . a^3 - \frac{3}{2i + 1} f \rho \cdot \partial [a^{i+3} Y^{(i)}];$$

les différentielles & les intégrales étant relatives à la variable a , & les intégrales étant prises depuis $a = 0$, jusqu'à la valeur de a à la surface, valeur que nous désignerons par l'unité.

La propriété du centre de gravité où nous fixons l'origine des rayons, donne les trois équations suivantes, en négligeant les quantités de l'ordre a^2 ,

$$0 = \iiint \rho \mu \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^4 (1 + 4 a y);$$

$$0 = \iiint \rho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi \cdot \partial a^4 (1 + 4 a y);$$

$$0 = \iiint \rho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi \cdot \partial a^4 (1 + 4 a y).$$

les troisièmes différentielles étant relatives à la variable a , & les intégrales étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$, depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$, & depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360^\circ$; ces trois équations donneront ainsi, en y substituant au lieu de y , la valeur $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \&c.$

$$0 = \iiint \rho \mu \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \times \partial \cdot [a^4 \cdot Y^{(0)} + a^4 \cdot Y^{(1)} + a^4 \cdot Y^{(2)} + \&c.]$$

$$0 = \iiint \rho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi \times \partial \cdot [a^4 \cdot Y^{(0)} + a^4 \cdot Y^{(1)} + a^4 \cdot Y^{(2)} + \&c.]$$

$$0 = \iiint \rho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi \times \partial \cdot [a^4 \cdot Y^{(0)} + a^4 \cdot Y^{(1)} + a^4 \cdot Y^{(2)} + \&c.].$$

Pour exécuter ces intégrations, je vais rappeler ici un théorème général que j'ai démontré dans l'ouvrage cité.

Si $Y^{(i)}$ & $U^{(i')}$ sont deux fonctions rationnelles & entières de μ , $\sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi$, & $\sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi$, qui satisfont aux équations à différences partielles,

$$0 = \left\{ \frac{\partial \{ (1 - \mu \mu) \cdot [\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu}] \}}{\partial \mu} \right\} + \frac{[\frac{\partial \partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2}]}{1 - \mu \mu} + i \cdot (i + 1) \cdot Y^{(i)},$$

$$0 = \left\{ \frac{\partial \{ (1 - \mu \mu) \cdot [\frac{\partial U^{(i')}}{\partial \mu}] \}}{\partial \mu} \right\} + \frac{[\frac{\partial \partial U^{(i')}}{\partial \varpi^2}]}{1 - \mu \mu} + i' \cdot (i' + 1) \cdot U^{(i')},$$

on aura lorsque les nombres i & i' sont différens,

$$0 = \iint Y^{(i)} \cdot U^{(i')} \cdot d\mu \cdot d\varpi,$$

les intégrales étant prises depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$, & depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360$ degrés.

Il suit de-là que, $\mu, \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. \varpi$, & $\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin. \varpi$, étant de la forme $U^{(i)}$, les trois équations précédentes deviennent

$$0 = \iiint \rho \cdot d\mu \cdot d\varpi \cdot d. [a^4 \cdot Y^{(i)}];$$

$$0 = \iiint \rho \cdot d\mu \cdot d\varpi \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. \varpi \cdot d. [a^4 \cdot Y^{(i)}];$$

$$0 = \iiint \rho \cdot d\mu \cdot d\varpi \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin. \varpi \cdot d. [a^4 \cdot Y^{(i)}].$$

Ces intégrales paroissent supposer la connoissance de $Y^{(i)}$, dans l'intérieur du sphéroïde; mais on peut, au moyen des équations précédentes de l'équilibre, les ramener à ne dépendre que de la valeur de $Y^{(i)}$, à la surface extérieure; en effet la seconde de ces équations donne

$$\int \rho \cdot d. [a^4 Y^{(i)}] = Y^{(i)} \cdot \int \rho \cdot d. a^3,$$

la valeur de $Y^{(i)}$ dans ce second membre étant relative à la surface extérieure; on aura donc

$$0 = \iint \mu \cdot d\mu \cdot d\varpi \cdot Y^{(i)}$$

$$0 = \iint d\mu \cdot d\varpi \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. \varpi \cdot Y^{(i)};$$

$$0 = \iint d\mu \cdot d\varpi \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin. \varpi \cdot Y^{(i)}.$$

$Y^{(i)}$ est de cette forme

$$H \cdot \mu + H' \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. \varpi + H'' \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin. \varpi;$$

en substituant cette valeur dans ces trois équations, on aura $H = 0$, $H' = 0$, $H'' = 0$, partant $Y^{(i)} = 0$. On voit ainsi que si l'origine des rayons est au centre de gravité du sphéroïde, le rayon à la surface extérieure sera

$$1 + a \cdot [Y^{(0)} + Y^{(2)} + Y^{(4)} + \&c.];$$

D ij

& comme $\alpha Y^{(a)}$ est une constante, on pourra la supposer comprise dans la constante α que nous avons prise pour l'unité, ce qui donne à l'expression du rayon à la surface, cette forme plus simple,

$$1 + \alpha \{ Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c. \}$$

V I I.

L'ÉQUILIBRE permanent du globe terrestre peut nous éclairer encore sur la nature des rayons menés de son centre de gravité, à sa surface. Si cette Planète ne tournoit pas exactement, ou du moins à très-peu-près, autour d'un de ses trois axes principaux; il en résulteroit dans la position de son axe de rotation, des oscillations qui deviendroient sensibles par les changemens de la hauteur du Pôle; & comme les observations les plus précises n'en font apercevoir aucun, nous devons en conclure que depuis long-temps, toutes les parties de la Terre, & principalement les parties fluides de sa surface, se sont disposées de manière à rendre stable, l'axe de la Terre, & par conséquent leur état d'équilibre. Il est en effet très-naturel de penser qu'après un grand nombre d'oscillations, elles ont dû se fixer à cet état, en vertu des résistances en tout genre qu'elles éprouvent; voyons maintenant la condition qui en résulte dans l'expression du rayon terrestre.

Si l'on nomme x' , y' , z' , les coordonnées d'une molécule ∂M de la Terre, ses trois axes principaux étant ceux même des coordonnées dont nous fixons l'origine à son centre de gravité; on aura par la propriété de ces axes,

$$0 = \int x' y' \cdot \partial M; \quad 0 = \int x' \cdot z' \cdot \partial M; \quad 0 = \int y' z' \cdot \partial M;$$

mais $\alpha \cdot (1 + \alpha y)$ étant le rayon d'une couche terrestre, on a

$$\begin{aligned} x' &= \alpha \cdot (1 + \alpha y) \cdot \mu \cdot \bar{x} \\ y' &= \alpha \cdot (1 + \alpha y) \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi; \\ z' &= \alpha \cdot (1 + \alpha y) \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi; \end{aligned}$$

d'ailleurs,

$$\partial M = -\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 (1 + \alpha y)^3;$$

on aura donc

$$0 = \iiint \rho \cdot \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 (1 + 5 \alpha y);$$

$$0 = \iiint \rho \cdot \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 (1 + 5 \alpha y);$$

$$0 = \iiint \rho \cdot (1 - \mu^2) \cdot \sin. 2 \varpi \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 (1 + 5 \alpha y);$$

les dernières différentielles étant relatives à la variable a , & les intégrales étant prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$; depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = -1$; & depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 360$ degrés.

Les quantités

$$\mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi; \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi;$$

$$(1 - \mu^2) \cdot \sin. 2 \varpi,$$

sont comprises dans la forme $U^{(2)}$; en substituant donc au lieu de y , la valeur $Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$ les trois équations précédentes se réduiront aux suivantes, en vertu du théorème énoncé ci-dessus,

$$0 = \iiint \rho \cdot \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial [a^5 \cdot Y^{(2)}];$$

$$0 = \iiint \rho \cdot \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial [a^5 \cdot Y^{(2)}];$$

$$0 = \iiint \rho \cdot (1 - \mu^2) \cdot \sin. 2 \varpi \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial [a^5 \cdot Y^{(2)}].$$

On peut exécuter les intégrations relatives à la variable a , au moyen des équations précédentes de l'équilibre, qui donnent

$$\int \rho \cdot \partial (a^5 Y^{(2)}) = \frac{5}{3} \cdot Y^{(2)} \cdot \int \rho \cdot \partial a^3 + \frac{5}{6} \cdot \rho \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3}) \cdot \int \rho \cdot \partial a^3,$$

la valeur de $Y^{(2)}$ du second membre de cette équation étant relative à la surface; on aura ainsi

$$0 = \iint \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot Y^{(2)} \cdot \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \cos. \varpi;$$

$$0 = \iint \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot Y^{(2)} \cdot \mu \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)} \cdot \sin. \varpi;$$

$$0 = \iint \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot Y^{(2)} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \sin. 2 \varpi.$$

Ces équations sont indépendantes de la constitution intérieure de la Terre, & se rapportent uniquement à sa surface. La valeur de $Y^{(2)}$ est de cette forme,

$$H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + H^I.\mu.\nu(1 - \mu^2).\sin.\varpi \\ + H^{II}.\mu.\nu(1 - \mu^2).\cos.\varpi + H^{III}.(1 - \mu^2).\sin.2\varpi \\ + H^{IV}.(1 - \mu^2).\cos.2\varpi;$$

en la substituant dans les équations précédentes, on aura

$$H = 0, H^I = 0, H^{III} = 0,$$

ce qui réduit $Y^{(2)}$ à cette forme,

$$H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + H^{IV}.(1 - \mu^2).\cos.2\varpi.$$

Telle est la condition qui résulte de la supposition que la Terre tourne autour d'un de ses axes principaux; mais les constantes H, H^{IV} , & les fonctions $Y^{(3)}, Y^{(4)}$, &c. restent indéterminées. Voyons ce que les autres phénomènes dépendans de la figure de la Terre, nous apprennent sur leur nature.

V I I L

J'AI fait voir dans l'Ouvrage cité, que les trois expressions du rayon terrestre, de la longueur du pendule à secondes, & du degré du Méridien, étoient liées entr'elles de la manière suivante.

$$1 + \alpha.[Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} \dots + Y^{(i)} + \&c.]$$

étant l'expression du rayon mené du centre de gravité de la Terre à sa surface; si l'on nomme l la longueur du pendule à secondes, on aura

$$l = L + \alpha L.[Y^{(2)} + 2Y^{(3)} + 3Y^{(4)} \dots + (i-1).Y^{(i)} + \&c.] \\ + \frac{5}{2}.\alpha L.\varphi.(\mu^2 - \frac{1}{3}),$$

L étant une constante que l'on déterminera par l'observation.

Si l'on nomme ensuite, c le degré d'un cercle dont le rayon est ce que nous avons pris pour l'unité; l'expression générale du degré du Méridien fera

$$c - 6ac.Y^{(2)} - 12ac.Y^{(3)} \dots - i.(i+1).ac.Y^{(i)} - \&c. \\ + ac.\partial. \frac{\{\mu.Y^{(2)} + \mu.Y^{(3)} \dots + \mu.Y^{(i)} + \&c.\}}{\partial \mu} \\ - ac. \frac{\{\partial\partial. \frac{[Y^{(2)} + Y^{(3)} \dots + Y^{(i)}]}{\partial \omega^2}\}}{1 - \mu\mu}.$$

Nous avons vu dans l'article IV, que les observations sur la longueur du pendule à secondes, donnent à très-peu-près,

$$l = 439^{\text{lignes}}, 30 + 2^{\text{lignes}}, 438.\mu^2,$$

ou ce qui revient au même,

$$l = 440^{\text{lignes}}, 113 + 2^{\text{lignes}}, 438.(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

En comparant cette expression de l à la précédente, on voit 1.^o que la quantité

$$aL.[2Y^{(3)} + 3.Y^{(4)} \dots + (i-1).Y^{(i)} + \&c.]$$

est insensible relativement à la quantité

$$aL.Y^{(2)} + \frac{5}{2}aL.\phi.(\mu^2 - \frac{1}{3});$$

d'où il suit qu'à plus forte raison, dans l'expression du rayon terrestre, la quantité

$$a.[Y^{(3)} + Y^{(4)} \dots + Y^{(i)} + \&c.]$$

est insensible relativement au terme $aY^{(2)}$; 2.^o que l'on a à très-peu-près,

$$L = 440^{\text{lignes}}, 113,$$

$$aL.Y^{(2)} + \frac{5}{2}aL.\phi.(\mu^2 - \frac{1}{3}) = 2^{\text{lignes}}, 438.(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

L'observation donne $a\phi = \frac{1}{289}$, & par conséquent

$\frac{5}{2} \alpha \varphi = 0,0086505$; on aura donc

$$\alpha Y^{(2)} = - 0,003111.(\mu^2 - \frac{1}{3});$$

en sorte que le rayon du sphéroïde terrestre est à très-peu-près

$$1 - 0,003111.(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

Ce rayon est celui de l'ellipsoïde de révolution, dans lequel les deux axes sont dans le rapport de 320 à 321; on peut ainsi calculer les variations des rayons terrestres & de la pesanteur, dans la supposition où la figure de la Terre seroit celle d'un semblable ellipsoïde.

Les observations de la longueur du pendule repandent, comme l'on voit, un grand jour sur la nature des rayons terrestres; elles font voir, non-seulement que dans la fonction $Y^{(2)}$ qui, par l'article précédent, se réduit à cette forme, $H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + H^{IV}.(1 - \mu\mu) \cdot \cos. 2\varphi$, le coefficient H^{IV} est très-petit relativement à H ; mais encore, que les termes $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. sont insensibles relativement à $Y^{(2)}$, en les multipliant même par leurs indices respectifs, 3, 4, &c.

I X.

Si ces termes étoient nuls, la variation des degrés du Méridien, suivroit, comme celle de la pesanteur, la loi du carré du sinus de la latitude; mais puisque cette loi ne peut (article III) se concilier avec les observations, il en faut conclure que les fonctions $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. qui sont insensibles dans les expressions du rayon terrestre & de la pesanteur, ne sont cependant pas nulles, & qu'elles deviennent sensibles dans l'expression des degrés des Méridiens. Cela peut avoir lieu d'une infinité de manières; si l'on suppose, par exemple, que

$$1 + \alpha H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha Y^{(2)}$$

soit l'expression du rayon terrestre; l'expression de la longueur l du pendule à secondes, sera par l'article précédent,

$$l = L. \{ 1 + \alpha (H + \frac{5}{2} \varphi).(\mu^2 - \frac{1}{3}) + (i - 1). \alpha Y^{(2)} \};$$

&c

& l'expression du degré du Méridien sera

$$c + \frac{2}{3} \alpha c . H - 3 \alpha c . H . (\mu^2 - \frac{1}{3}) - i . (i + 1) . \alpha c . Y^{(i)} \\ + \alpha c . \frac{\partial . [\mu Y^{(i)}]}{\partial \mu} - \alpha c . \frac{\frac{[\partial \partial Y^{(i)}]}{\partial \varpi^2}}{1 - \mu \mu} .$$

Nommons λ le rapport du terme $\alpha Y^{(i)}$ qui écarte l'expression du rayon terrestre de la loi du carré du sinus de la latitude, au terme $\alpha H . (\mu^2 - \frac{1}{3})$; il est aisé de voir par l'article précédent, que $H + \frac{5}{2} \phi$, est à peu-près, $-\frac{7}{4} . H$, & qu'ainsi le rapport du terme $(i + 1) . \alpha . L . Y^{(i)}$, au terme $\alpha L . (H + \frac{5}{2} \phi) . (\mu^2 - \frac{1}{3})$, dans l'expression de la longueur du pendule, est à peu-près, $-\frac{4}{7} . (i + 1) . \lambda$.

Le rapport du terme $- i . (i + 1) . \alpha c . Y^{(i)}$, de l'expression du degré du Méridien, au terme $- 3 \alpha c . H . (\mu^2 - \frac{1}{3})$, est $\frac{i . (i + 1)}{3} . \lambda$, & il est possible par la manière dont la longitude ϖ entre dans la fonction $Y^{(i)}$, que la quantité entière

$$- i . (i + 1) . \alpha c . Y^{(i)} + \alpha c . \frac{\partial . [\mu Y^{(i)}]}{\partial \mu} - \alpha c . \frac{\frac{[\partial \partial Y^{(i)}]}{\partial \varpi^2}}{1 - \mu \mu} .$$

qui écarte la variation des degrés, de la loi du carré du sinus de la latitude, ait un plus grand rapport au terme $- 3 \alpha c . H . (\mu^2 - \frac{1}{3})$.

Maintenant, si l'on suppose que les nombres λ , $-\frac{4}{7} \times (i + 1) . \lambda$, & $\frac{i . (i + 1)}{3} . \lambda$, expriment les rapports des quantités qui éloignent les expressions du rayon, de la longueur du pendule & du degré du Méridien, de la loi du carré du sinus de la latitude, aux termes qui suivent cette loi dans ces expressions; il est visible que pour rendre λ , & $-\frac{4}{7} . (i + 1) . \lambda$, peu sensibles relativement à $\frac{i . (i + 1)}{3} . \lambda$,

Mém. 1783.

E

il suffit de prendre i égal ou plus grand que 6; car en le supposant, par exemple, égal à 6, les trois nombres précédens deviendront, λ , — $\frac{20}{7} \cdot \lambda$, $14 \cdot \lambda$; c'est-à-dire, que les variations des degrés s'écarteront environ cinq fois plus de la loi du carré du sinus de la latitude, que celles de la pesanteur, ce qui est plus que suffisant pour satisfaire aux observations.

Il faudroit un grand nombre de mesures des degrés, faites avec beaucoup de précision, pour déterminer la nature des fonctions Y^u , Y^{i+u} &c. mais il nous suffit ici d'avoir expliqué pourquoi les variations de la pesanteur suivent à très-peu-près la loi du carré du sinus de la latitude, tandis que les variations des degrés s'en écartent d'une manière sensible: ce phénomène remarquable tient à ce que les termes de l'expression du rayon, qui s'écartent de cette loi, sont différenciées une seule fois dans l'expression de la pesanteur, & subsistent deux différentiations dans l'expression du degré du Méridien; & il arrive que ces termes peu sensibles en eux-mêmes & par une première différentiation, deviennent sensibles par une seconde différentiation.

Nous voilà donc conduits à ce résultat intéressant; savoir, que dans toutes les recherches où l'on ne fait usage que des rayons terrestres & de leurs premières différences, on peut sans erreur sensible, supposer que la Terre est un ellipsoïde de révolution dont les axes sont dans le rapport de 320 à 321; que cette hypothèse est fort approchée relativement aux rayons terrestres; qu'elle l'est un peu moins, relativement à leurs premières différences; que cependant l'erreur est presque insensible: mais que leurs secondes différences s'écartent sensiblement de celles qui résultent de cette hypothèse, & que c'est la raison pour laquelle les degrés du Méridien qui sont donnés par les secondes différences des rayons terrestres, s'éloignent de la loi du carré du sinus de la latitude.

X.

LA théorie des parallaxes ne dépend que des rayons

terrestres & de leurs premières différences: si l'on nomme v , la hauteur d'un Astre au-dessus de l'horizon; s , la distance au centre de gravité de la Terre; $1 + \alpha y$, le rayon mené de ce centre à l'observateur, α étant un très-petit coëfficient, & y étant une fonction quelconque de la longitude & de la latitude; si l'on représente ensuite par γ , la parallaxe, & par ∂q , l'élément de la courbe que forme l'intersection de la surface du sphéroïde terrestre, par le vertical de l'Astre; il est facile de s'assurer qu'en négligeant les quantités de l'ordre α^2 , on aura

$$\sin. \gamma = \frac{(1 + \alpha y)}{s} \cdot \cos. v - \alpha \frac{(\frac{\partial y}{\partial q}) \cdot \sin. v}{s};$$

∂y étant la différence des valeurs de y correspondantes aux extrémités de l'arc ∂q .

Si la parallaxe est horizontale, $v = 90^\circ$, & dans ce cas

$\sin. \gamma = \frac{1 + \alpha y}{s}$; les parallaxes horizontales ne dépendent donc que des rayons terrestres; mais les autres parallaxes dépendent encore des premières différences de ces rayons.

De-là & de l'article précédent, il suit que l'on peut calculer sans erreur sensible, les Éclipses, & tous les phénomènes dépendans des parallaxes, dans la supposition où la Terre est un ellipsoïde de révolution dont les axes sont dans le rapport de 320 à 321; quant à la manière de faire entrer l'ellipticité de la Terre dans le calcul de ces phénomènes, la méthode dont M. du Séjour a fait usage dans ses savans Mémoires sur les Éclipses, me paroît être la plus directe, la plus générale & la plus simple que l'on puisse désirer.

X I.

LE phénomène le plus remarquable qui dépende de la figure & de la constitution de la Terre, est celui de la précession des Équinoxes, & de la nutation de l'axe terrestre; il est d'autant plus important d'examiner comment il se lie avec les

déterminations précédentes, qu'il est incompatible avec l'ellipticité $\frac{1}{178}$ que l'on a supposée à la Terre, d'après les mesures des degrés de France & du Nord. Dans son bel Ouvrage sur la précession des Équinoxes, M. d'Alembert a observé que quelques hypothèses que l'on fasse sur la densité des couches terrestres supposées elliptiques, il est impossible de concilier l'ellipticité $\frac{1}{178}$ à la surface, avec les quantités

observées de la précession & de la nutation : ce grand Géomètre n'a pas cru cependant devoir abandonner l'hypothèse de l'ellipticité de la Terre; mais il pense que cette Planète étant recouverte en grande partie par la mer, ce fluide ne peut pas, à raison de sa mobilité, influencer sur la précession & la nutation; & qu'ainsi, dans le calcul de ces phénomènes, on ne doit tenir compte que de l'action du Soleil & de la Lune sur le noyau solide que la mer recouvre. On peut former alors sur l'aplatissement de ce noyau, une infinité d'hypothèses qui concilient les quantités observées de la précession & de la nutation, avec l'ellipticité $\frac{1}{178}$ à la surface

de la mer; mais ayant déterminé avec soin les oscillations de la mer, & la réaction sur le noyau terrestre, j'ai fait voir qu'il ne falloit pas la négliger dans la théorie de la précession & de la nutation; que les quantités de ces deux mouvemens sont exactement les mêmes que si la mer formoit une masse solide avec la Terre, & que cela est généralement vrai, quelles que soient la figure de la Terre & la loi de la profondeur de la mer. On voit ainsi que la difficulté élevée par M. d'Alembert, contre l'ellipticité de la Terre, subsiste en entier, & que pour la résoudre, il faut nécessairement rejeter l'hypothèse elliptique dans le calcul des degrés des Méridiens, ce qui vient à l'appui de ce que nous avons dit sur cet objet dans l'article III. Voyons maintenant si l'expression du rayon terrestre

$$r = 0,003111.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + aY^{(3)} + aY^{(4)} + \&c.$$

qui par l'article *VIII*, résulte des observations de la longueur du pendule, satisfait aux phénomènes de la précession & de la nutation. Sans se donner la peine de les calculer de nouveau, on peut aisément parvenir aux résultats que donne cette expression, par les considérations suivantes.

XII.

LE mouvement de l'axe d'une Planète autour de son centre de gravité, dépend, comme l'on sait, des momens d'inertie de la Planète, par rapport aux plans de ses trois axes principaux, & des momens des forces perturbatrices. Considérons d'abord les momens d'inertie de la Planète, par rapport aux plans de ses axes principaux.

$a \cdot (1 + \alpha y)$ étant le rayon d'une couche de la Planète, l'expression d'une molécule élémentaire sera

$$-\frac{1}{3} \cdot \varrho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 \cdot (1 + \alpha y)^3,$$

la dernière différentielle étant relative à la variable a . On aura les momens d'inertie de cette molécule par rapport aux plans de ses trois axes principaux, en multipliant son expression par les carrés de ses distances à ces plans, c'est-à-dire par $a^2 \cdot (1 + \alpha y)^2 \cdot \mu^2$; $a^2 \cdot (1 + \alpha y)^2 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \cos. \varpi^2$; $a^2 \cdot (1 + \alpha y)^2 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \sin. \varpi^2$; d'où il est facile de conclure que les momens d'inertie de la Planète entière sont, en négligeant les quantités de l'ordre α^2 ,

$$-\frac{1}{5} \cdot \iiint \varrho \cdot \mu^2 \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^5 (1 + \alpha y);$$

$$-\frac{1}{5} \cdot \iiint \varrho \cdot (1 - \mu^2) \cdot \cos. \varpi^2 \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^5 (1 + \alpha y);$$

$$-\frac{1}{5} \cdot \iiint \varrho \cdot (1 - \mu^2) \cdot \sin. \varpi^2 \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^5 (1 + \alpha y).$$

Les quantités, μ^2 , $(1 - \mu^2) \cdot \cos. \varpi^2$, $(1 - \mu^2) \cdot \sin. \varpi^2$, sont réductibles à des quantités de cette forme $U^{(0)} + U^{(2)}$; il faut donc par le théorème de l'article *VI*, ne considérer dans y , que les termes $Y^{(0)}$ & $Y^{(2)}$; mais le terme $Y^{(0)}$ étant constant, il peut être censé compris dans la constante a ; les momens précédens deviendront ainsi:

$$— \frac{1}{5} . \iiint \varrho . \mu^2 . \partial \mu . \partial \varpi . \partial . a^5 [1 + 5 \alpha Y^{(2)}] ;$$

$$— \frac{1}{5} . \iiint \varrho . (1 - \mu^2) . \cos . \varpi^2 . \partial \mu . \partial \varpi . \partial . a^5 [1 + 5 \alpha Y^{(2)}] ;$$

$$— \frac{1}{5} . \iiint \varrho . (1 - \mu^2) . \sin . \varpi^2 . \partial \mu . \partial \varpi . \partial . a^5 [1 + 5 \alpha Y^{(2)}] .$$

On a par l'article $V_1 I$,

$$— \alpha \int \varrho . \partial [a^5 Y^{(2)}] = — [\frac{5}{6} \alpha \phi . (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \frac{5}{3} \alpha Y^{(2)}] . \int \varrho . \partial . a^3 ,$$

la valeur de $\alpha . Y^{(2)}$ du second membre de cette équation étant relative à la surface; cette valeur pour la Terre est par l'art. *VIII*, égale à $— 0,003111 . (\mu^2 - \frac{1}{3})$; en désignant donc par A , la constante $(0,005185 - \frac{5}{6} \alpha . \phi) . \int \varrho . \partial a^3$, on aura pour les momens d'inertie de la Terre par rapport aux plans de ses axes principaux,

$$\frac{4 \pi}{15} . \int \varrho . \partial . a^5 — \frac{16 \pi}{45} . A ;$$

$$\frac{4 \pi}{15} . \int \varrho . \partial . a^5 + \frac{8 \pi}{45} . A ;$$

$$\frac{4 \pi}{15} . \int \varrho . \partial . a^5 + \frac{8 \pi}{45} . A .$$

On peut facilement, au moyen de l'analyse précédente, déterminer la nature des solides homogènes dont tous les axes passant par leur centre de gravité, sont des axes principaux de rotation; pour cela, soit R , le rayon mené de ce centre à une molécule quelconque ∂M du solide; on aura

$$\partial M = — R^2 . \partial R . \partial \mu . \partial \varpi ;$$

d'où il est aisé de conclure que les momens d'inertie du solide, relativement aux plans de ses trois axes principaux, sont

$$— \iiint R^4 . \partial R . \mu^2 . \partial \mu . \partial \varpi ;$$

$$— \iiint R^4 . \partial R . (1 - \mu^2) . \cos . \varpi^2 . \partial \mu . \partial \varpi$$

$$— \iiint R^4 . \partial R . (1 - \mu^2) . \sin . \varpi^2 . \partial \mu . \partial \varpi .$$

Si l'on exécute les intégrations relatives à R , & que l'on

nomme R^1 le rayon R prolongé jusqu'à la surface, ces trois momens deviendront

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{5} \iint R^{1^5} \cdot \mu^2 \cdot \partial \mu \partial \varpi; \\ & - \frac{1}{5} \iint R^{1^5} (1 - \mu^2) \cdot \cos. \varpi^2 \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \\ & - \frac{1}{5} \iint R^{1^5} (1 - \mu^2) \cdot \sin. \varpi^2 \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi. \end{aligned}$$

Maintenant, on fait que si ces momens sont égaux entr'eux, tous les axes du corps qui passent par son centre de gravité, seront des axes principaux de rotation; or, il est clair par ce qui précède, que cette égalité aura lieu, si la valeur de R^{1^5} peut être mise sous cette forme

$$R^{1^5} = Y^{(0)} + Y^{(2)} + Y^{(4)} + Y^{(6)} + \&c.$$

c'est-à-dire, si la fonction $Y^{(2)}$ dispaçoit de l'expression de R^{1^5} . Telle est donc l'équation générale des sphéroïdes homogènes dont tous les axes passant par le centre de gravité, sont des axes principaux de rotation, & l'on voit que la sphère n'est pas le seul solide qui jouisse de cette propriété.

X I I I.

CONSIDÉRONs présentement les momens de forces perturbatrices: si l'on nomme S la masse d'un Astre quelconque éloigné de la Planète; s la distance des centres de gravité de ces deux corps, que nous supposons très-grande relativement à a ; ν l'angle que forme s avec l'axe des x , & ψ l'angle que forme le plan des s & des x , avec celui des x & des y ; si l'on décompose ensuite l'action de S sur une molécule de la Planète, parallèlement aux trois axes des x , des y & des z , & que l'on en retranche les forces parallèles aux mêmes axes, qui sollicitent le centre de gravité de la Planète; on aura les trois forces suivantes,

$$\begin{aligned} & a \cdot (1 + ay) \cdot \frac{S}{s^3} \cdot \{ (3 \cdot \cos. \nu^2 - 1) \cdot \mu + 3 \cdot \sin. \nu \cdot \cos. \nu \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. (\varpi - \psi) \}; \\ & a \cdot (1 + ay) \cdot \frac{S}{s^3} \cdot \{ 3 \mu \cdot \sin. \nu \cdot \cos. \nu \cdot \cos. \psi - \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos. \varpi \\ & \quad + 3 \cdot \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin. \nu^2 \cdot \cos. \psi \cdot \cos. (\varpi - \psi) \}; \end{aligned}$$

$$a.(1+ay) \cdot \frac{S}{s^3} \cdot \left\{ 3 \mu \cdot \sin. v \cdot \cos. v \cdot \sin. \psi - \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \sin. \varpi + 3 \cdot \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \sin. v^2 \cdot \sin. \psi \cdot \cos. (\varpi - \psi) \right\}.$$

Pour avoir les momens de ces forces, il faut les multiplier par la masse de la molécule qui est égale à

$$= \frac{1}{3} \cdot \varrho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 (1+ay)^3;$$

Il faut multiplier ensuite respectivement ces produits par les distances de chaque force aux plans qui lui sont parallèles. Ces distances sont

$$a.(1+ay) \cdot \mu, \quad a.(1+ay) \cdot \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \cos. \varpi, \\ a.(1+ay) \cdot \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \sin. \varpi;$$

les momens des forces seront par conséquent de cette forme,

$$R \cdot \varrho \cdot \partial \mu \cdot \partial \varpi \cdot \partial a^3 (1+ay),$$

R étant une fonction de

$$\mu, \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \cos. \varpi, \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \sin. \varpi,$$

comprise dans la forme $U^{(0)} + U^{(2)}$; il faut ainsi par le théorème de l'article VI, ne considérer dans l'expression de y , que le terme $Y^{(2)}$; or on a par l'article précédent,

$$\int \varrho \cdot \partial a^3 Y^{(2)} = \left[\frac{5}{6} \varphi \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \frac{5}{3} Y^{(2)} \right] \cdot \int \varrho \cdot \partial a^3,$$

$Y^{(2)}$ dans le second membre de cette équation, étant relatif à la surface; on réduira donc les momens précédens, à ne dépendre que de cette valeur de $Y^{(2)}$ & des intégrales $\int \varrho \cdot \partial a^3$, & $\int \varrho \cdot \partial a^5$, prises depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$. Ce résultat est conforme à celui auquel nous sommes parvenus dans l'article précédent, sur les momens d'inertie; d'où il suit que relativement à la Terre, tous ces momens sont les mêmes que ceux d'un ellipsoïde de révolution, dans lequel les densités des couches suivent la même loi que les densités des couches terrestres, & dont le rayon de la surface extérieure est $1 - 0,003111 \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})$. Ainsi, les quantités de la précession & de la nutation doivent être exactement

exactement les mêmes que celles que l'on obtient, en supposant à cette Planète, la figure d'un semblable ellipsoïde.

X I V.

J'AI déterminé ailleurs, dans cette hypothèse, les phénomènes de la précession & de la nutation (*Mémoires de l'Académie, année 1776, pages 250 & suivantes*), & je suis parvenu aux résultats suivans.

Si l'on nomme q l'ellipticité de la Terre à sa surface extérieure, & que l'on suppose

$$E = \frac{(2q - \alpha \varphi) \cdot f p a^2 \cdot \delta a}{f p a^4 \cdot \delta a};$$

si de plus, on nomme S la masse du Soleil, s sa moyenne distance à la Terre; L la masse de la Lune, & l sa moyenne distance à la Terre; si l'on prend ensuite pour unité de temps un jour sydéral, & que l'on nomme n & m les temps des révolutions du Soleil & du nœud de l'orbite Lunaire; enfin si l'on nomme ϵ l'obliquité de l'Écliptique, & c la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire; la précession moyenne annuelle des Équinoxes sera

$$\frac{3}{4} n E \cdot \cos. \epsilon \left(\frac{S}{s^3} + \frac{L}{l^3} \right) \cdot 360 \text{ degrés},$$

& l'étendue entière de la nutation de l'axe terrestre, sera

$$\frac{3 m \cdot c \cdot E}{2 \pi} \cdot \cos. \epsilon \cdot \frac{L}{l^3} \cdot 180 \text{ degrés}.$$

Les observations donnent

$$\epsilon = 23^{\text{d}} 28' 10'',$$

$$c = \text{tang. } 5^{\text{d}} 9' 8'',$$

$$\text{Log. } n = 2,5637679,$$

$$\text{Log. } m = 3,8335817.$$

La précession moyenne annuelle des Équinoxes est de $50'' \frac{1}{3}$, & si cette détermination est fautive, ce ne peut être que

Mém. 1783.

F

d'une petite fraction de secondes, parce que l'accroissement à très-peu-près uniforme de la précession permet de répartir sur un grand intervalle les erreurs inévitables des observations. Suivant M. Bradley, l'étendue entière de la nutation est de $18''$; mais comme une petite erreur peut s'être glissée dans cette détermination, nous supposerons la nutation de $18'' \cdot (1 + \gamma)$; nous aurons, cela posé, les deux équations suivantes,

$$E \cdot \left\{ \frac{S}{s^3} + \frac{L}{l^3} \right\} = 0,000\,000\,154143;$$

$$E \cdot \frac{L}{l^3} = 0,000\,000\,103189 \cdot (1 + \gamma);$$

d'où l'on tire,

$$\frac{S}{s^3} = \frac{(0,4938 - \gamma)}{1 + \gamma} \cdot \frac{L}{l^3}.$$

Si la nutation étoit exactement de $18''$, on auroit $\gamma = 0$, & par conséquent

$$\frac{S}{s^3} = 0,4938 \cdot \frac{L}{l^3};$$

l'effet de l'action du Soleil sur la précession seroit donc à peu-près la moitié de celui de la Lune. M. Daniel Bernoulli suppose ces deux effets dans le rapport de 2 à 5, d'après les observations des marées; cette supposition donne environ $\gamma = \frac{1}{5}$; la nutation seroit ainsi de $19'' \cdot 2$, c'est-à-dire, de $1'' \cdot 2$ plus grande que suivant M. Bradley. Une aussi petite différence est très-difficile à connoître par l'observation; & si l'on considère l'incertitude des observations sur les marées, il doit paroître surprenant que la quantité de la nutation tirée de ce phénomène, s'éloigne aussi peu du résultat de l'observation directe.

Les équations précédentes donnent

$$q = \frac{1}{2} \alpha \phi + 0,000000154143 \cdot \frac{(0,4938 - \gamma)}{2,9876 \cdot \frac{S}{f^3}} \cdot \frac{f p \cdot a^4 \cdot \partial a}{f p \cdot a^2 \cdot \partial a};$$

mais on a par la théorie des forces centrales,

$$\frac{f}{f^3} = \frac{1}{n^2}; \frac{1}{2} a \varphi = \frac{1}{578} :$$

partant

$$q = 0,0017301 \\ + (0,0034173 - \gamma \cdot 0,0069205) \cdot \frac{\int \rho \cdot a^4 \cdot da}{\int \rho \cdot a^2 \cdot da}.$$

La valeur de q dépend de celle de γ & de la loi de densité des couches du sphéroïde terrestre; mais quelle que soit cette loi, il est visible que a étant moindre que l'unité, $\rho a^4 da$ est moindre que $\rho a^2 da$, & qu'ainsi la fraction $\frac{\int \rho a^4 da}{\int \rho a^2 da}$ est au-dessous de l'unité. Elle seroit égale à l'unité, si la Terre étant creusée dans son intérieur, toute sa masse étoit à sa surface; elle seroit nulle, si la masse de la Terre étoit réunie à son centre de gravité; les deux limites de q sont par conséquent

$$0,0017301; 0,0051474 - \gamma \cdot 0,0069205.$$

Nous avons vu dans l'article VIII, que la valeur de q , donnée par les observations de la longueur du pendule, est égale à 0,003111; elle est donc entre les limites précédentes; d'où il suit que les phénomènes de la précession, de la nutation, de la variation de la pesanteur, & du flux & reflux de la Mer, sont parfaitement d'accord entr'eux.

X V.

Si la densité de la Terre étoit constante du centre à la surface, on auroit $\frac{\int \rho a^4 da}{\int \rho a^2 da} = \frac{2}{5}$; partant

$$q = 0,0037805 - \gamma \cdot 0,0041523.$$

Cette quantité est plus grande que 0,003111, en employant même la valeur de γ , donnée par les observations des marées; ainsi la Terre est plus dense à son centre qu'à la surface.

La comparaison des deux valeurs de q , tirées des observations du pendule & des mouvemens de l'axe terrestre, donne la limite de la plus petite densité moyenne que l'on puisse supposer à la Terre; car ces valeurs étant

$$q = 0,003111,$$

$$q = 0,0017301 + (0,0034173 - \gamma \cdot 0,0069205) \cdot \frac{\int p a^4 \partial a}{\int p a^2 \partial a},$$

il est aisé d'en conclure

$$\int p a^2 \partial a = (2,4747 - \gamma \cdot 5,0116) \cdot \int p a^4 \partial a.$$

Or, si l'on nomme q^1 la densité d'une couche du sphéroïde terrestre vers la surface, le rapport de la densité moyenne de ce sphéroïde à la densité de cette couche, sera $\frac{\int p a^2 \partial a}{\int p^1 a^2 \partial a}$; il sera donc égal à

$$(2,4747 - \gamma \cdot 5,0116) \cdot \frac{\int p a^4 \partial a}{\int p^1 a^2 \partial a}.$$

Maintenant, la supposition la plus naturelle que l'on puisse faire sur la loi des densités des couches terrestres, est celle d'une densité croissante de la surface au centre. Dans ce cas, q est toujours plus grand que q^1 , ce qui donne $\frac{\int p a^4 \partial a}{\int p^1 a^2 \partial a} > \frac{3}{2}$; la moyenne densité de la Terre est par conséquent au-dessus de

$$(1,52482 - \gamma \cdot 3,00696) \cdot q^1.$$

Si $\gamma = 0$, cette quantité surpasse $\frac{3}{2} q^1$; ainsi la moyenne densité du globe terrestre est, dans ce cas, au moins $\frac{3}{2}$ de la densité des couches dans laquelle nous pouvons pénétrer, & il est vraisemblable qu'elle est beaucoup plus grande.

X V I.

POUR mieux saisir l'ensemble des phénomènes qui tiennent à la figure de la Terre, & leur accord avec le principe de la pesanteur universelle, rappelons en peu de mots les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce Mémoire, sur la nature des rayons terrestres.

L'expression du rayon d'un sphéroïde quelconque très-peu différent d'une sphère, peut être mise sous cette forme,

$$1 + a.[Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.]$$

Si l'on fixe relativement à la Terre, l'origine de ce rayon au centre de gravité de cette Planète, les conditions de l'équilibre de la Mer donneront $Y^{(1)} = 0$, & réduiront par conséquent l'expression du rayon terrestre à cette forme,

$$1 + a.[Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.].$$

L'état permanent de l'équilibre de la Mer, exige que l'axe de rotation de la Terre soit un de ses axes principaux, & pour cela il faut que $Y^{(2)}$ soit de cette forme,

$$H.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + H'.(1 - \mu^2) \cdot \cos. 2\varpi,$$

H & H' étant deux constantes que l'observation seule peut déterminer, & qui dépendent de la constitution du globe terrestre.

Ces résultats sont les seuls que fournit l'état permanent de l'équilibre de la Terre; ils sont communs à tous les corps célestes que recouvre un fluide en équilibre. Les observations sur la longueur du pendule à secondes, ont porté plus loin nos connoissances sur la nature du rayon terrestre; elles nous ont appris que la constante H est à très-peu-près, égale à $-0,003111$; que la constante H' est nulle, ou du moins insensible relativement à H ; que la quantité $Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$ est pareillement très-petite relativement à $Y^{(2)}$; qu'il en est de même des premières différences de cette quantité, par rapport à celles de $Y^{(2)}$; & qu'ainsi l'on peut, dans le calcul du rayon terrestre & de ses premières différences, lui supposer sans erreur sensible, cette forme

$$1 - 0,003111.(\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

Les mesures des degrés des Méridiens, ont fait voir que cette supposition ne peut pas s'étendre aux secondes différences du rayon terrestre, & que la fonction $Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$

devient sensible par une seconde différenciation ; mais elles sont encore insuffisantes pour déterminer cette fonction.

Le phénomène de la précession des équinoxes & de la nutation de l'axe terrestre, ne dépend que de $Y^{(2)}$; il ne détermine pas la valeur de H , mais il donne les limites entre lesquelles cette valeur doit être comprise : la valeur que l'on trouve par la loi des variations de la pesanteur, tombe entre ces limites ; elle indique de plus une diminution dans la densité des couches terrestres, depuis le centre jusqu'à la surface, sans nous instruire cependant de la véritable loi de cette diminution dont l'existence est prouvée d'ailleurs, soit par la stabilité de l'équilibre de la Mer, soit par le peu d'action des montagnes sur le fil à-plomb, soit enfin par les principes d'Hydrostatique, qui exigent que si la Terre a été primitivement fluide, les parties voisines du centre soient en même-temps les plus denses.

On voit ainsi que chaque phénomène dépendant de la figure de la Terre, fournit de nouvelles lumières sur la nature du rayon terrestre, & qu'ils sont tous parfaitement d'accord entr'eux. Ils ne suffisent pas à la vérité pour nous faire connoître la constitution de la Terre, mais ils indiquent l'hypothèse la plus vraisemblable, celle d'une densité décroissante du centre à la surface. La loi de la pesanteur universelle est donc la vraie cause de ces phénomènes ; & si elle ne s'y manifeste pas d'une manière aussi précisée que dans les mouvemens célestes, cela vient de ce que les inégalités de la force attractive des Planètes, qui tiennent à leur constitution intérieure, disparaissent à de grandes distances, & ne laissent apercevoir que le simple phénomène de la tendance mutuelle de ces corps vers leurs centres de gravité.



OBSERVATIONS

FAITES EN 1782, AU SOLSTICE D'ÉTÉ,
AU GNOMON ET VERRE OBJECTIF
DE SAINT-SULPICE.

Par M. LE MONNIER.

LE 20 Juin, à midi, l'image du Soleil rasoit à peine, au nord, le trait gravé sur le marbre, lequel est le plus proche du pied du style ou du gnomon de Saint-Sulpice.

22 Juin
1782.

Et quant à l'autre bord de l'image, elle débordoit le trait gravé, assez sensiblement du côté de l'obélisque, lequel est situé vers la partie septentrionale de la Méridienne (*Voyez les Mémoires de 1762 & 1774*).

Le 21 Juin, le ciel fut couvert de nuages.

Le 22 au matin, on a vu l'image du Soleil très-vive, & beaucoup plus nette que le 20 à midi, indépendamment des soins extraordinaires qu'on a apportés à tenir le marbre & l'objectif également purgés de tout ce qui pouvoit nuire à la splendeur de l'image: or, l'effet de la nutation depuis 1774, a été bien sensible; à midi, le bord de l'image le plus proche du pied du style, a rasé, au nord, le trait gravé, & par les traces au crayon qu'on a relevées, cette image se trouvoit pour l'autre bord, à 0^{line} $\frac{1}{2}$ ou 8", distante du second trait autrefois gravé vers la partie septentrionale de la Méridienne. Mais j'ai fait voir en 1764, pourquoi les deux bords de l'image ne se trouvoient pas également distans des traits gravés sur le marbre: en effet, le bord opposé de l'image ne rasoit plus le second trait gravé & opposé vers le nord, & il en étoit distant, du côté de l'obélisque, d'une demi-ligne précisément; l'action des deux

grosses Planètes n'auroit donc pas dans ces deux cas-là été sensible : cette observation n'a pas anticipé de six mois la conjonction de nos deux grosses Planètes, Jupiter & Saturne ; au lieu qu'en 1774 & 1764, lorsque la nutation de l'axe étoit la plus petite, & dans le second cas la plus grande, comme elle l'est actuellement, l'opposition & la conjonction des deux grosses Planètes avoit déjà anticipé, depuis une & deux années, lesdites observations.



M É M O I R E

Sur l'usage des Horloges marines , relativement à la Navigation , & sur-tout à la Géographie , où l'on détermine la différence en longitude de quelques points des îles Antilles & des côtes de l'Amérique septentrionale , avec le Fort-royal de la Martinique , ou avec le Cap - françois de Saint-Domingue , par des Observations faites pendant la campagne de M. le Comte d'Estaing, en 1778 & 1779 , & celle de M. le Comte de Grasse , en 1781 & 1782.

Par M. le Marquis DE CHABERT.

LES Savans qui ont été chargés d'éprouver des Horloges marines, ont constaté par la publication de leurs expériences , qu'on parvient à en construire qui surpassent l'exactitude exigée pour la solution du problème de la Longitude, & qu'on est en état, au moyen de cette découverte, de jouir pour la Navigation, du grand avantage dans la vue duquel le Parlement d'Angleterre avoit promis une somme considérable.

Cet avantage consiste, comme on sait, à trouver la Longitude en mer , avec la précision au moins d'un demi-degré au bout de quarante-deux jours de route, c'est-à-dire, sans craindre plus de quatre à huit lieues d'erreur, suivant le parallèle sur lequel on atterrit, après une traversée peut-être de douze à quinze cents lieues, pendant que par l'estime ordinaire du chemin, l'erreur des Pilotes monte quelquefois jusqu'à cent lieues.

Mém. 1783.

Lû à
l'Assemblée
publique
de Pâques
1783.

Exactitude
des horloges
marines, constatée par les
expériences.

Degré d'exactitude exigé pour la solution du problème de la longitude,

Quel sujet de tranquillité pour un Capitaine de Vaisseau atterissant pendant l'hiver aux côtes de Bretagne ; & combien n'a-t-on pas de raisons d'ailleurs de se féliciter de la découverte des Horloges marines, si l'on envisage les occasions où, en temps de guerre, elles peuvent être essentiellement utiles pour le bien de l'État & le succès des armes du Roi !

Avantages
qu'on peut en
tirer pour le
succès des
expéditions
en temps de
guerre.

Un Officier chargé d'une expédition, pourra en effet, avec le secours de la connoissance certaine de la Longitude, rendre sa route, vers le lieu où il doit agir, plus courte de tout le temps que l'estime des Pilotes lui auroit fait perdre en tâtonnemens, & par-là primer ou surprendre l'Ennemi.

S'il escorte un convoi, cette même assurance de la longitude lui fournira peut-être le moyen d'échapper à l'Ennemi en force & supposé en croisière aux approches du Port où il doit aborder, en suspendant sa route à une certaine distance de la côte, afin d'attendre, pour atterir, une circonstance de vent qui ait dû en faire retirer l'Ennemi.

Enfin, s'il est chargé d'une croisière importante, il se rendra directement au parage ordonné, & s'y arrêtera à la longitude de la distance de terre où il convient qu'il se tienne, & où les horloges lui apprendront qu'il est, sans qu'il soit obligé, pour s'en assurer, d'aller reconnoître la terre, & de courir le risque d'être découvert.

Motifs qui me
déterminèrent
à en
embarquer.

C'est afin d'être en état d'offrir à mes Généraux ce moyen d'assurance pour la direction des routes de leur armée, que j'embarquai des horloges marines sur le vaisseau *le Vaillant* que je commandois en 1778 & 1779, sous les ordres de M. le Comte d'Estaing, & sur le vaisseau *le Saint-Esprit* en 1781 & 1782, sous les ordres de M. le Comte de Grasse. La satisfaction qu'ils ont bien voulu me témoigner de ce que je leur avois signalé ma longitude par observation lorsqu'ils l'avoient désiré, m'a amplement dédommagé de mes soins pendant quatre ans pour la conduite des horloges, pour la connoissance de leur marche à toutes les relâches, & pour le calcul des observations.

Un motif également puissant me porta à me charger de la conduite & de l'usage des horloges pendant ces deux campagnes, c'étoit l'espérance que la justesse des attérages qui auroit été généralement reconnue par la publicité de mes signaux de longitude, exciteroit le zèle d'un grand nombre d'Officiers très-instruits à s'empresse à l'avenir de se rendre doublement utiles, en remplissant cette nouvelle partie de service en même temps que les fonctions de leur grade, d'autant que les observations pour la longitude se concilient toujours avec le courant du service, comme les plus simples opérations du pilotage.

Leur emploi est presque aussi facile que les opérations ordinaires du pilotage.

Je suis même persuadé que l'utilité reconnue des horloges marines, engagera le Gouvernement à multiplier ce moyen de sûreté pour la navigation des Vaisseaux du Roi, & qu'on parviendra bientôt à y faire participer les Bâtimens de commerce.

C'est encore dans la vue d'épargner aux Marins chargés de la conduite & de l'usage des horloges, la fastidieuse écriture continuelle de l'énoncé des articles de calculs, que je les ai fait imprimer dans l'ordre où ils doivent être, & dans autant de tableaux en forme de calculs que l'usage des horloges marines peut en occasionner; persuadé d'ailleurs que des Pilotes qui n'auroient même que les connoissances ordinaires, pourroient, à l'aide de ces tableaux, conduire des horloges, observer & calculer la longitude, en faisant les observations comme elles y sont indiquées, & en remplissant le blanc de chaque article.

Secours pour ceux qui sont chargés de ces horloges.

Je me borne à rapporter quelques circonstances où les Horloges ont été utiles à nos navigations.

Vers le milieu de la traversée de M. le Comte d'Estaing, de Toulon à la Delaware, mes longitudes observées par le moyen des Horloges, ainsi que celles que M. le Chevalier de Borda concluoit des mesures de distances de la Lune au Soleil, qu'il prenoit exprès dans le même temps avec son cercle à réflexion, & qui s'accordoient avec les miennes à un quart de degré près, firent connoître que les longitudes,

Exemples de leur utilité pour la navigation.

suivant l'estime des Pilotes dans les mêmes temps, étoient fautives de près de six degrés, dont leur route étoit trop peu avancée; d'où il s'ensuivit que lorsque le Général se trouva suffisamment parvenu à l'ouest de la Bermude, il passa avec sécurité du sud au nord du parallèle de cette île, pendant que ce parti auroit été encore dangereux suivant l'estime des Pilotes; & par-là, il abrégéa la fin de la traversée, déjà tort alongée par la contrariété des vents.

Lorsqu'allant de Boston à la Martinique, en Novembre 1778, M. le comte d'Estaing voulut croiser pendant quelques jours au vent de la Delirade, pour tâcher d'intercepter un convoi ennemi; il indiqua le Méridien où il jugeoit à propos de s'arrêter, sur la longitude donnée par les Horloges marines, & qui se trouva exacte.

M. le Comte de Broves, ramenant de Savannah à Brest ou à l'Orient, à la fin de 1779, quelques Vaisseaux, du nombre desquels étoit le *Vaillant*, l'atterrage qui résulta de ma longitude par les horloges, signalée à l'approche de terre, fut reconnu exact trop généralement pour le passer sous silence.

L'atterrage de Brest à la Martinique, avec l'armée de M. le Comte de Grasse, au commencement de Mai 1781, fut indiqué par les horloges à un tiers de degré, après un intervalle de plus de six semaines.

Celui du cap François, île de Saint-Domingue, au cap Henri, à l'entrée de la baie de Chélapéak, avec la même armée, à la fin d'Août suivant, fut très-exact relativement aux meilleures Cartes, ce qui nous prouva que par l'effet du courant du canal de Bahama, où l'armée venoit de passer, nous avions été portés dans l'est de 2 degrés $\frac{1}{2}$ plus que suivant l'estime.

On peut, avec les horloges marines, mesurer assez exactement la direction & la vitesse des courans,

Je dois rapporter encore, que dans nos navigations des deux campagnes, lorsque nous avons traversé la partie de mer, où ce courant est très-sensible, les horloges marines m'ont fourni le moyen d'en mesurer assez exactement la direction & la vitesse, en comparant la route & le chemin

d'un midi à celui du lendemain, résultant du concert de deux observations de longitude & de deux observations de latitude, avec la route & le chemin du même jour, résultant de l'estime ordinaire du Pilote.

Je fis ces observations à quatre époques différentes; 1.^o en Juillet 1778, en traversant le courant avec M. le Comte d'Estaing, du sud-est au nord-ouest, vers les 35.^e & 37.^e degré de latitude, & le 73.^e & le 77.^e degré de longitude, Méridien de Paris; 2.^o en le traversant avec le même Général, en Août & Septembre 1779, du sud-est au nord-ouest, vers les 30.^e & 31.^e degré de latitude, & les 75.^e & 78.^e degré de longitude; 3.^o en Novembre de la même année, en le traversant de l'ouest à l'est, par les mêmes latitudes & longitudes; 4.^o enfin en Août 1781, avec M. le Comte de Grasse, en suivant le fil de ce courant depuis le canal même de Bahama jusqu'à l'attérage de la Chélapéak.

Dans la première circonstance, je trouvai qu'entre les parallèles de 34 degrés $\frac{2}{3}$ & 35 degrés $\frac{1}{3}$, par la longitude de 73 à 74 degrés $\frac{1}{2}$, le courant commençoit à devenir sensible, & qu'il faisoit environ un tiers de mille par heure, dans la direction de l'ouest à l'est; qu'entre les parallèles de 35 degrés $\frac{1}{2}$ à 37 degrés $\frac{1}{3}$, par la longitude de 74 degrés $\frac{1}{2}$ à 76 degrés $\frac{3}{4}$, la vitesse étoit d'un mille par heure dans la direction nord-est; enfin qu'entre ce dernier terme & la côte de Virginie, il y a un retour de courant qui se fait parallèlement à la côte.

Dans la seconde circonstance, j'observai d'abord un contre-courant opposé en direction à celle du courant de Bahama, par la latitude de 29 degrés $\frac{1}{2}$ & la longitude de 78 degrés $\frac{1}{2}$; ensuite j'entrai dans le vrai courant, dont je trouvai sur le même parallèle, & par la longitude de 80 degrés $\frac{1}{2}$ à 82 degrés, la direction nord-est, & la vitesse seulement de demi-mille par heure; & entre les parallèles de 29 degrés $\frac{1}{2}$ & 31 degrés $\frac{1}{3}$, par la longitude de 82 degrés à 82 degrés $\frac{3}{4}$, je déterminai la direction nord quelques degrés Est, & la vitesse un mille dans une heure: enfin, à mesure

que je m'approchai de la côte, je remarquai encore le contre-courant au sud, qui est sur-tout fort sensible au mouillage devant Savanah & tout le long de la côte de Géorgie.

A la troisième époque, en Novembre 1779, je déterminai que, sur le parallèle de 31 degrés $\frac{1}{4}$ & par la longitude de 83 degrés à 80 degrés $\frac{1}{2}$, la direction étoit est-nord-est, & la vitesse un peu moins d'un mille par heure; que par la même latitude & par la longitude de 81 degrés $\frac{1}{2}$ à 79 degrés $\frac{3}{4}$, la direction étoit de l'ouest à l'est quelques degrés nord, & la vitesse un mille à l'heure. Je trouvai ensuite que la limite australe de ce courant étoit par la latitude de 30 degrés $\frac{1}{2}$, & la longitude de 79 degrés $\frac{1}{2}$, & j'y observai le même contre-courant que j'avois déjà remarqué en Août de la même année; il faisoit environ un mille à l'heure à l'ouest-nord-ouest, ce qui fut confirmé par les observations que je fis plusieurs jours de suite sur le même parallèle, & jusqu'au $78.^e$ degré $\frac{1}{2}$ de longitude.

'Plus grande
vitesse
du courant
de Bahama,
trouvée de
3 milles $\frac{1}{2}$
par heure.

Dans la quatrième & dernière circonstance, en Août 1781, je déterminai par des observations répétées tous les jours, que depuis l'entrée sud du canal de Bahama jusqu'à la latitude de 30 degrés, la vitesse du courant étoit d'un peu plus de trois milles, & jusqu'à trois milles & demi par heure, & qu'à la sortie du Canal, la direction commençoit à s'incliner légèrement du nord vers l'est. Depuis la latitude de 30 degrés jusqu'à celle de 35 , & entre les longitudes de 82 degrés $\frac{1}{2}$ & 76 degrés, la direction du courant fut trouvée nord-est, c'est-à-dire, parallèle aux côtes de la Caroline, la vitesse depuis trois milles jusqu'à deux milles en une heure; enfin par le $36.^e$ degré de latitude, & le $76.^e$ de longitude, je trouvai l'effet du courant à-peu-près nul; ainsi l'on peut y fixer la limite ouest. De-là jusqu'au cap Henri, j'observai de nouveau le contre-courant, qui faisoit demi-mille à l'heure.

M. Franklin a fait tracer, il y a quelques années, sur une petite Carte (a), la direction & la vitesse successives du

(a) Cette Carte se trouve chez le Rouge.

courant du canal de Bahama, à mesure qu'il s'avance dans l'Océan atlantique, d'après les remarques qu'il avoit recueillies des Navigateurs américains. J'y ai vu, avec une grande satisfaction, l'opinion de ce célèbre Physicien, confirmer l'idée que j'avois eue plus de vingt ans auparavant (b), que ce courant devoit s'incliner vers le sud-est, lorsqu'il rencontroit celui qui sort du golfe de Saint-Laurent; à cela près que j'imaginai alors, comme je le crois encore, que la force des eaux du fleuve de Saint-Laurent, n'annule pas tout-à-coup la direction du courant du canal de Bahama, & que ces eaux ne font que commencer l'inflexion, laquelle, quoique toujours augmentée par la descente des eaux des grandes Baies du nord, n'empêche pas que le courant de Bahama ne continue de s'étendre dans le nord-est jusque vers les Açores, ainsi que je l'éprouvois en 1750, mais en s'élargissant à mesure qu'il s'affoiblit; de sorte que par cette composition de mouvement & de direction, il embrasse un plus grand espace de Mer, en se recourbant toujours jusqu'aux côtes d'Afrique, où il vient remplacer les eaux que le vent alizé transporte continuellement vers l'ouest. Quant à la vitesse de ce courant, les résultats de mes observations montrent seulement que je ne l'ai pas trouvée aussi grande qu'elle est marquée sur la Carte de M. Franklin.

Opinion
sur
l'inclinaison
de ce courant
à la rencontre
des eaux du
fleuve
Saint-Laurent
& autres,
confirmée par
M. Franklin.

On se propose de publier au Dépôt de la Marine, une Carte de la partie de l'Océan, comprise entre les Antilles, les côtes des États-Unis & celles du sud de Terre-Neuve, où mes observations sur la vitesse & la direction du courant du canal de Bahama, seront rapportées.

Dans chacune de ces campagnes, j'avois embarqué deux Horloges, ainsi qu'il est presque indispensable; savoir, en 1778, celles désignées par N.^o 17, à poids, & N.^o 3, à ressort; & en 1781, par N.^o 22, à poids, & N.^o 2, à ressort, toutes inventées & construites par M. Ferdinand Berthoud.

(b) Voyage de l'Amérique septentrionale en 1750 & 1751, pages 17, 21 & 23.

Les deux horloges à poids n'ont pas conservé la régularité de leur mouvement, & ont fini par cesser entièrement de me servir, la première à l'époque du combat devant la Grenade, & la seconde à celle du combat devant la baie de Chésapeak; les bragues des canons de 24 de la seconde batterie s'étant rompues pendant l'action, les affûts, dans leur recul, heurtèrent contre les armoires qui renfermoient les horloges, & ont dû, par la violence d'un tel choc, en déranger le mécanisme.

On auroit pu prévenir cet accident, en les descendant à la cale, comme celles à ressort, à l'approche des combats, mais on ne peut déplacer ainsi les horloges à poids, sans courir le risque de les arrêter.

Inconvénient
des horloges à
poids; on croit
qu'il seroit plus
avantageux de
n'en
construire qu'à
ressort.

Cet inconvénient me fait penser qu'il conviendrait de n'en construire qu'à ressort, & du moindre volume possible, sans nuire à leur exactitude, d'autant que le transport des premières par terre est très-embarrassant par leur grandeur, & que par leur construction elles sont exposées à être totalement détruites, si, par la négligence des Rouliers auxquels on est forcé de les abandonner, elles sont renversées, ainsi qu'il arriva malheureusement à l'excellente horloge, n.^o 8, qui m'étoit envoyée avec n.^o 3, comme les plus parfaites, conséquemment aux ordres de M. le Maréchal de Castries, & au vif intérêt que ce Ministre prit à l'usage que je lui témoignois desirer d'en faire pendant la campagne de 1781.

Nécessité d'en
observer
la marche
dans le Port,
pendant deux
mois avant le
départ.

Je crois encore que pour établir la confiance qu'on peut accorder aux horloges destinées à être embarquées, il faudroit indispensablement que l'Officier qui doit en faire usage, en observât la marche dans le Port pendant deux mois avant le départ, afin de s'assurer de l'égalité de leur mouvement à diverses époques dans cet intervalle, & d'être en état de reconnoître, soit par l'épreuve du Port du premier départ, ou soit par cette épreuve, & par les nouvelles vérifications qu'on tâche de faire à chaque relâche, si l'une des horloges n'a pas la régularité requise, & dans ce cas l'abandonner.

C'est en éprouvant ainsi mes horloges, que j'ai pris le
parti

parti de ne me servir que de n.^o 3 dans la première campagne, & de n.^o 2 dans la seconde.

La marche de l'une & de l'autre s'est assez conservée telle que je l'avois d'abord éprouvée au Port du départ; j'ai remarqué seulement dans n.^o 3, un changement de marche sensible lors du combat de la Grenade, mais elle se conserva ensuite assez bien dans son nouvel état.

Uniformité
du
mouvement
des deux
horloges
à ressort, assez
bien soutenue.

J'ai été encore plus content de la seconde, puisqu'elle m'a toujours donné la longitude à un quart ou un tiers de degré près dans mes plus longues traversées; je suis cependant obligé d'excepter celle de mon retour de Saint-Domingue en France; mais la quantité d'environ deux degrés & demi, trouvée à l'arrivée à Groix, en arrière du Vaisseau, est trop extraordinaire pour être une erreur réelle, & pour que je ne l'attribue pas à quelque inadvertance qu'on m'aura cachée, & qui aura produit une interruption de mouvement d'environ 9 minutes $\frac{1}{4}$, bien plutôt qu'à un dérangement de marche qui n'est ni probable ni croyable, après une régularité si constante pendant quinze mois, & sans la moindre cause visible qui ait pu occasionner un tel dérangement.

On voit, par ce que je viens de dire de l'exactitude des deux horloges dont je me suis successivement servi, qu'il est tout simple que je leur aie accordé ma confiance dans les circonstances que j'ai citées relativement à la navigation; & l'on conviendra que j'ai été encore plus fondé à les employer avec tout succès pour la Géographie, à raison du peu de temps qu'il y a toujours eu dans mon trajet de l'un à l'autre des lieux dont j'ai déterminé la différence des méridiens, & de l'exclusion que j'ai donnée à toute détermination dépendante d'un nombre de jours d'intervalle qui n'auroit plus permis de compter sur la grande précision que procurent toujours les horloges marines employées à cet usage avec ces précautions.

Réserve
avec laquelle
on doit faire
usage des
horloges
marines, pour
les détermina-
tions géogra-
phiques.

Les horloges marines sont en effet si avantageuses pour la perfection de la Géographie dans ses détails, que je ne crains pas de dire qu'on a plus trouvé par la découverte de cette

La découverte
des horloges
marines est au
moins aussi
utile pour la

Mém. 1783.

H

Géographie
que pour
la Navigation.

Nécessité
de
perfectionner
les Cartes.

sorte d'instrument, que l'on n'avoit osé demander en proposant le problème de la longitude; je puis même ajouter que ce problème ne pouvoit être d'une utilité réelle, qu'autant qu'on auroit trouvé auparavant un moyen exact & prompt de porter les Cartes marines au même degré de perfection que celle que l'on demandoit pour la connoissance de la longitude en mer; car, à quoi serviroit pour la sécurité du Navigateur, de connoître la position de son Vaisseau sur le globe à un demi-degré près, si les Cartes sur lesquelles il est obligé de rapporter cette position, ne pouvoient de long-temps, par les méthodes ordinaires astronomiques & nautiques, devenir des tableaux qui lui représsentassent avec autant d'exactitude, les terres dont il a en vue de s'approcher, & les dangers qu'il a intérêt d'éviter?

C'est ce besoin pressant d'avancer promptement la Géographie, qui m'inspira, dès ma jeunesse, le projet de faire des observations Astronomiques dans tous les lieux où je pourrois aborder, & qui me donna l'espérance d'être suivi dans cette carrière par d'autres Officiers de Marine qui, comme moi, sentiroient qu'ils étoient infiniment plus à portée que les Astronomes par état, de porter ce flambeau sur toutes les côtes du Globe.

Cependant les phénomènes Astronomiques, par leur rareté & les difficultés qu'ils entraînent, rendoient le moyen trop lent, même encore lorsqu'on put les multiplier beaucoup par la méthode que la nécessité me fit imaginer en 1764 (c), d'observer facilement dans les voyages l'ascension droite de la Lune, en donnant le moyen d'établir promptement l'instrument des passages dans la direction du méridien.

Raisons
qui me firent
différer
mon travail
sur l'archipel
de la

D'après cela on pouvoit dire, comme je l'avantai en 1766 (d), que nous serions toujours forcés de nous contenter d'un très-petit nombre de déterminations jusqu'au temps où l'exécution des horloges marines nous fourniroit des

(c) Mémoires de l'Académie, 1766, page 384.

(d) Idem, page 385.

moyens prompts & sûrs de multiplier les observations de longitude à terre ainsi qu'à la mer. Aussi avois-je réservé pour la fin de mon entreprise sur la Méditerranée, le travail à faire dans l'Archipel, où tous les moyens astronomiques & géodésiques ne pouvoient suffire, ni même se pratiquer, & où les horloges marines devoient remplir mon objet avec plus d'exactitude & de célérité dans l'exécution, avantage qu'elles auront toutes les fois qu'on aura à déterminer les positions respectives d'une grande quantité de lieux peu distans les uns des autres.

Méditerranée,
jusqu'à
l'exécution
des horloges
marines.

C'est encore ce qui me fit concevoir l'espérance, en embarquant dans mes deux dernières campagnes, des horloges marines pour la Navigation, de rencontrer au milieu des opérations de guerre, des occasions de les employer aussi utilement pour la Géographie, soit en donnant quelque suite à mes premiers travaux sur les côtes de l'Amérique septentrionale, soit en ajoutant quelques déterminations à celles des Antilles & des débouquemens de Saint-Domingue, dont nous avons déjà l'obligation à M.^s de Fleurieu, de Verdun, de Borda & Pingré.

La première longitude que l'horloge marine, n.^o 3, me donna le moyen de déterminer en 1778, à notre arrivée avec M. le Comte d'Estaing aux côtes de l'Amérique septentrionale, fut celle du cap Hinlopen, à l'entrée de la Delaware, le 7 Juillet, de 77^d 33'. On sera sans doute étonné de m'entendre rapporter cette longitude, dans l'idée que c'est sur la foi d'une horloge marine, sachant que je n'avois pu vérifier sa marche depuis le 9 Avril à Toulon, & que la confiance dans cet instrument seroit trop hasardée, après quatre-vingt-neuf jours, pour une détermination géographique absolue; mais l'éclipse de Soleil du 24 Juin, que j'avois exactement observée à la mer, comparée aux correspondantes en Europe, a fait du Vaisseau un point fixe bien déterminé, d'où j'ai pu partir pour y rapporter mon observation de longitude, faite treize jours après devant le cap Hinlopen.

Exemples
de leur
application
à la
Géographie.
Longitude
du cap
Hinlopen,
à l'entrée de la
Delaware.

Le premier contact intérieur de Vénus, observé le 3 Juin

1769 à Philadelphie, par M.^{rs} Ewing & Prior (*e*), donne la longitude de cette ville, à l'occident de Paris, de $77^{\text{d}} 36'$ (*f*).

On a trouvé, par des mesures géodésiques & des directions, que la Tour-à-feu du cap Hinlopen est à l'est de Philadelphie, de $3' 30''$.

Donc longitude du cap Hinlopen, $77^{\text{d}} 32' 30''$, ce qui ne diffère que d'une demi-minute de celle que j'ai déterminée par les horloges marines.

On trouveroit une plus grande différence si l'on adoptoit la longitude de Philadelphie, telle que M. Ewing l'établit d'après quelques éclipses de satellites de Jupiter, observées en 1767, 1768 & 1769, par lui-même, & par M.^{rs} Prior, Thompson, Pearson, &c. car en comparant ces Éclipses aux calculs du Nautical-almanach, corrigés par quelques observations de Gréenwich, M. Ewing conclut que Philadelphie est à l'ouest de Gréenwich, de $75^{\text{d}} 8' 45''$ (*g*). C'est par rapport à Paris, $77^{\text{d}} 27' 45''$; & comme le cap Hinlopen est moins occidental de $3' 30''$, la longitude du cap Hinlopen seroit, selon cette combinaison, de $77^{\text{d}} 24' 15''$, ce qui différeroit de ma détermination de $8' 45''$.

Mais il me semble que la longitude de Philadelphie, fondée sur le passage de Vénus, doit être préférée à celle conclue par les éclipses de Satellites, qui n'ont pas eu de correspondantes directes à Gréenwich ou ailleurs.

Latitude de la
tour-à-feu
de la
Delaware.

La latitude de la Tour-à-feu de l'entrée de la Delaware, d'après ma hauteur méridienne du Soleil, observée à bord au mouillage, fut de $38^{\text{d}} 45' \frac{1}{2}$.

Différence
en longitude
entre la tour
de la
Delaware
& celle de
Sandy-Hook.

Ayant passé de la baie de la Delaware à la rade en dehors de Sandy-Hook près New-York, j'eus occasion d'y vérifier la marche de l'horloge, & par-là d'établir avec précision la différence en longitude de la Tour-à-feu de Sandy-Hook

(*e*) Les observations de M.^{rs} Ewing, Prior, &c. se trouvent dans le premier tome des Transactions américaines de Philadelphie.

(*f*) D'après les calculs de M. Pingré, Mémoires de l'Académie, 1772, première partie, page 409.
(*g*) Tranfact. américaines, t. I.^{er}

avec le cap Hinlopen & la Tour-à-feu de la Delaware, de 59 minutes $\frac{3}{4}$. Il résulte par conséquent de cette différence que la longitude absolue de Sandy-Hook est de $76^{\text{d}} 33'$.

Mais on trouve par les plans, que New-York est moins occidental que la Tour de Sandy-Hook, de $1' 30''$.

Donc la longitude de la ville de New-York, sera de $76^{\text{d}} 31' 30''$.

On avoit déjà, pour déterminer la longitude de New-York, trois émersions & une immersion du premier satellite de Jupiter, observées par M. Burnet. M. Bradley en avoit conclu, en comparant deux de ces émersions aux Tables corrigées par des observations faites par lui vers le même temps, que New-York étoit à l'ouest de Londres, de $74^{\text{d}} 4' (h)$, c'est-à-dire, du méridien de Paris, $76^{\text{d}} 29' \frac{1}{2}$.

Mais en comparant les quatre observations de M. Burnet, aux Tables de M. Wargentin, corrigées par les observations les plus voisines, faites en Europe, on trouve la longitude de New-York à l'ouest de Paris, de $76^{\text{d}} 31'$, ce qui ne diffère que d'une demi-minute de celle que je lui assigne par les horloges marines.

La latitude de la Tour-à-feu de Sandy-Hook, conclue de trois hauteurs méridiennes exactes, est de $40^{\text{d}} 25'$.

Latitude
de la tour de
Sandy-Hook.

La latitude de Boston aux ruines de la Tour-à-feu qui est sur un îlet de la droite, à l'entrée de la rade de Nantasket, de $42^{\text{d}} 20' 6''$, & celle du Fanal d'alarme, sur le plus haut terrain de la Ville, de $42^{\text{d}} 22' 11''$, résultent des observations que je fis avec mon quart-de-cercle astronomique, de plus de 2 pieds de rayon, en Octobre 1778, sur l'île Pettick pendant notre séjour dans cette rade, & que je rapportai à ces deux points par des opérations géodésiques; les Anglois donnoient la latitude de la ville de Boston, de $42^{\text{d}} 25'$.

Latitude
de l'entrée
de la rade
de Boston.

(h) Transactions philosophiques, N.^o 394, page 85.

Pendant la traversée de l'armée de M. le Comte d'Estaing, du Cap-François de Saint-Domingue à la côte de Georgie, devant Savanah, après avoir débouqué par le canal de Krooked, j'observai le 23 Août 1779, la latitude du Vaisseau, lorsqu'il étoit en vue de Wattelin, petite île voisine de ce débouquement du côté du nord-ouest, mais à environ six lieues plus nord que l'île, suivant l'estime de la distance, par conséquent dans une position trop désavantageuse pour espérer d'en conclure une latitude exacte de cette île; je la déduisis néanmoins de $24^{\text{d}} 7' \frac{3}{4}$ pour le plus haut de l'île: on ne se dissimule pas, en effet, que cette latitude peut être affectée de toute l'erreur qu'il est difficile d'éviter dans l'estime d'une si grande distance; mais la différence considérable de cette latitude avec celle de la Carte de M.^{rs} de Verdun, de Borda & Pingré, m'engage à la produire, d'autant que ces Messieurs n'avoient aucune observation pour la déterminer (i).

Latitude
de l'île
de Wattelin,
au débouque-
ment de
Krooked.

Longitude
de la tour-à-feu
de Savanah.

L'armée étant arrivée devant la Tour-à-feu de l'île Tibée, à l'entrée de la rivière de Savanah, je déterminai par les observations des 9 & 10 Septembre, la différence en longitude entre le Cap-François, île de Saint-Domingue, & cette Tour, & je la trouvai à l'ouest, de $8^{\text{d}} 38'$.

Latitude
de cette Tour.

La latitude de la même Tour, par trois hauteurs

(i) Depuis la lecture de ce Mémoire, & avant son impression, M. le Comte de Lage de Volude, Enseigne de Vaisseau, m'a communiqué une observation de latitude, qu'il eut occasion de faire le 13 Juillet 1784, devant la pointe sud-est de l'île de Wattelin, n'en étant qu'à une lieue de distance, & presque est & ouest; il fixa la latitude de cette Pointe à $23^{\text{d}} 54' \frac{2}{3}$, ce qui, d'après son estime, donneroit pour le plus haut de Wattelin, $24^{\text{d}} 0' \frac{2}{3}$, ou $7'$ de moins que par mon observation, faite à une grande distance; à la vérité l'on remarque qu'au jour de l'observation de M. de Lage, le

Soleil étoit élevé de $87^{\text{d}} \frac{1}{2}$, & l'on fait combien une telle hauteur méridienne est difficile à bien observer; cependant, comme ma latitude, rapportée à la pointe sud-est, que déterminait M. de Lage, surpasse celle de la Carte des débouquemens de Saint-Domingue, de M.^{rs} de Verdun, de Borda & Pingré, de $12' \frac{1}{3}$, & que celle de M. de Lage est aussi plus grande de $6' \frac{1}{3}$, il paroît certain qu'il faut augmenter sur cette Carte la latitude de la pointe sud-est de Wattelin, au moins, de cette dernière quantité, ainsi que l'étendue de l'île, sur-tout du nord au sud.

méridiennes du Soleil, observées à bord, & exactes, est de $32^{\text{d}} 0' \frac{3}{4}$.

En Juin 1781, ayant été chargé par M. le Comte de Grasse, de croiser au vent de Tabago, avec une division dont il m'avoit confié le commandement, afin de l'avertir de l'arrivée de l'armée ennemie, pendant qu'il étoit mouillé avec la sienne sous l'île qui venoit d'être conquise, j'eus le bonheur de remplir ma commission avec succès; mais je ne trouvai plus d'occasion de déterminer la longitude de cette île que le 10 Juin, lorsque la pointe de Sable qui en est l'extrémité sud-ouest, me restoit au sud-est & à environ 7 lieues $\frac{2}{3}$ de distance; je conclus de mon observation que cette pointe est $20'$ à l'est du Fort-royal de la Martinique: mais cette position est bien délavantageuse, relativement à une pointe aussi basse, dont la véritable extrémité m'étoit dérobée par la grande distance.

Longitude
de l'extrémité
sud-ouest
de Tabago.

Le 11 Juin, la pointe nord-est de la Grenade me restant au nord-nord-ouest, je fis une observation pour en déterminer la longitude, & je trouvai qu'elle étoit de 35 minutes à l'ouest de Fort-royal de la Martinique.

Longitude
de l'extrémité
nord-est
de la Grenade.

L'Armée ayant ensuite mouillé à la rade du Fort-royal de la Grenade, je trouvai par mes observations du 13 & du 14 Juin, que ce Fort est à l'ouest de celui de la Martinique, de 42 minutes $\frac{1}{4}$, & que la pointe des Salines à l'extrémité sud-ouest de l'île est à l'ouest du Fort-royal de la Martinique de $45' \frac{3}{4}$.

Longitude
du Fort royal
de la Grenade,
& de
l'extrémité
sud-ouest
de cette île.

En partant du Cap-François de Saint-Domingue au commencement d'Août, pour la grande expédition de Virginie, je déterminai, le 6 de ce mois, en passant devant la Tortue, la différence en longitude de l'extrémité Est de cette petite île avec le Cap, & je trouvai qu'elle en est à 25 minutes $\frac{1}{4}$ du côté de l'ouest: l'observation fut faite lorsque le Vaisseau étoit presque nord & sud de l'objet déterminé, par conséquent dans la direction la plus avantageuse. Cette détermination, ajoutée à celle semblable que M.^{rs} de Verdun, de Borda & Pingré avoient déjà donnée, de $0^{\text{d}} 44'$, pour l'extrémité ouest,

Longitude
de la Tortue,
au nord
de Saint-
Domingue.

fait trouver dans la différence des deux résultats, la longueur de l'Isle de 17 milles $\frac{1}{2}$, & elle me parut être telle.

Passage
de l'armée
par le vieux
Canal au nord
de l'île
de Cube.

M. le Comte de Grasse, déterminé par un motif très-important, ne sortit pas par les débouquemens ordinaires de Saint-Domingue, il passa par le vieux canal, le long de la côte du nord de l'île de Cube, passage très-étroit & difficile par beaucoup de haut-fonds dont on est obligé de passer fort près, & qui ne sont indiqués que par de petites Isles si basses, qu'on n'en a connoissance que par leurs arbres, qui semblent presque sortir de la mer; & comme la terre de l'île de Cube dans cette partie est également basse, on ne la voit pas davantage.

Les Cartes françoises & angloises varient sur les noms & sur les gisemens de ces petites îles; j'ai pris pour la Caye Romaine la seule qui soit bien visible & reconnoissable; on l'aperçoit très-distinctement de deux à trois lieues de distance, son étendue est d'environ une lieue de long dans la direction sud-est & nord-ouest; & comme elle précède & annonce le plus étroit du vieux Canal, où tous les Géographes s'accordent à placer une autre petite île qu'ils nomment *Caye-confite*, à environ cinq lieues du nord-ouest au nord-nord-ouest de la Caye romaine, la détermination de la latitude & de la longitude de celle-ci, qui est la seule visible, devenoit très-essentielle pour la sûreté du passage.

Latitude
de la petite île
Caye romaine,
à la côte nord
de l'île
de Cube.
Sa longitude.

J'observai la latitude de son extrémité sud-est, de $22^{\text{d}} 1' \frac{1}{2}$, par deux bonnes hauteurs méridiennes du Soleil, des 13 & 14 Août; & la différence en longitude de la même pointe avec le Cap-François de Saint-Domingue, de $5^{\text{d}} 21' \frac{3}{4}$ dont elle est à l'ouest. L'observation fut faite le 14 au soir, lorsque le Vaisseau étoit exactement dans le méridien de la pointe, & à moins d'une lieue de distance.

La route du passage par le vieux canal au nord de la côte de l'île de Cube, fut terminée le 17 devant le port de Matance. C'est de la vue de ce Port, ou pour mieux dire de la montagne isolée qui en est assez près vers le sud, que prennent leur point de départ les Vaisseaux qui veulent débouquer

débouquer par le canal de Bahama; quelques-uns le prennent cependant de la pointe d'Icaque, qui est à neuf ou dix lieues plus à l'est.

Je déterminai la longitude de la pointe ouest de l'entrée du Port de Matance, que je distinguois très-bien, n'en étant qu'à une lieue deux tiers vers le nord-nord-est, & je trouvai que cette pointe est à l'ouest du Cap-François, de $9^{\text{d}} 18' \frac{1}{4}$, & qu'elle est à l'ouest de la pointe sud-est de la petite île Caye Romaine, de $3^{\text{d}} 56' \frac{1}{2}$.

Longitude
du port
de Matance,
au nord de l'île
de Cube.

Le lendemain me trouvant encore devant ce port, mais trop au large pour distinguer les pointes de l'entrée, je fis une nouvelle observation de longitude, que je rapportai au Pain-de-Matance, dont je jugeai que j'étois à environ six lieues au nord-est quart de nord; & je trouvai que la différence en longitude de cette montagne avec le Cap-François, est de $9^{\text{d}} 18' \frac{1}{2}$ à l'ouest.

Longitude
du pain
de Matance.

La longitude de Matance qui varie beaucoup dans les diverses Cartes, sans doute par l'incertitude des moyens employés pour l'établir, diffère considérablement de ma détermination; je suis cependant rassuré sur son exactitude, par l'accord des résultats de mes deux observations, d'autant qu'à mon arrivée à la baie de Chésapeak, la marche de l'horloge marine fut vérifiée & retrouvée la même qu'elle étoit au Cap-François.

C'est encore sur cette conformité que, malgré la loi que je m'étois faite d'exclure toute détermination qui dépendroit d'un long intervalle de temps depuis la vérification des horloges, je hasarde, quoiqu'après trente-quatre jours écoulés, de donner la différence en longitude du cap Henri à l'entrée de la baie de Chésapeak avec le Cap-François, de $4^{\text{d}} 13' \frac{1}{2}$ à l'ouest, par une observation faite le 5 Septembre au matin, pendant que l'on voyoit l'armée ennemie qui venoit pour nous attaquer, & que nous combattîmes dans la journée.

Longitude
du cap Henri,
à l'entrée
de la baie
de Chésapeak.

La latitude du cap Henri que j'ai établie sur plusieurs hauteurs méridiennes du Soleil, observées à bord, est de $36^{\text{d}} 57'$.

Sa latitude.

Mém. 1783.

I

Longitude
de la ville de
Basse-terre
à Saint-
Christophe.

L'expédition de Saint-Christophe me fournit l'occasion de déterminer la différence en longitude de la ville de Basse-terre, avec le Fort-royal de la Martinique; je la trouvai de $1^{\text{d}} 43' \frac{1}{2}$ à l'ouest, par deux observations des 13 & 17 Janvier 1782, faites sur le Vaisseau mouillé à demi-lieue au sud de cette ville.

Sa latitude.

J'en établis aussi la latitude de $17^{\text{d}} 19' \frac{1}{2}$, sur neuf hauteurs méridiennes du Soleil, également observées à bord.

Longitude
de la ville
des Rozeaux,
à la
Dominique.

L'armée revenant de Saint-Christophe à la Martinique, je me trouvai le 25 Février à peu-près au sud-quart-sud-ouest & à la distance de deux lieues un tiers du milieu de la ville des Rozeaux à la Dominique; je déterminai sa différence en longitude avec la ville de Basse-terre de Saint-Christophe, de $1^{\text{d}} 17'$ à l'est.

A la fin de Mai 1782, j'eus le commandement d'une Escadre, avec laquelle je fus chargé d'escorter un grand convoi du Cap-François de Saint-Domingue à l'Orient, & débouquant le 3 Juin par les îles Turques, j'eus l'occasion favorable d'observer la différence en longitude de la plus méridionale de ces îles, nommée *Sand-Key*, ou *Caye-de-sable*, avec le Cap-François; mais comme l'on pourroit craindre que cette dernière détermination ne fût affectée de l'erreur énorme en longitude trouvée à l'attérage de l'île de Groix, en la supposant progressive durant toute la traversée, au lieu d'être instantanée, comme j'ai dit que je me croyois fondé de le présumer, je m'abstiens de la publier jusqu'à ce qu'elle ait été vérifiée.



M É M O I R E

*Sur quelques particularités de la structure de la moelle
de l'Épine , & de ses enveloppes.*

Par M. SABATIER.

LA structure du cerveau & celle de ses enveloppes, ont été autrefois l'objet de mes recherches : les particularités qu'elle m'a présenté sont consignées dans un Mémoire imprimé parmi ceux des Savans Étrangers, *Volume VII*. Je me proposois dans le temps de soumettre la moelle de l'épine à un semblable examen : les circonstances où je me trouvois ne me permirent pas de suivre ce travail, qui exige des dissections nombreuses & pénibles ; je viens de le reprendre, & les remarques qui en sont le fruit, n'ayant paru mériter l'attention des Anatomistes, j'ai cru devoir les leur communiquer dans un nouveau Mémoire qui servit de suite à celui que j'ai donné précédemment.

La moelle de l'épine est le prolongement de la moelle allongée, dont elle ne diffère que par ses dimensions & par le lieu qu'elle occupe : elle descend depuis le grand trou occipital jusqu'au bas de la seconde vertèbre des lombes : sa forme est presque cylindrique ; cependant au col elle est légèrement aplatie de devant en arrière, & le long du dos on la trouve en quelque sorte quadrangulaire, étant aussi un peu aplatie sur les côtés. Sa grosseur varie dans les diverses parties de son étendue ; après avoir été d'abord assez mince, on la voit grossir vers la partie moyenne du col, diminuer de volume au-dessous de la première vertèbre du dos, redevenir plus grosse vis-à-vis la dernière, & s'amincir de nouveau pour se terminer en une pointe, de l'extrémité de laquelle part un cordon membraneux, vasculaire & transparent, formé par la pie-mère, lequel descend au milieu des nerfs qui constituent

la queue de cheval, jusqu'au-dessous de la partie moyenne de l'os sacrum, où il s'implante après s'être partagé en trois filamens très-distincts.

La moelle de l'épine paroît faite de deux gros cordons situés à droite & à gauche, & adossés dans toute leur longueur ; elle présente en effet en devant & en arrière un long sillon, plus remarquable en haut qu'en bas, & plus facile à distinguer à la face antérieure qu'à la postérieure, où on ne peut l'apercevoir qu'après avoir incisé la pie-mère dont elle est couverte. Ces sillons sont cachés par les artères & les veines spinales, qui serpentent sur les deux faces de la moelle, & d'où partent des ramifications nombreuses qui s'y enfoncent & qui s'y perdent. Lorsqu'on en écarte les bords, on y aperçoit comme des fibres qui vont d'un côté à l'autre, & que M. Petit, de Namur, a cru voir se croiser, & offrir la preuve sensible de l'entre-croisement des nerfs à leur origine, déjà présumé depuis longtemps par la constance avec laquelle les accidens qui dépendent de la lésion du cerveau & de ses parties, se manifestent du côté du corps opposé à celui qui a été blessé.

La nécessité de rendre raison de ce phénomène a sans doute fait adopter sans trop d'attention l'observation dont il s'agit, puisque M. de Haller est le seul qui ait dit que les fibres de la moelle de l'épine ont une direction transversale. Je vais plus loin, & crois pouvoir assurer non-seulement que ces fibres ne souffrent pas d'entre-croisement, mais encore qu'elles n'existent pas. Elles ne me paroissent être autre chose que le résultat de l'espèce de déchirure que souffre la moelle de l'épine, par la tension des vaisseaux qui la pénètrent. Ces vaisseaux enfermés dans le prolongement de la pie-mère qui se glisse dans ses sillons, y sont disposés parallèlement les uns aux autres & dans une direction perpendiculaire à celle de la moelle ; de sorte que ne pouvant s'étendre comme elle, ils en coupent la substance en autant de parties qu'il y a d'intervalles qui les séparent.

Cette substance, en apparence assez ferme, est cependant d'une mollesse extrême ; quand on fait une ouverture à la pie-

mère qui lui sert d'enveloppe immédiate, elle en sort sous la forme d'une bouillie assez épaisse, & semblable à de la crème : on y distingue une partie blanche & médullaire qui en fait l'extérieur, & une partie grisâtre qui est placée intérieurement, la première beaucoup plus abondante que la seconde. Il est difficile d'assigner d'une manière précise le lieu que celle-ci occupe & la forme qu'elle affecte ; on dit qu'elle représente un croissant, dont la convexité est tournée en devant. Mes observations à cet égard ne répondent point à celles des autres Anatomistes : il me semble en effet qu'elle approche assez de celle d'un H majuscule, dont les branches droite & gauche seroient courbées de manière à se regarder par leur convexité, & à présenter leur concavité vers les parties latérales de la moelle.

Pour mieux concevoir la disposition dont il s'agit, il faut remonter au développement dont cette moelle est susceptible. Si après avoir incisé la pie-mère le long de son sillon antérieur, on écarte les bords de ce sillon, on parvient à les dérouler pour ainsi dire sur leur longueur de dedans en dehors, & à obtenir une surface plate & large, dont tout le devant est couvert d'une couche mince de substance grise. Si faisant la même chose à la partie postérieure, on déroule de même les bords du sillon qui s'y trouve, on obtient une seconde surface, que la substance grise couvre avec aussi peu d'épaisseur. On croiroit qu'il y a profondément à la partie antérieure & à la partie postérieure de la moelle de l'épine, une cavité dont les parois sont rapprochées & tiennent légèrement ensemble, à peu-près comme celle des capsules atrabilaires ou des glandes sur-rénales, & telle que l'une est séparée de l'autre par une cloison fort mince & faite par la substance grise.

Ces cavités, si pourtant on peut leur donner ce nom, n'offrent donc aucun vide, & ne sont tapissées d'aucune membrane particulière ; il semble en effet que le prolongement de la pie-mère, que j'ai dit s'enfoncer dans les sillons de la moelle, n'aille pas fort avant, & qu'il abandonne bientôt les vaisseaux sanguins qu'il paroïssoit soutenir & protéger. Ceux-ci, ramifiés comme à l'ordinaire, se perdent bientôt dans la substance grise &

intérieure à laquelle ils vont aboutir. Peut-être y en a-t-il d'autres qui , traversant la substance blanche de la moelle par-tout ailleurs qu'à l'endroit des sillons dont il vient d'être parlé, se perdent également dans son épaisseur. S'il en existe, ils sont beaucoup plus petits. Généralement parlant, on peut avancer que les vaisseaux de cette partie sont bien moins gros & moins nombreux, proportion gardée, que ceux qui se distribuent au reste de la masse cérébrale, ce qui répond peu à la quantité & à la grosseur des nerfs qu'elle produit, & à l'abondance du fluide nerveux qui doit s'y porter, si c'est effectivement au moyen d'un fluide que ces organes remplissent leurs fonctions, comme on l'a supposé jusqu'à présent.

La moelle de l'épine, développée comme il vient d'être dit, semble faite de deux larges rubans, l'un antérieur & l'autre postérieur, tous deux composés de substance blanche du côté par lequel ils se touchent, & d'une lame extrêmement mince de substance grise du côté opposé. Si au contraire on applique les deux surfaces grises l'une sur l'autre, elle offre l'image de deux rubans, placés l'un à droite, l'autre à gauche, de couleur grise du côté de leur adossement, & blanche en dehors. Telle est la disposition qu'elle m'a toujours montrée, sans que j'aie jamais pu apercevoir ce vide intérieur, ce ventricule prolongé, que deux Anatomistes célèbres, M.^{rs} Sénac & Portal, ont dit y avoir rencontré. Il est vrai qu'en examinant la moelle allongée dont elle tire son origine, on croiroit voir que la pointe du *calamus scriptorius*, qui descend le long de cette moelle jusqu'à peu de distance du grand trou occipital, se continue en quelque sorte dans la partie de la moelle de l'épine qui occupe le haut du col. Un fillet, appliqué au bas de cette cavité, s'y enfonce assez aisément. L'air que l'on y pousse, à l'aide d'un tube, s'y introduit à quelques lignes de profondeur; mais ces agens ne font qu'écarter la substance molle & tendre qui forme les parois de l'espèce de cavité que j'ai dit régner le long de la face postérieure de la moelle, & les mêmes procédés donneroient les mêmes résultats par-tout, sans prouver l'existence

d'un vide réel qui pût être comparé avec les ventricules du cerveau. Cependant, comme ce vide n'a été observé que dans un fort petit nombre de circonstances, il est possible qu'il ait quelquefois lieu, & que la sérosité surabondante s'y amasse & produise une sorte d'hydropisie, dont les progrès occasionnent une maladie analogue à celle qui est connue sous le nom de *spina bifida*, ou au *spina bifida* lui-même.

Les nerfs que la moelle de l'épine produit, si on en excepte les accessoires de Willis, en tirent leur origine par deux faisceaux de fibres, l'un antérieur, l'autre postérieur, séparés par les ligamens dentelés. Ces faisceaux, plus gros à la partie inférieure du col que par-tout ailleurs, sortent de la moelle avec différentes directions. Les supérieurs ont si peu d'obliquité, qu'on les croiroit placés horizontalement; ceux qui viennent ensuite, s'inclinent de plus en plus, & les inférieurs paroissent comme perpendiculaires: quelques-uns, sur-tout au col, communiquent ensemble par des filets qui se bifurquent à peu de distance de leur origine, & dont les rameaux se joignent aux deux faisceaux entre lesquels ils se trouvent placés. Les faisceaux postérieurs ont un plus grand nombre de filets, & sont plus gros que les antérieurs; l'intervalle qui les sépare de droite à gauche est aussi plus grand.

Chacun des filets dont les nerfs vertébraux sont formés, reçoit une enveloppe de la pie-mère, & se rapprochant les uns des autres ainsi que les faisceaux qui en résultent, ils percent l'arachnoïde & la dure-mère plus ou moins loin de leur origine, après avoir glissé environ une ligne ou une ligne & demie de chemin dans une espèce de fourreau que ces deux membranes leur fournissent. Ils ont tous une ouverture particulière, séparée par une cloison fort mince; la cloison qui distingue le passage du faisceau antérieur d'avec celui du postérieur est beaucoup plus remarquable, & dans une direction parallèle à la longueur de l'épine.

Après avoir traversé cette ouverture, les filets & les faisceaux se réunissent pour former un tronc nerveux qui se renfle peu après, & produit un ganglion dont la grosseur

est proportionnée à celle du nerf auquel il appartient ; mais cette réunion n'est qu'apparente , & il est facile de voir par la dissection , que si les filets se rassemblent pour donner naissance à deux cordons qui sont la continuation , l'un du faisceau antérieur & l'autre du faisceau postérieur , ces deux cordons restent séparés dans l'épaisseur du ganglion , & qu'ils vont à leur destination sans se confondre. Celui qui appartient au faisceau postérieur va former la branche antérieure & la plus considérable des nerfs vertébraux , & celui qui appartient au faisceau antérieur produit la branche postérieure de ces nerfs.

Non-seulement la destination de ces deux cordons nerveux est différente , mais encore ils subissent diverses modifications dans le ganglion qu'ils forment. Lorsqu'ils y sont arrivés , le cordon formé par le faisceau postérieur se partage en un nombre de filets plus grand que ceux qui lui ont donné naissance , & qui s'écartent les uns des autres , & en même-temps de l'axe du nerf. Les intervalles qui les séparent sont remplis par une substance comme gélatineuse , dont la consistance est assez ferme , d'une couleur grisé-rougeâtre qui détermine celle que le ganglion offre à l'extérieur , & dont la quantité augmente jusqu'au milieu de la longueur du ganglion. Au-delà , cette substance diminue peu-à-peu en quantité : les filets nerveux qu'elle tenoit écartés se rapprochent , & à l'extrémité du ganglion ces filets se réunissent de nouveau , pour ne former qu'un seul cordon comme auparavant.

La nature & l'organisation de cette substance me sont également inconnus ; je vois seulement qu'elle a une teinte qui annonce la présence de beaucoup de vaisseaux sanguins , & que l'humidité dont elle est pénétrée doit tenir les filets nerveux qui la traversent , dans une souplesse qui sans doute leur est nécessaire. Le cordon produit par le faisceau antérieur n'éprouve pas les mêmes changemens ; il conserve sa forme & sa grosseur , & ne paroît que lié à la surface du ganglion , par la membrane qui leur est commune.

Les

Les nerfs accessoires de Willis, bien différens de ceux dont il vient d'être parlé, naissent de la moelle de l'épine entre la face postérieure des ligamens dentelés, & les faisceaux qui concourent en arrière à la formation des nerfs vertébraux. Ils sont d'abord fort minces & collés à la moelle, de laquelle ils reçoivent plusieurs filets. On dit qu'ils s'élèvent quelquefois de la partie inférieure du col, mais je n'ai jamais pu les apercevoir au-dessous de la quatrième paire cervicale, & souvent ils ne passent pas la seconde. Ces nerfs grossissent à mesure qu'ils montent, & se rapprochent en même-temps des ligamens dentelés, de sorte que quand ils sont parvenus au voisinage du grand trou occipital, ils se collent à la dure-mère comme ces ligamens, à l'endroit par où sortent les nerfs sous-occipitaux. Ils sont également adhérens à ces nerfs, & leur fournissent un filet assez gros, lorsqu'ils n'ont pas de racine postérieure. Ce filet qui forme un angle saillant du côté de l'origine des accessoires de Willis, part sensiblement de ces nerfs pour aller se joindre à ceux de la dixième paire; mais quelquefois cet angle est saillant du côté opposé, ce qui feroit croire que le filet en question vient des nerfs de la dixième paire, pour se joindre aux accessoires de Willis. Quoi qu'il en soit, ces derniers nerfs arrivés au dedans du crâne reçoivent encore de la moelle alongée de nouvelles racines qui en augmentent la grosseur, & qui sont d'autant plus longues qu'eux-mêmes sont plus élevés, parce qu'ils s'en éloignent davantage; enfin ils se rapprochent de ceux de la huitième paire sans s'y joindre, & se portent du dedans du crâne au dehors, par une ouverture différente de celle qui donne passage à ces nerfs.

La pie-mère & la dure-mère qui servent d'enveloppe aux diverses parties de la masse cérébrale, se prolongent sur la moelle de l'épine, & s'enfoncent avec elle dans le canal osseux qui la renferme. La première de ces deux membranes se montre sous un aspect différent de celui qu'elle avoit au-dedans du crâne, & sur-tout à l'extérieur du cerveau

proprement dit; les deux laines dont elle est composée , ne sont plus appliquées l'une à l'autre , & ne tiennent plus par un tissu cellulaire au milieu duquel rampent des vaisseaux sanguins ; elles sont écartées , & communiquent à peine par quelques filets ; ainsi on peut les regarder comme deux membranes distinctes , dont l'intérieure qui renferme immédiatement la moelle , conserve le nom de *pie-mère* , & l'extérieure celui d'*arachnoïde* , soit à raison de son extrême ténuité , soit eu égard aux filets qui s'élèvent de ses deux faces , & que leur disposition permet de comparer aux filets déliés qui servent de trame aux toiles d'araignées.

La *pie-mère* , plus étendue qu'il ne faut pour contenir la moelle de l'épine , fait sur ses parties latérales un pli qui règne de chaque côté sur sa longueur , & qui l'attache , d'espace en espace , au-dedans du sac de l'*arachnoïde* & de la *dure-mère* , par des filets courts & minces. Ces plis membraneux sont ce qu'on nomme les *ligamens dentelés* , on les voit naître au-dedans du crâne , près le grand trou occipital , derrière & au-dessus de l'entrée de l'artère vertébrale , & au-devant de l'accessoire de Willis. Ils descendent ensuite entre les faisceaux antérieurs & les faisceaux postérieurs des filets dont la réunion forme les nerfs vertébraux. Leurs attaches , semblables à autant de dentelures , se trouvent dans l'intervalle qui sépare chacun des nerfs d'avec le suivant , & plus près de l'inférieur que du supérieur. Ces attaches ont leur sommet dirigé de haut en bas ; leur nombre devroit égaler celui des nerfs cervicaux & dorsaux ; cependant elles sont rarement plus de douze ou quatorze , parce que plusieurs intervalles en manquent : quelquefois il s'en trouve deux entre deux nerfs , & alors l'une regarde en bas & l'autre en haut. J'ai aussi trouvé sur plusieurs sujets , que les ligamens dentelés non-seulement sont fort minces à leur partie supérieure où ils sont plus larges , mais encore qu'ils sont comme percés à jour & en quelque sorte réticulaires. Cette disposition qui se rencontre en beaucoup de valvules , & sur-tout en celles qui avoisinent le cœur , telles que la valvule d'Eustache , celle de la veine coronaire ,

& les valvules sigmoïdes, ne peut être attribuée à aucune cause qui agisse sur les ligamens dentelés, & qui fasse effort contre eux. Elle paroît naturelle & non acquise, comme dans les parties dont je viens de parler, en qui l'apparence réticulaire n'a lieu que dans l'âge adulte, & ne se rencontre jamais d'une manière aussi marquée dans la première enfance.

Le sac que forme l'arachnoïde est extrêmement lâche. Il ne renferme pas seulement la moelle de l'épine, & le principe des nerfs vertébraux qui se distribuent au col & au dos; on le voit s'étendre beaucoup au-delà pour embrasser ceux de ces nerfs qui constituent la queue de cheval, & se continuer jusqu'à la partie moyenne inférieure de l'os sacrum. Les filamens qui unissent ce sac à la pie-mère sont assez nombreux à la partie supérieure de la moelle, & sur-tout le long de son sillon postérieur. Ceux qui s'élèvent de sa face externe & par lesquels il tient à la dure-mère, sont en moins grande quantité principalement en devant. Leur longueur est aussi plus considérable, quelques-uns n'ayant pas moins de six lignes. Pour le plus souvent ils se bifurquent à mesure qu'ils s'éloignent de l'arachnoïde. Lorsqu'on soulève la dure-mère, ils se rompent avec une espèce de craquement. L'arachnoïde est si mince que si on n'étoit pas prévenu de son existence, on pourroit la méconnoître. J'ai cependant trouvé dans plusieurs sujets des concrétions logées dans son épaisseur, que leur face aplatie & pour le plus souvent irrégulière, auroit pu faire comparer à des gouttes de suif étendues & figées à la surface d'une liqueur transparente. Elles se sont montrées principalement à la partie inférieure du dos, & à la partie supérieure des lombes; leur nombre étoit de cinq ou six, & quelquefois plus; leur largeur étoit différente & leur couleur jaunâtre, de manière qu'avant de les examiner de plus près, j'aurois jugé que c'étoient de légers amas de graisse. Mais elles se sont trouvées grenues du côté concave, & d'une consistance ferme & graveleuse. On peut croire que ces concrétions sont des accidens, & qu'elles tiennent à quelque maladie, ou peut-être simplement à la vieillesse,

les sujets dont je puis le plus ordinairement disposer, étant des hommes fort avancés en âge. Si ce sont des commencemens d'ossification, il est fort étrange qu'elles naissent dans une membrane aussi mince, & dans l'épaisseur de laquelle on aperçoit à peine quelques vaisseaux sanguins.

La forme & l'étendue du prolongement de la dure-mère qui accompagne la moelle de l'épine, sont presque les mêmes que celles de l'arachnoïde. Ce prolongement est fait des deux lames que la dure-mère présente au-dedans du crâne. Après avoir eu de fortes adhérences avec les ligamiens qui joignent les deux premières vertèbres l'une à l'autre & à l'occipital, il ne tient plus au reste du canal de l'épine que par un tissu cellulaire assez lâche, & au-dedans duquel on trouve une substance grasseuse d'une nature toute particulière. La dure-mère est encore assujettie le long de l'épine par les enveloppes qu'elle fournit de chaque côté aux nerfs vertébraux de toutes les classes. Ces enveloppes forment d'abord une espèce de tuyau dans lequel les nerfs sont enfermés avec peu d'adhérence, & d'où on peut les tirer & les faire sortir de plus de deux lignes de long; bientôt elles contractent avec eux des adhérences assez fortes qui se continuent jusque sur les ganglions où ces enveloppes cessent d'exister. On diroit qu'elles se divisent à l'endroit des trous de conjugaison qui se remarquent entre les vertèbres, en deux lames, dont l'une se réfléchit sur ces os, pour se confondre avec leur périoste, & l'autre se prolonge sur les nerfs, comme je viens de l'exposer.

La dure-mère n'offre point ici de ces grands réservoirs veineux analogues à ceux qui sont renfermés dans son épaisseur au-dedans du crâne, & connus sous le nom de *sinus*; mais on voit descendre le long des parties latérales antérieures du canal de l'épine, une veine placée de chaque côté sur la partie postérieure du corps des vertèbres, & qui paroît en tenir lieu. Ces veines reçoivent en effet celles qui viennent de la moelle de l'épine, & qui en sortent avec les nerfs, ainsi que celles qui rampent dans l'épaisseur du sac de la

‘dure-mère. On les voit monter jusque dans le crâne, où elles communiquent avec les veines qui rampent sur la face externe & sur les parties inférieure & antérieure de cette boîte osseuse, par les trous condyloïdiens antérieurs. Elles s’ouvrent aussi entre chaque vertèbre dans les veines cervicales, dorsales, lombaires, & peut-être aussi dans les veines sacrées. Ce que ces espèces de *sinus* offrent de plus remarquable, c’est qu’ils ont des traverses qui vont de l’un à l’autre, derrière les corps des vertèbres, au-devant du surtout ligamenteux intérieur qui leur sert de périoste. Ces traverses pratiquées à la surface de ces os, ne sont couvertes d’aucune membrane du côté qui les regarde, & s’ouvrent dans des espèces de cavernes creusées dans leur épaisseur. Une disposition aussi singulière & qui n’a pas d’exemple dans le reste de la machine animale, a sans doute son utilité; mais jusqu’à présent il m’a été impossible de la découvrir.



M É M O I R E

*Sur le résultat de l'inflammation du Gaz inflammable
& de l'Air déphlogistiqué, dans des vaisseaux clos.*

Par M. M O N G E.

LORSQU'À la manière de M. de Volta on enflamme un mélange d'air déphlogistiqué & de gaz inflammable par le moyen d'une étincelle électrique, ou par une élévation suffisante de température, les deux fluides se décomposent, & se dépouillent réciproquement d'une très-grande partie de la matière de la chaleur qui entroit auparavant dans leur composition. Ce feu abandonné à lui-même quitte l'état de compression où le tenoit son adhérence pour les autres parties constituantes des fluides, il entre en expansion, il heurte d'une manière mécanique les parois des vaisseaux dans lesquels se fait l'opération, & il les brise lorsque leur résistance n'est pas assez grande; mais lorsque cette résistance est suffisante, le feu, après avoir perdu son mouvement contre les parois, passe par leurs pores comme matière de température, & il chauffe les corps circonvoisins; il se trouve alors du vide dans le récipient qui ne contient plus que les autres substances qui entroient dans la composition des fluides élastiques, & qui sont privées du ressort & de la légèreté que leur communiquoit auparavant la matière de la chaleur & celle de la lumière qu'elles ont abandonnées.

Malgré le grand nombre d'expériences que tous les Physiciens avoient répétées sur l'inflammation dans l'eudiomètre de M. de Volta, on n'avoit encore aucune connoissance sur la nature de ce résidu, parce que les expériences avoient été faites trop en petit, ou parce qu'on avoit opéré les inflammations sur de l'eau qui masquoit ce résidu & empêchoit

qu'on ne pût l'apercevoir *. Ce résultat pouvant fournir une substance nouvelle, ou procurer des lumières sur la composition d'une substance déjà connue, il étoit important de répéter les expériences sur des quantités considérables de fluides élastiques, & dans des vaisseaux clos, secs & à l'abri du contact de toute matière étrangère : c'est ce que j'ai fait, & ce dont je vais rendre compte à l'Académie.

L'air déphlogistiqué que j'ai employé a été produit par la réduction du précipité rouge; & pour que le gaz ne fût point altéré par l'air atmosphérique, j'ai d'abord mis dans une cornue le nitre mercuriel avec du mercure coulant, & j'ai poussé doucement la calcination jusqu'à ce qu'il ne se dégagât plus de gaz nitreux que je recevois dans l'appareil hydropneumatique; alors en augmentant le feu, & avec les précautions qu'exige la combinaison des premières portions d'air déphlogistiqué avec les dernières de gaz nitreux, j'ai obtenu l'air déphlogistiqué sans faire communiquer l'atmosphère avec l'intérieur de la cornue, & j'ai rejeté les premiers produits qui pouvoient contenir l'acide nitreux résultant de la combinaison des deux gaz. Quant à l'air inflammable je me le suis procuré en faisant dissoudre du fil-de-fer bien nettoyé dans de l'acide vitriolique affoibli, & en employant un vase assez grand pour que tout l'air qui m'étoit nécessaire fût produit d'un seul jet, & sans être obligé de l'ouvrir pour y introduire de nouveau ou du fer ou de l'acide, ce qui auroit donné passage à l'air de l'atmosphère & altéré mes résultats.

Après avoir obtenu l'air déphlogistiqué & l'air inflammable, j'ai mesuré le poids d'un volume déterminé de chacun de ces fluides : pour cela, sur un appareil hydropneumatique *ABCD*

* Les Expériences dont il s'agit dans ce Mémoire, ont été faites à Mézières, dans les mois de Juin & de Juillet, 1783, & répétées en Octobre de la même année : je ne savais pas alors que M. Cavendish les eût faites plusieurs mois aupara-

vant en Angleterre, mais plus en petit; ni que M.^{rs} Lavoisier & de la Place les fissent à peu-près dans le même temps à Paris, dans un appareil qui ne comportoit pas toute la précision de celui que j'ai employé.

(figure 1), dans laquelle le niveau de l'eau *EF* étoit à une hauteur constante & déterminée, j'ai établi un bocal de verre *I* de la capacité de vingt-deux pintes, ouvert par en bas, & garni à son ouverture supérieure d'un robinet bien luté; à côté de ce bocal étoit fixée une règle *GH*, destinée à recevoir les divisions du volume du bocal en parties qui contiussent chacune la même masse d'air, malgré le poids variable de la colonne d'eau suspendue, & je me suis procuré ces divisions de la manière suivante. Dans un matras à col étroit, j'ai introduit une pinte d'eau, mesure de Paris; cette pinte contenoit 1 livre 14 onces 7 gros 44 grains d'eau de pluie filtrée, à la température de 12 degrés du thermomètre de Réaumur, & j'ai coupé le col du matras à l'endroit où se trouvoit la surface de la pinte d'eau; ensuite j'ai aspiré par en haut l'air du bocal *I* jusqu'à ce que l'eau fût arrivée au robinet, & que j'en eusse une gorgée dans la bouche; j'ai fermé le robinet, & dans cet état l'eau restoit suspendue, & il n'entroit point d'air dans le bocal ni par les luts, ni par le robinet. J'ai plongé dans l'eau de l'appareil le matras renversé & plein d'une pinte d'air atmosphérique sous le poids de l'atmosphère, j'ai versé cet air dans le bocal par-dessous, l'eau s'est abaissée, & j'ai marqué sur la règle la hauteur à laquelle s'arrêtoit la surface: j'ai recommencé cette opération jusqu'à ce que le bocal fût entièrement vide d'eau, & j'ai eu sur la règle, des divisions inégales, & qui indiquoient des volumes inégaux, mais ces volumes contenoient des masses égales d'air sous le poids constant de l'atmosphère: cette opération préliminaire étant faite, j'ai de nouveau rempli d'eau le bocal, & j'y ai introduit par en bas le gaz dont je voulois mesurer le poids.

Ensuite j'ai fait le vide dans un grand ballon *K*, garni d'un robinet bien luté, & dont la capacité étoit à peu-près de 14 pintes; après l'avoir pesé dans cet état, je l'ai vissé sur le bocal, & en ouvrant les deux robinets j'ai permis à l'air du bocal d'entrer dans le ballon jusqu'à refus. La marche de la surface de l'eau dans le bocal, m'a donné le volume d'air introduit

introduit dans le ballon, & j'en ai eu le poids par l'excès du poids du ballon plein, sur ce qu'il pesoit étant vide : par ce moyen, j'ai trouvé que le baromètre étant à 27 pouces 5 lignes, & la température à 15 degrés du thermomètre de Réaumur.

		Gros.	Grains.
12 pintes $\frac{27}{48}$	de gaz déphlogistiqué pesoient.....	4.	13
12 pintes $\frac{28}{48}$	d'air atmosphérique.....	3.	56 $\frac{1}{2}$
12 pintes $\frac{41}{48}$	d'air inflammable.....	0.	39 $\frac{1}{64}$

Par des recherches antérieures je m'étois assuré que le pied cube d'eau de pluie filtrée, à la température de 12 degrés, pèse 69 livres 6 onces 0 gros 39 grains, & qu'il contient 35,865 fois la pinte qui me servoit alors d'unité, j'ai donc pu former la Table suivante, qui donne les poids de la pinte & du pied cube de chacun des trois fluides élastiques.

N O M S des G A Z.	P O I D S de la P I N T E.	P O I D S du P I E D C U B E.
	Grains.	Onces. Gros. Grains.
Air déphlogistiqué..	23 $\frac{193}{201}$	1. 3. 67,36.
Air atmosphérique..	21 $\frac{91}{107}$	1. 2. 44,03.
Air inflammable....	3 $\frac{87}{2468}$	0. 1. 36,86.

Pour produire l'inflammation de l'air inflammable & de l'air déphlogistiqué dans des vaisseaux clos & à l'abri du mélange de toute matière étrangère, je me suis servi de l'appareil suivant.

Dans une caisse hydropneumatique, dont la coupe est représentée par *ABCD* (figure 2), & dans laquelle le niveau *EF* de la surface de l'eau étoit entretenu constamment à la même hauteur, j'ai établi deux grands bouches *G* & *H*, semblables à celui qui m'avoit servi à prendre le poids

Mém. 1783.

L

des gaz, & gradués séparément par le même procédé : ces deux bocaux qui devoient servir de réservoirs, l'un à l'air déphlogistiqué, l'autre à l'air inflammable, étoient ouverts par en bas, dans le haut ils communiquoient, par des tuyaux de métal garnis des robinets *I* & *K*, à un ballon *M* destiné à servir de récipient, & dans lequel étoit un excitateur pour produire une étincelle électrique à la manière de M. de Volta ; cet excitateur étoit d'argent, parce qu'une première expérience m'avoit appris que le cuivre se calcine par la chaleur des inflammations, & donne de la chaux métallique qui altère la pureté des résultats. Un troisième tuyau de métal, pareillement garni d'un robinet *L*, établissoit la communication du ballon à une excellente machine pneumatique *O*, destinée à faire le vide dans le ballon, & à en extraire les fluides élastiques : je m'étois assuré de l'exactitude des luts, des soudures & des robinets, en tenant l'eau suspendue pendant plusieurs jours à 18 pouces de hauteur par chaque robinet en particulier, sans qu'il soit entré la moindre quantité d'air dans l'appareil.

Cela fait, pour introduire le gaz déphlogistiqué dans le bocal *H*, j'ai ouvert les robinets *L* & *K*, puis en pompant avec la machine pneumatique, j'ai élevé l'eau dans le bocal jusqu'à ce que la surface fût prête à être cachée par la calotte métallique qui étoit au haut, & j'ai fermé le robinet *K*. Il restoit alors un peu d'air atmosphérique entre la surface de l'eau & le robinet : pour enlever cet air sans faire passer de l'eau par le robinet, j'avois introduit dans le bocal un tube de verre *PQR*, recourbé par en bas, j'ai poussé l'extrémité supérieure de ce tube dans le tuyau de métal jusqu'à ce qu'elle touchât le robinet, & en aspirant par le bout extérieur *R*, qui étoit garni d'une soupape de vessie, j'ai totalement vidé d'air le bocal *H* ; enfin j'y ai introduit le gaz par en bas : de la même manière, & avec les mêmes précautions, j'ai rempli le bocal *G* d'air inflammable.

Tout étant ainsi préparé, les deux robinets *I* & *K* étant fermés, & le robinet *L* étant seul ouvert, j'ai fait le vide

dans le ballon *M* aussi parfaitement qu'il m'a été possible, & j'ai fermé le robinet *L*; puis ouvrant le robinet *K*, j'ai laissé entrer dans le ballon le douzième de son volume d'air déphlogistiqué, ce que je pouvois mesurer d'une manière très-précise par la marche de la surface de l'eau dans le bocal *H*; ensuite ouvrant le robinet *I*, j'y ai laissé entrer du gaz inflammable jusqu'à refus, & tous les robinets étant fermés, j'ai tiré une étincelle qui a produit une première explosion. J'ai laissé entrer une seconde fois un douzième d'air déphlogistiqué, & j'ai eu une seconde explosion, & ainsi de suite jusqu'à six explosions consécutives; le gaz inflammable étant tout employé, j'ai rendu un douzième d'air déphlogistiqué, & j'ai laissé entrer de nouveau de l'air inflammable jusqu'à refus; mais dans ce cas il en entroit moins que la première fois, tant parce que le ballon étoit extrêmement chaud, que parce que la portion des gaz qui ne pouvoit servir à l'inflammation, commençoit à l'engorger, & je n'ai pu obtenir que cinq explosions consécutives: en continuant de cette manière, j'ai pu produire cent trente-sept explosions.

Le ballon étant alors engorgé, parce qu'il étoit trop petit, j'ai laissé tomber le nuage qui le remplissoit, ensuite j'ai recommencé l'opération du vide, & pour ne rien perdre de tous les produits, j'ai recueilli dans un appareil pneumatique particulier que j'avois adapté à la pompe, tout l'air extrait du ballon pour le soumettre ensuite à l'examen.

Par ce procédé, & en trois suites d'explosions dont le nombre a été porté à trois cents soixante-douze, j'ai consommé

145 pintes $\frac{91}{144}$ d'air inflammable
Et 74 pintes $\frac{9}{16}$ d'air déphlogistiqué.

Le poids de ces gaz, si leurs densités avoient été les mêmes que lorsque je les pesai, auroit été

	onces. gros. grains.		
Pour l'air inflammable.....	0.	6.	10,03.
Pour l'air déphlogistiqué.....	3.	0.	58,53.
TOTAL.....	3.	6.	68,56.

Mais pendant les explosions le poids de l'atmosphère étoit diminué, & sa hauteur moyenne n'étoit plus que de 26 pouces 11 lignes, la température de l'appartement étoit encore la même. Il faut donc diminuer le poids total des deux airs dans le rapport de 27 pouces 5 lignes à 26 pouces 11 lignes; car quoique les différens fluides élastiques ne soient pas tous également dilatables par la chaleur, il est très-probable qu'ils sont tous compressibles suivant la même loi, du moins dans l'état moyen, c'est-à-dire en raison des poids comprimans: d'après cela on trouve que le poids total des airs que j'ai employés, est de 3 onces 6 gros 27,56 grains.

Avant que d'aller plus loin, je rapporterai quelques circonstances qui ont accompagné ces expériences: 1.^o chaque explosion occasionnoit une chaleur très-forte, subite, & qui se faisoit sentir d'une manière très-sensible au visage, même à la distance de trois pieds du ballon; j'ai été obligé de mettre de l'intervalle entre les explosions, & de refroidir le ballon avec des linges mouillés pour empêcher les luts de se ramollir, & de laisser échapper les fluides élastiques: 2.^o en refroidissant de cette manière le ballon, le fluide qu'il contenoit perdoit sa transparence & présentoit un brouillard très-épais qui disparoissoit sur le champ à l'explosion suivante, parce que les gouttes de liquide qui le composoient, étoient subitement converties en vapeurs par la haute température qu'excitoit l'inflammation: 3.^o dans les commencemens de chaque suite d'explosions les étincelles produisoient un certain bruit; mais sur la fin de la suite & lorsque le ballon commençoit à s'engorger sensiblement, ce bruit changeoit de nature, ou plutôt il étoit accompagné d'un sifflement éclatant qui me donnoit de l'inquiétude & me faisoit craindre qu'il ne s'échappât quelque chose par les luts: j'ai été pleinement convaincu par la suite que ce sifflement étoit occasionné par la grande & subite compression qu'éprouvoit le fluide élastique intérieur, en vertu de la haute température à laquelle l'élevoit l'explosion.

Ces opérations étant finies, j'ai déluté le ballon, je l'ai

d'abord pesé avec la liqueur qu'il contenoit, puis j'ai transvasé ce produit, & après avoir bien séché le ballon je l'ai repesé de nouveau, & j'ai trouvé pour différence, $3^{\text{onces.}} 2^{\text{gros.}} 45, 1^{\text{grains.}}$ ce poids est celui du produit en liqueur de l'inflammation des deux gaz.

J'ai ensuite pesé tout l'air que j'avois extrait du ballon par les trois opérations du vide, son volume étoit de sept pintes, & j'ai trouvé son poids de.....

2. 27,91.

Ainsi le poids total des substances qui résultent de l'opération, est de....

3. 5. 1,01.

& il s'en faut 1 gros 26,55 grains que ce poids ne soit égal à celui des gaz que j'ai employés. Cette différence peut venir 1.^o de ce que j'ai corrigé les volumes d'airs d'après l'état moyen du baromètre pendant l'opération, tandis qu'il faudroit corriger chaque volume d'après la hauteur du baromètre pendant la consommation particulière: 2.^o & principalement de ce que je n'ai pas tenu compte des changemens de température dans les réservoirs qui ont dû s'échauffer par le voisinage du ballon, quoique le thermomètre n'ait pas varié sensiblement dans l'appartement: 3.^o enfin de la perte occasionnée par la vaporisation dans chaque opération du vide.

Examen de l'Air extrait du Ballon.

Les sept pintes d'air que j'ai retirées du ballon, par la machine pneumatique, contenoient un peu d'air fixe: j'en ai agité une partie dans de l'eau de chaux qu'elle a blanchie, & par cette agitation elle a diminué d'un dix-huitième de son volume: je l'ai fait passer ensuite dans l'eudiomètre de M. de Volta, où elle a détonné par l'étincelle électrique, & par cette opération elle a encore été diminuée d'un cinquième de son volume; ce qui prouve qu'elle contenoit un mélange de gaz inflammable & de gaz déphlogistiqué. J'ai essayé de faire brûler, à l'air libre, le résidu de cette inflam-

mation, & il a refusé de s'enflammer; mais par son mélange avec l'air nitreux, il a rutilé & s'est encore réduit comme l'air atmosphérique. Il contenoit donc encore à cette époque un quart de son volume d'air déphlogistiqué. Il suit de tout cela que cet air ne peut être regardé comme le produit de l'inflammation, & qu'il est le résultat des impuretés des deux gaz, impuretés qui peuvent venir en partie de l'air du vaisseau dans lequel j'ai fait le gaz inflammable, malgré l'attention que j'ai eue de ne pas recevoir le produit de la première effervescence, en partie de l'eau de l'appareil qui a été agitée plusieurs fois pour transvaser les gaz, enfin de l'eau employée pour affoiblir l'acide vitriolique.

Examen du produit en liqueur.

Cette liqueur, parfaitement transparente, a rougi imperceptiblement le papier teint en bleu par le tournesol, beaucoup moins que celle que j'avois obtenue dans une expérience antérieure, moins encore que la salive. Cette acidité ne peut pas être attribuée à l'air fixe, parce que la liqueur ne précipitoit pas l'eau de chaux, & parce que l'eau distillée, également acidulée par l'air fixe, rendoit sur le champ l'eau de chaux laiteuse; elle blanchit à peine la dissolution d'argent dans l'acide nitreux, & un peu plus sensiblement celle de mercure dans le même acide. Outre sa légère acidité, elle a encore la saveur empyreumatique que prend toujours l'eau dans la distillation; ce résultat doit donc être regardé comme de l'eau pure chargée de la petite quantité d'acide vitriolique qu'entraîne nécessairement avec lui l'air inflammable lorsqu'on le retire de la dissolution de fer.

Une partie de cette eau vient certainement de celle que les deux airs tenoient en dissolution dans leur état aériforme, mais on ne peut pas admettre qu'elle en vienne entièrement, car l'air inflammable & l'air déphlogistiqué ne seroient alors essentiellement composés l'un & l'autre que de la matière du feu & de celle de la lumière, substances qui ne peuvent être rendues coércibles ainsi qu'elles le sont dans les fluides

élastiques, que par leur combinaison avec une matière incapable de passer au travers des parois des vaisseaux.

Il suit de cette expérience, que lorsqu'on fait détonner le gaz inflammable & le gaz déphlogistiqué, considérés l'un & l'autre comme purs, on n'a d'autre résultat que de l'eau pure, de la matière de la chaleur & de celle de la lumière.

Il reste à savoir actuellement si les deux gaz étant des dissolutions de substances différentes dans le fluide du feu considéré comme dissolvant commun, ces substances, par l'inflammation, abandonnent le dissolvant & se combinent pour produire de l'eau qui ne seroit plus alors une substance simple ; ou bien si les deux gaz étant les dissolutions de l'eau dans des fluides élastiques différens, ces fluides quittent l'eau qu'ils dissolvoient pour se combiner & former le fluide du feu & de la lumière qui s'échappe à travers les parois des vaisseaux : & alors le feu seroit une matière composée. Les deux conséquences sont également extraordinaires, & l'on ne pourra se décider pour l'une d'elles que d'après des expériences d'un autre genre.

En admettant la première, c'est-à-dire, en regardant l'eau comme composée des bases de l'air déphlogistiqué & de l'air inflammable, la végétation seroit une opération par laquelle la Nature décomposeroit l'eau & lui enlèveroit la base de l'air inflammable pour la combiner avec les végétaux qui en sont éminemment pourvus, tandis que la base de l'air déphlogistiqué, à l'aide de la chaleur & de la lumière qui nous viennent du Soleil, reprendroit l'état aériforme pour se porter au dehors, comme l'a observé M. Inghenouz. L'eau ne seroit donc pas nécessaire à la végétation simplement comme véhicule, elle en seroit un des matériaux ; & l'on expliqueroit à-la-fois pourquoi cette opération ne peut pas avoir lieu sans le concours de l'eau, de la chaleur & de la lumière. On rendroit pareillement raison d'un grand nombre d'autres phénomènes ; on expliqueroit, par exemple, pourquoi la flamme des végétaux mouille considérablement les corps froids qu'elle touche ; pourquoi les tuyaux

des poëles, quand il fait froid, condensent une si grande quantité d'eau, dont une partie sort des tuyaux & tache les murailles : on n'attribueroit plus la violence de la détonation de la poudre à canon au dégagement des fluides élastiques qu'elle contient, mais à la vaporisation de l'eau produite par l'inflammation, &c. Mais cette hypothèse comporte une difficulté qui, dans l'état actuel de nos connoissances, est difficile à résoudre.

En effet, il est confirmé par une foule d'observations que le mélange du gaz inflammable & du gaz déphlogistiqué n'a besoin, pour s'enflammer, que d'une simple élévation de température, & que cette température dépend de la nature du gaz inflammable, de la dose du gaz déphlogistiqué, & des densités de ces deux fluides. On éteint une bougie en approchant de sa flamme un corps très-froid, de même qu'on la rallume, lorsqu'on vient de l'éteindre, en approchant de sa mèche un corps très-chaud : le vent même n'éteint la bougie que parce qu'il abaisse trop la température de la vapeur inflammable qui s'élève de la mèche. Les huiles bouillantes s'enflamment par leur propre température & sans avoir besoin du contact d'un corps dans l'état d'ignition. Actuellement, si les deux gaz ne sont autre chose que les dissolutions de deux substances différentes dans le fluide du feu, & si dans l'inflammation ces deux dissolutions se précipitent l'une l'autre, en sorte que les deux bases, en abandonnant le feu qui les dissolvoit, se combinent pour produire de l'eau, il arrive donc qu'en élevant la température, c'est-à-dire qu'en introduisant du feu dans le mélange des deux gaz, ou pour mieux dire encore, qu'en augmentant la dose du dissolvant, on diminue l'adhérence qu'il avoit pour ses bases, ce qui est absolument contraire à ce qu'on observe dans toutes les opérations analogues de la Chimie.

Il nous manque donc encore beaucoup de lumières sur cet objet, mais nous avons droit de les attendre, & du temps, & du concours des travaux des Physiciens.



Fig. 1.

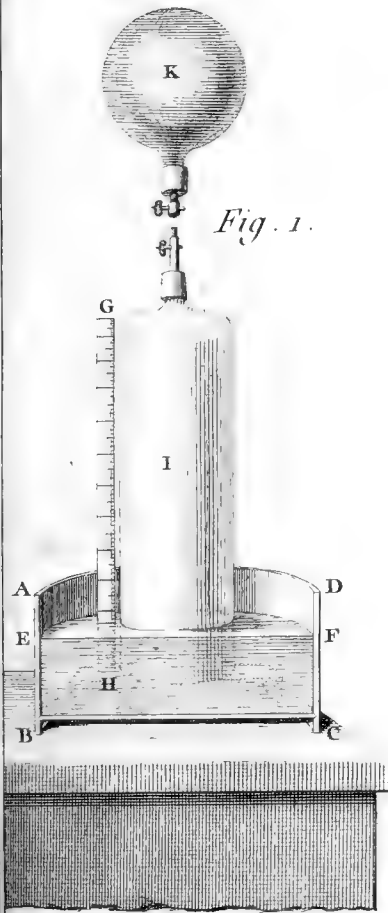
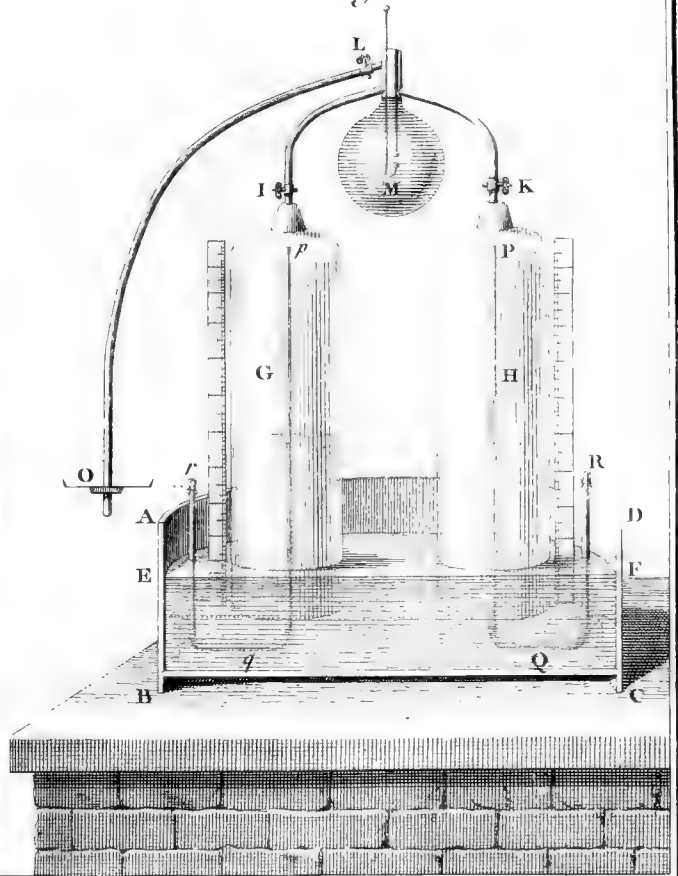


Fig. 2.





M É M O I R E
SUR L'ÉCLIPSE DE LUNE
DU 18 MARS 1783.

Et sur la grandeur de l'ombre de la Lune.

Par M. DE LA LANDE.

L'ÉCLIPSE de Lune du 18 Mars ayant été observée complètement, & par sept Astronomes différens, à Paris, & ayant été presque centrale, m'a paru plus propre qu'une autre à donner la véritable grandeur de l'ombre de la Terre, & par conséquent la valeur de la quantité qu'on y ajoute pour l'effet de l'atmosphère terrestre.

Lû
le 22 Mars
1783.

Quand on calcule la grandeur réelle de la section de l'ombre terrestre dans une éclipse de Lune, on ajoute la somme des parallaxes de la Lune & du Soleil, & l'on en ôte le demi-diamètre du Soleil, mais on n'a que le demi-diamètre de l'ombre réelle, proprement dite, formée par le globe de la Terre. L'observation a prouvé que l'atmosphère de la Terre augmentoit un peu l'étendue sensible de cette ombre, mais on a varié sur la quantité; les uns ajoutent toujours 20 secondes, les autres une minute; T. Mayer un soixantième de l'ombre, calculée par la méthode précédente. M. le Gentil pensoit qu'il falloit ajouter 40 secondes ou 1' 20", suivant que la partie de l'ombre où la Lune entroit, étoit formée par les parties de l'atmosphère voisines de l'Équateur ou des Pôles. (*Mém. de l'Académie 1755*).

Dans l'Éclipse du 18 Mars, le calcul des Tables m'a donné $58' 5'' + 9'' - 16' 5'' + 42'' = 42' 51''$ pour le demi-diamètre de l'ombre; l'opposition à $9^h 31' 42''$ dans $5^h 28^m 11' 39''$, avec $1' 59''$ de latitude australe, le mouvement horaire sur l'orbite relative, $31' 38'' 6$, l'inclinaison de l'orbite

Mém. 1783.

M

90 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
relative, $5^d 43' 53''$; le milieu de l'Éclipse $9^h 31' 19''$ par
les Tables.

Pour comparer l'observation avec les Tables, j'ai rapproché
sept observations différentes de chacune des quatre phases
principales, c'est-à-dire, celles de M.^{rs} Cassini, le Monnier,
Pingré, le Gentil, Messier, Méchain, & la mienne; & prenant
un milieu entre celles qui s'écartoient le moins, j'ai trouvé
les quatre phases de la manière suivante.

	PHASES OBSERVÉES par moi.	MILIEU des sept OBSERVAT.	PHASES CALCULÉES.	DIFF.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	M. S.
Comm. de l'Éclipse.	7. 41. 48	7. 41. 43	7. 40. 8	1. 35.
Immersion totale.	7. 41. 16	8. 41. 12	8. 40. 12	1. 0.
Émerlion.	10. 23. 27	10. 23. 21	10. 22. 26	0. 55.
Fin de l'Éclipse.	11. 23. 22	11. 23. 7	11. 22. 30	0. 37.

Les observations que j'ai employées pour ce résultat moyen,
différoient de 29 secondes pour la première phase, de 22
secondes pour la seconde, de 54 secondes pour la troisième,
de 63 secondes pour la quatrième. Par les observations du
commencement & de la fin, on a le milieu à $9^h 32' 25''$;
& par les deux observations intermédiaires, $9^h 32' 16''$; la
différence n'étant que de 9 secondes de temps, on a lieu
d'être satisfait de l'accord de ces observations, & l'on peut
supposer que le milieu observé, est arrivé à $9^h 32' 20''$,
c'est-à-dire, $1' 1''$ plus tard que par les Tables; de-là je
conclus que l'opposition vraie est arrivée à $9^h 32' 43''$, temps
vrai, la Lune ayant $5^d 28^d 11' 41''$ de longitude; les Tables
donnent 34 secondes de trop. Mais comme l'observation
faite au Méridien, vaut encore mieux que celle de l'Éclipse
pour déterminer l'erreur des Tables, ce n'est pas là le résultat
principal que je voulois tirer de cette observation; il s'agit de
la grandeur de l'ombre.

La demi-durée de l'Eclipsé totale par l'observation, est de $51' 4''$, & par mon calcul $51' 7''$; la demi-durée entière de l'Eclipsé est $1^h 50' 42''$, & par mon calcul, $1^h 51' 11''$; j'avois donc à cet égard 29 secondes de trop. Comme les observations de l'immersion & de l'émergence me paroissent plus faciles à faire exactement, je ne crois pas devoir prendre un milieu entre ces deux résultats; mais en me rapprochant une fois plus de celui qui comporte plus de précision, je supposerai $12''$ d'erreur sur les demi-durées, ce qui fait 6 secondes sur le demi-diamètre de l'ombre, à ôter de la correction de 42 secondes que j'avois employée dans mes calculs: ainsi l'effet de l'atmosphère me paroît devoir être réduit dans cette Eclipsé à 36 secondes, pour satisfaire le mieux qu'il est possible aux observations: & comme la parallaxe de la Lune étoit de 58 minutes, qui est la quantité moyenne entre les extrêmes 54 & 62, cette quantité de 36 secondes me paroît pouvoir suffire dans toutes les éclipses de Lune. Cela diffère peu des 30 secondes qu'emploie M. le Monnier, & des 40 secondes que trouve M. le Gentil, pour les parties de l'ombre qui répondent à l'Équateur.

T. Mayer ajoutant toujours un soixantième, supposoit que l'effet de l'atmosphère étoit plus grand quand la Lune se rapprochoit de la Terre; mais alors l'ombre est plus dense; les rayons dispersés par l'atmosphère de la Terre, font un effet moins sensible, l'ombre doit être mieux terminée; il me paroît douteux que la correction de l'atmosphère doive augmenter, ainsi je crois qu'on peut employer une quantité constante, jusqu'à ce qu'on ait fait sur des éclipses de Lune dans l'apogée & le périgée, ce que je viens de faire pour la moyenne distance, où je trouve une correction de 36 secondes.

Dans cet effet de l'atmosphère est compris un autre effet beaucoup moindre, celui de la pénombre; une partie du Soleil éclairant encore l'espace qui environne le cône de l'ombre pleine, il en doit résulter une couronne d'environ 5 secondes dans sa totalité, ou égale au diamètre du Soleil multiplié par le rapport des parallaxes. La densité de cette

espèce d'anneau va en diminuant depuis sa partie intérieure jusqu'à sa circonférence extérieure : elle ne doit être sensible pour nous qu'à la moitié de sa largeur ; ainsi des 36 secondes que nous ajoutons au demi-diamètre de l'ombre, il n'y en a probablement que deux ou trois qui dépendent, non de l'atmosphère de la Terre, mais de sa pénombre sur la Lune.

J'ai employé dans ces calculs la parallaxe de la Lune sous l'Équateur, ce qui doit avoir lieu certainement quand le Soleil est près de l'Équateur, & que la Lune traverse l'ombre presque par le centre, comme dans cette Éclipse. Dans les autres cas, on pourroit tenir compte de la figure sphéroïdique de la Terre, comme je l'ai fait pour les éclipses de Satellites (*Mém. de l'Acad. 1763*), mais la différence est insensible pour les éclipses de Lune.



M É M O I R E

S U R

LE CHANGEMENT D'INCLINAISON

QUI DOIT AVOIR LIEU

DANS LES ORBITES PLANÉTAIRES.

Par M. DE LA LANDE.

LORSQUE j'eus reconnu en 1761, la cause du mouvement direct dans le nœud de Jupiter & dans celui de son quatrième satellite, je sentis qu'il devoit y avoir un changement dans les inclinaisons, dépendant des attractions réciproques & du déplacement des orbites planétaires (*Mém. de l'Académie, 1762, page 233*); j'en donnai une idée dans le sixième Livre de mon *Astronomie*, & je promis de donner sur cette matière des détails plus circonstanciés dans nos Mémoires (*Astronomie, 2.^e édition, 1771, art. 1381*); c'est ce que je me propose d'exécuter aujourd'hui en donnant pour chaque Planète le résultat de l'action de toutes les autres pour le changement d'inclinaison.

Je partirai pour cela du mouvement des nœuds que chaque Planète fait retrograder sur son orbite, & dont j'ai donné le calcul (*Mém. de l'Académie 1758, page 261. Mém. 1761, page 404*); mais je changerai la masse de Vénus, comme dans mon dernier Mémoire sur l'obliquité de l'Écliptique (*Mém. 1780, page 307*); car ayant reconnu que l'obliquité de l'Écliptique ne diminue pas de plus d'un tiers de seconde par an, d'après les meilleures observations, il faut nécessairement juger de la petitesse de la masse de Vénus par la petitesse de son effet, & son action sur l'obliquité de l'Écliptique est la plus propre à cette détermination; je supposerai donc que sa masse, en prenant celle du Soleil pour unité, est 0,000001244, ou son logarithme

Lu
le 4 Août
1781.

4,09480; & je diminuerai en conséquence d'environ moitié, tous les mouvemens produits par l'action de Vénus.

Soit BC l'Écliptique (*figure 1*) AB l'orbite de Jupiter, dont B est le nœud ascendant; AC l'orbite de Mars, dont C est le nœud ascendant; AD le mouvement rétrograde de l'intersection A des deux orbites, lequel est de $14''194$ par année sur l'orbite de Jupiter (*Mém. de l'Académie 1758, page 251*); l'orbite AC transportée suivant DEF , changera en E de nœud & d'inclinaison sur l'Écliptique.

Le triangle BCA sera changé en BED , l'angle B & l'angle D étant constans, & la variation de l'angle C sera égale à celle du côté BA , multipliée par le sinus de l'angle B , & par le sinus du côté BC (*Astronomie, art. 3848*): c'est-à-dire, que le mouvement du nœud d'une Planète troublée sur l'orbite de la Planète troublante, doit être multiplié par le sinus de l'inclinaison de celle-ci, & par le sinus de la distance entre les nœuds des deux orbites mesurée le long de l'Écliptique, pour donner le changement d'inclinaison de l'orbite troublée; cette règle est générale.

Dans notre exemple, l'inclinaison de l'orbite de Jupiter, est $1^d 19' 10''$; la différence des nœuds de Jupiter & de Mars, est de $50^d 40'$; multipliant $14''194$ par le produit des deux sinus, on a $0''2528$ pour le changement annuel de l'inclinaison de Mars par l'action de Jupiter en un an, ce qui fait $25''28$ par siècle; on verra ci-après une Table des effets de toutes les autres Planètes.

La nouvelle inclinaison E doit être plus petite que la première inclinaison C , toutes les fois que le nœud C de la Planète troublée est moins avancé que le nœud B de la Planète troublante, soit que son inclinaison soit plus grande ou plus petite, & quand même le côté AB seroit plus grand que 90 degrés; car dans les *figures 2 & 3*, soit que le point d'intersection F de l'orbite primitive & de l'orbite troublée (lequel est toujours à 90 degrés du point A , à cause de l'égalité des angles A & D), soit au-dessus ou au-dessous de l'Écliptique BC , relativement à l'intersection

A des orbites des deux Planètes, l'inclinaison *E* est toujours plus petite que l'inclinaison *C* qui avoit lieu auparavant ; il n'en est pas de même pour le mouvement *CE* des nœuds, qui est direct dans la *figure 2*, & rétrograde dans la *figure 3*, cette considération doit changer le mouvement des nœuds de Mars par l'action de Saturne, & des nœuds de Jupiter par l'action de Mars, que j'avois assignés, dans les *Mémoires de 1761*, page 404 ; le mouvement total du nœud de Jupiter doit être diminué de $0''02$, & celui de Mars augmenté de $0''57$, par cette considération.

Si le nœud le plus avancé *B* étoit à plus de 90^d du nœud *C*, cela reviendrait au même que le cas précédent où l'arc *AC* est obtus.

Voici les Planètes rangées suivant l'ordre des longitudes de leurs nœuds, avec l'inclinaison de chacune.

	N Œ U D			INCLINAISON.		
	ASCENDANT.					
	S.	D.	M.	D.	M.	S.
Mercuré..	1.	15.	21	7.	0.	0
Mars....	1.	17.	36	1.	51.	0
Vénus...	2.	14.	26	3.	23.	20
Jupiter...	3.	8.	16	1.	19.	10
Saturne..	3.	21.	31	2.	30.	20.

L'on voit par cette Table, que Mercure ayant le nœud le moins avancé, doit augmenter les inclinaisons de toutes les Planètes ; & que Saturne, dont le nœud est le plus avancé en longitude, doit les diminuer toutes ; les inclinaisons règlent les effets que l'on cherche.

TABLE de l'effet de chaque Planète pour changer l'inclinaison de toutes les autres en un siècle.

ACTION des PLANÈTES.	SUR L'INCLIN. de MERCURE.	SUR L'INCL. de VÉNUS.	SUR L'INCLIN. de MARS.	SUR L'INCLIN. de JUPITER.	SUR L'INCLIN. de SATURNE.
Mercure.	+ 1",190	+ 0",004042	+ 0",001048	+ 0",0001430.
Vénus..	— 4",183	— 1,762	+ 0,004861	+ 0,0008475.
Mars...	— 0,001106	+ 0,1326	+ 0,1200	+ 0,01506.
Jupiter..	— 2,894	— 3,844	— 24,85	+ 9,449.
Saturne.	— 0,3454	— 0,5560	— 2,867	— 8,576
TOTAL.	— 7,423506	— 3,0774	— 29,474958	— 8,450091	+ 9,4650505.

On voit par cette Table, que Mars est de toutes les Planètes, celle dont l'inclinaison change le plus, puisqu'elle diminue de $29'' \frac{1}{2}$ par siècle; c'est en partie pour cela que les observations de Boulliaud, faites en 1645, & calculées par M. le Gentil (*Mém. de l'Académie 1757, page 274*), donnent une inclinaison plus grande que les observations modernes. Cependant, comme plusieurs autres semblent la donner plus petite, il faut convenir que les observations du dernier siècle ne sont pas assez exactes pour nous faire apercevoir une si petite différence; mais le temps n'est pas bien éloigné, où l'on pourra faire entrer dans le calcul des Observations les petites variations qui sont l'objet de ce Mémoire.



Changemens des inclinaisons Planétaires.

Fig. 1.

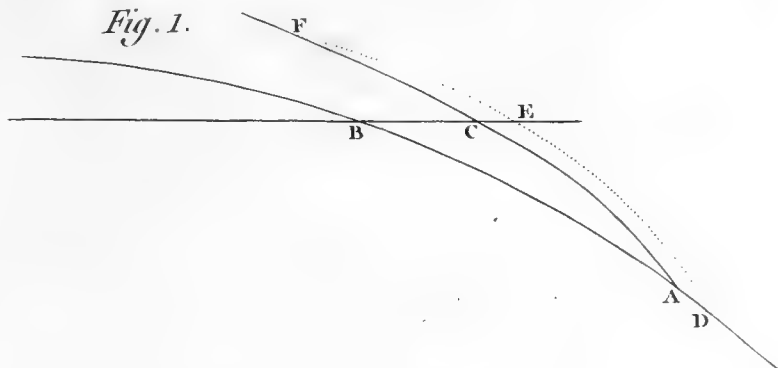


Fig. 2.

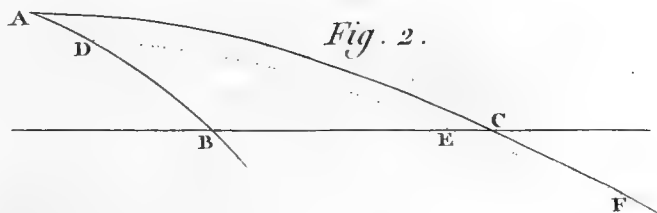
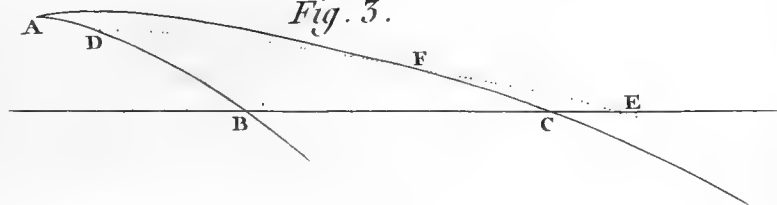


Fig. 3.





EXTRAIT.

DES OBSERVATIONS

*Qui décident de la position géographique de la ville
& embouchure de la rivière de Saint-Domingue.*

Par M. LE MONNIER.

LATITUDE boréale observée à l'embouchure du fleuve au-dessous de Saint-Domingue, dans l'anse, $18^{\text{d}} 28' 30''$. Fin de l'éclipse du Soleil le 23 Avril 1780, à $3^{\text{h}} 12' 6'', 8$. Lû le 16 Août 1783.

Le commencement de l'éclipse, à cause des nuages, n'a pu être observé à Saint Domingue ni à Paris, où le Soleil a paru néanmoins peu de temps après.

On a vu à Paris proche l'abbaye de Montmartre, sous la latitude de $48^{\text{d}} 52' 55''$, le coucher du bord supérieur du Soleil à $7^{\text{h}} 5' 15''$, le 23 Avril 1780; & l'horizon de la station où l'on a observé, rue des Martyrs, paroissoit abaissé en ce lieu de près de 3 minutes.

Or à $6^{\text{h}} 46' 20''$ du soir, la phase de l'Éclipse étoit de $0^{\text{d}} 1' 17'' \frac{1}{2}$; l'angle parallaxique dans le sphéroïde étoit de $60^{\text{d}} 13' \frac{1}{4}$; ce qui donne, en supposant la latitude apparente de la Lune au Soleil, $0^{\text{d}} 27' 1''$ australe, & avançant de $2' \frac{1}{2}$ la longitude tirée des Tables des Institutions astronomiques, $29' 37''$ pour la distance apparente des centres de la Lune & du Soleil. Mais si on retranche la phase ci-dessus; savoir, de $1' 17'' \frac{1}{2}$, de la somme des demi-diamètres apparens du Soleil & de la Lune, supposée $30' 47'' \frac{1}{2}$ $= 15' 56'' \frac{1}{2} + 14' 51''$, il reste pour la distance des centres $29' 30''$, c'est-à-dire, $7''$ moindre que selon les suppositions précédentes & qu'on a faites ci-dessus des $2' \frac{1}{2}$ qui ont été ajoutées à la longitude tirée des Tables : ces mêmes

Mém. 1783.

N

Tables ne donnoient en cet instant que 12" pour la latitude australe vraie de la Lune.

J'ai voulu calculer aussi en toute rigueur & dans l'hypothèse du sphéroïde aplati de $\frac{1}{200}$, l'erreur des Tables selon l'observation du commencement de l'Eclipse, & j'ai trouvé l'erreur des Tables — 2' 30", vu à Rouen, à 6^h 42' 1" de temps vrai, réduisant au Méridien de Paris, & selon M. le chevalier d'Angos, l'Eclipse y a paru commencer : j'ai supposé la latitude du lieu 49^d 26' 20", & notre différence en longitude 4' 59", ce qui donneroit le commencement de cette Éclipse, observée à Rouen, à 6^h 37' 2", parce qu'on l'avoit, dans l'Écrit envoyé, réduite au Méridien de Paris. L'Eclipse depuis 4' $\frac{1}{3}$ étoit donc commencée à Rouen, lorsque nous voyons ici, dans les Jardins de M. de Malherbes, rue des Martyrs, une phase de 1' $\frac{1}{4}$. C'est ce que je n'avois pas en ore remarqué avant que d'entreprendre le calcul pour Rouen; or je ne me suis pas trompé dans la réduction de l'heure de la pendule au temps vrai; car outre que je l'ai comparée soigneusement, à l'aide de ma montre à secondes, à la pendule réglée dans mon observatoire près la place de Vendôme, la pendule de la rue des Martyrs, qui retardoit de 21" $\frac{1}{3}$ par heure sur le temps vrai, marquoit 6^h 45' 20" lorsque j'ai mesuré la phase de de 1 Rev. 22 parties $\frac{1}{2}$ au micromètre, lesquelles valent 1' 17" $\frac{1}{2}$ ou 18". Or, la troisième de mes hauteurs du Soleil m'a donné, à 5^h 50' 00", 11^d 7' à mon nouveau secteur horizontal & niveau à bulles d'air, toutes corrections faites de la part de la réfraction & parallaxe du soleil, & le bord supérieur a disparu dans l'horizon sensible à 7^h 4' 7" de la pendule; d'ailleurs j'ai indiqué suffisamment ci-dessus l'abaissement de l'horizon sensible au-dessous du niveau apparent. Enfin, le Soleil étoit élevé de 2' 12' $\frac{3}{4}$ lorsque j'ai mesuré la phase de 1' 17" $\frac{1}{2}$, & quoiqu'à Rouen, à l'heure indiquée par M.^{rs} le chevalier d'Angos & Bouin, il eût dû paroître élevé ou de 3^d 23' $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire près d'un degré plus haut lorsqu'ils ont vu le commencement de l'Eclipse:

or il ne doit rester ici aucun doute sur l'effet ou inconstance des réfractions qui agissent également sur les points de contact, quelles que soient nos moyennes réfractions lors du commencement ou de la fin d'une Éclipse.

L'erreur des Tables des Institutions étant donc établie par mes observations, j'ai supposé, conformément à la Carte publiée par M.^{rs} Verdun, Borda & Pingré, la longitude géographique de l'anse, au Sud de la ville de Saint-Domingue, $73^{\text{d}} 45'$, ou de $4^{\text{h}} 55'$ de temps : on va voir qu'il faut la réduire par l'observation de la fin de l'Éclipse, vue à cette station, à $1^{\text{d}} \frac{1}{4}$, ou à 5 minutes de moins.

Nous ne connoissons pas jusqu'ici assez exactement la partie australe de l'île Saint-Domingue, & les Officiers Espagnols viennent de découvrir avec des sextans ou instrumens de Marine faits à Londres, que la latitude $18^{\text{d}} 28' 30''$ est moindre d'environ 6 minutes qu'on ne l'a supposée jusqu'ici. Venons au calcul de la longitude géographique, à $8^{\text{h}} 4' 52''$ de temps moyen à Paris, les Tables donnent le lieu du Soleil $1^{\text{f}} 3^{\text{d}} 57' 55'' \frac{1}{4}$ (trop avancé d'environ 20 secondes selon mes observations), la longitude de la Lune $1^{\text{f}} 5^{\text{d}} 5' 46'' \frac{1}{2}$, qu'il faut augmenter de $2' 43'' \frac{1}{2}$ pour l'erreur des Tables; & enfin, la latitude boréale $0^{\text{d}} 3' 30'' \frac{2}{3}$, que j'ai cru devoir augmenter de 20 secondes, c'est-à-dire, en l'admettant de $0^{\text{d}} 3' 50'' \frac{2}{3}$: l'angle parallaxique qui est obtus dans le sphéroïde, a dû être $96^{\text{d}} 23' 46''$, & comme il a fallu accroître la parallaxe horizontale que j'avois supposée pour Paris de $54' 10''$, d'environ $7'' \frac{2}{3}$ sous la latitude de Saint-Domingue; & d'ailleurs la somme des demi-diamètres apparens étant $30' 57'' = 15' 55'' \frac{1}{2} + 15' 1'' \frac{1}{2}$, on trouve, par la latitude apparente de la Lune à l'égard du Soleil, savoir $8' 10''$, la différence en longitude $29' 51''$, laquelle ajoutée à la longitude apparente du Soleil, donne celle de la Lune $1^{\text{f}} 4^{\text{d}} 27' 26''$, plus petite que l'apparente, selon le calcul des Tables corrigées de $2' 26'' \frac{1}{2}$, d'où il

s'ensuit qu'on a supposé l'heure de l'observation, réduite au Méridien de Paris, au moins 5 minutes d'heure trop grande, & qu'il faut réduire la longitude géographique à moins de $72^{\text{d}} 30'$, au lieu de $73^{\text{d}} 45'$ qu'on avoit adoptés, aux Cartes les plus récentes de cette Île, pour la longitude de la ville de Saint-Domingue.



O B S E R V A T I O N

S U R L E S E I G L E E R G O T É .

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

DES Physiciens instruits & zélés pour le bien de l'humanité, se sont assurés des effets funestes du grain de seigle qu'on nomme *ergoté*, lorsqu'on le réduit en farine & qu'on en fait un usage journalier en aliment. Plusieurs ont fait une étude de cette maladie qui attaque particulièrement le seigle, pour en connoître la cause & la prévenir, s'il étoit possible.

La plupart de ces Auteurs l'ont attribuée aux brouillards qui gâtent les grains des épis. M. Tillet combat cette assertion, dans sa Dissertation imprimée en 1755; il y fait voir que dans un champ voisin de celui de seigle ergoté on n'y trouve souvent pas un épi attaqué de l'ergot; que dans un épi de seigle attaqué de cette maladie, on y voit plus ou moins de grains ergotés, mais jamais tous; tandis que les brouillards se portent assez uniformément sur des champs voisins les uns des autres, & sur tous les grains des épis. La maladie devoit être commune dans tous les champs d'une même exposition, elle devoit s'annoncer principalement dans des lieux bas où les brouillards séjournent, & plutôt que dans des terrains élevés.

M. l'Abbé Tefsier, à qui l'on est redevable d'un travail suivi sur plusieurs maladies des grains, adhère plus volontiers au sentiment qu'infirmé M. Tillet, puisqu'il croit qu'un fonds composé d'une terre glaiseuse ou marneuse, une terre qui sera restée plus de temps en friche, & qu'on aura labourée nouvellement, donnera de l'ergot, & que c'est à cette nature de terrain commun dans la Sologne, où l'on cultive beaucoup de seigle, qu'il attribue la production de l'ergot qui certaines années, est presque général dans cette province.

Lû
le 24 Juillet
1782.

Ray, *Histor. plant.* M. Tiffot, dans son Avis au Peuple (page 614), M. Gleditsch, dans la Dissertation sur la Nielle, & M. Tillet, semblent plutôt attribuer l'origine de l'ergot à la piqure de quelques insectes (a).

Je n'entrerai dans aucun autre détail sur l'examen du seigle ergoté, sur les observations auxquelles il a donné lieu; encore moins rapporterai-je les explications différentes des Auteurs & des Physiciens sur ce qui peut lui donner origine: je me bornerai à rapporter un fait qu'il me paroîtroit difficile d'accorder avec le sentiment de ceux qui regardent l'ergot comme étant produit par une humidité résultante d'un terrain qui conserve l'eau des pluies & des brouillards.

Dans la partie de la Beauce près Denainvilliers, que j'habite, où rarement, sur-tout cette année, rencontreroit-on du seigle ergoté, deux grains de seigle se sont trouvés jetés par hasard dans un carré de potager, dont la terre fort sèche, avoit été bien préparée. Près de l'un de ces grains étoit du fumier de pigeons, qui y avoit été déposé depuis six mois ou un an pour y perdre la force. Ces deux grains ont *tallé* pendant l'hiver, & chacun a produit soixante-dix & même quatre-vingts tiges ou chalumeaux & autant de très-beaux épis; mais celui de ces grains de seigle qui étoit le plus voisin de ce fumier avoit huit chalumeaux, dont le quart au moins des grains de l'épi étoit ergoté, & ces huit tiges se trouvoient placées du côté de ce fumier: ceux du milieu de cette petite gerbe étoient très-sains; ces grains ergotés avoient depuis vingt jusqu'à vingt-quatre & vingt-six lignes de longueur: les tiges & des uns & des autres étoient très-fortes.

Le second grain de seigle, semé par hasard & près de ce premier, étoit aussi fécond en tiges, éloigné de deux pieds environ du fumier de pigeon, avoit tous ses grains sains.

Ce fait me paroît prouver que l'origine de cette maladie ne dépend pas d'un vice dans la semence, puisqu'un grain

(a) *Linn. animal. Succ.* pag. 67, définit cet insecte. *Scarabæus minimus alter florilegus.*

seul a donné naissance à ces quatre-vingts tiges, dont huit seulement portoient du seigle ergoté : ne semble-t-il pas plutôt qu'elle proviendrait d'un vice dans quelques parties de la fructification de la Plante, du défaut de conformation de quelques-uns des ovaires, ou d'un manque de fécondation de quelques-uns des germes de l'épi ; c'est le sentiment de Geoffroy (*Mém. Acad.* 1711). Ce défaut ou vice dans des parties de la fructification, aura pu provenir, comme le dit Thalius (*b*), par la trop grande quantité de suc qui s'y porte, & cet excédant de suc seroit peut-être dû à la qualité de celui produit par le fumier de pigeons qui en étoit voisin : peut-être aussi l'attribueroit-on à la piquûre d'insectes, ou à quelqu'autre cause encore inconnue, d'autant que l'excroissance contre nature du grain de seigle ergoté, n'est formée que du suc propre de la Plante. Je dois me contenter de rapporter l'observation, & comme elle est isolée, me garder de tirer aucune conclusion.

(b) Thalius est cité par M. Read, dans son *Traité du seigle ergoté*.



O B S E R V A T I O N S
D E
D E U X É C L I P S E S T O T A L E S
D E L A L U N E , E N 1783.

*'La première fut observée le 18 Mars au soir ;
la seconde , la nuit du 10 au 11 Septembre ,
à Paris , à l'Observatoire de la Marine.*

Par M. M E S S I E R.

Première Éclipse totale de Lune , le 18 Mars.

LE ciel avoit été parfaitement beau & sans nuages , la veille & le jour de l'Éclipse , excepté le soir du 18 Mars , qu'un brouillard léger s'étoit élevé , il augmenta pendant la durée de l'Éclipse , mais vers la fin il avoit considérablement diminué ; les observations n'en furent pas moins bonnes.

Pour cette observation , j'ai employé une lunette achromatique de trois pieds & demi de foyer à triple objectif & à grande ouverture , garnie d'un micromètre à fils : j'avois fait grossir cette lunette trente-six à quarante fois le diamètre de l'objet , ce grossissement convenoit pour cette observation , en ce qu'il procuroit beaucoup de lumière , & qu'on pouvoit voir distinctement les taches de la Lune , même à travers l'ombre : j'ai déjà détaillé ces avantages dans l'éclipse totale de Lune de la nuit du 30 au 31 Juillet 1776 (*Mémoires de l'Académie , année 1776 , page 441*) , le micromètre a servi à mesurer la distance des cornes de l'ombre , le diamètre vertical de la Lune dans l'ombre & hors de l'ombre ; il a encore servi à comparer le bord de la Lune à deux Étoiles.

La pendule étoit réglée sur le mouvement des fixes , la
marche

marche fut connue par vingt-une hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil, prises à un quart-de-cercle de 18 pouces de rayon fait à Londres par Bird, qui appartient à M. le Président B. de S **: ces hauteurs furent prises avec soin & ne différoient entr'elles que d'une seconde. Ce quart-de-cercle est un des mieux exécutés & du plus habile Artiste, on peut y suspendre un fil-à-plomb, mais le niveau d'air qui y est adapté est encore plus commode; par le moyen des vis de l'instrument on peut le mettre parfaitement de niveau, & l'y conserver en tournant l'instrument horizontalement: c'est l'opération que l'on est toujours obligé de faire lorsque l'on veut s'en servir pour prendre des hauteurs, ce moyen est très-facile, très-expéditif, & c'est celui que j'avois employé dans les hauteurs correspondantes du Soleil que je viens de citer; mais malgré l'accord des hauteurs que j'avois prises, il me restoit quelque soupçon d'incertitude sur cette manière de les prendre; ce soupçon se trouva fondé dans la suite, comme on le verra ci-après. La température du jour, qui n'est pas la même le matin que le soir, devoit influer sur l'instrument, mais beaucoup plus sur le niveau, malgré le soin qu'on a pris pour en rendre l'intérieur parfaitement cylindrique; la bulle d'air étoit en effet bien plus dilatée le soir que le matin: pour connoître si des hauteurs prises de cette manière étoient bonnes ou mauvaises, je me déterminai à en prendre à un quart-de-cercle de trois pieds & demi de rayon avec le fil-à-plomb, & au quart-de-cercle de 18 pouces, en employant le niveau. Les hauteurs prises en grand nombre & avec soin, me donnèrent des résultats différens, plus grands au petit quart-de-cercle qu'au grand: je fis cette comparaison en 1783 & en 1784; en voici les résultats. Le 2 Avril 1783, le quart-de-cercle de 18 pouces donna le midi 2" 36''' plus tard qu'au grand quart-de-cercle; le 17, + 1" 13''; le 26, + 2" 23''; le 1.^{er} Juillet, + 0" 45''; le 18 Août, + 1" 1''; le 29 Septembre, + 1" 44''; le 20 Décembre, + 7" 0''; & le 17 de Mai 1784, + 2" 27''. Je ne rapporte ces différences que pour faire voir qu'on ne peut

Mém. 1783.

O

se servir utilement du niveau, & qu'on doit donner la préférence au fil-à-plomb : sans cet examen, j'aurois peut-être été long-temps persuadé qu'en employant ce niveau on pouvoit prendre des hauteurs des Astres, & correspondantes du Soleil avec autant de précision qu'avec le fil-à-plomb ; ce niveau étant bien fait, solidement attaché à l'instrument, & dans une position commode. Comme Bird a beaucoup construit de quart-de-cercles de cette manière, j'ai cru devoir prévenir les Observateurs qui se servent du niveau pour prendre des hauteurs : c'est pour cela que je suis entré dans ces détails.

Les midis du 18, jour de l'Éclipse, & du lendemain 19, furent observés à un instrument des passages placé solidement dans le plan du méridien, de manière que la marche de la pendule fut exactement connue.

TABLE des Observations de l'Éclipse de Lune.

T E M P S V R A I.			N. ^{os} des TACH.	T A C H E S observées.
H.	M.	S.		
7. 32.	6		Pénombre foible.
7. 38.	5		Pénombre très-sensible.
7. 41.	54		Commencement de l'Éclipse.
7. 43.	44		1.	<i>Grimaldus</i> touche l'ombre.
7. 44.	43		1	<i>Grimaldus</i> entré.
7. 46.	47		2	<i>Galileus</i> au bord de l'ombre.
7. 52.	2		A	<i>Mare humorum</i> au bord de l'ombre.
7. 53.	32		5	<i>Gassendus</i> au bord de l'ombre.
7. 54.	2		3	<i>Aristarchus</i> au bord de l'ombre.
7. 54.	2		4	<i>Keplerus</i> touche l'ombre.
7. 55.	12		A	<i>Mare humorum</i> à moitié dans l'ombre.
7. 55.	18		4	<i>Keplerus</i> à moitié dans l'ombre.
7. 56.	21		4	<i>Keplerus</i> entré.
8. 1.	1		8	<i>Heraclides</i> au bord de l'ombre.

Suite de la Table des Observations, &c.

TEMPS VRAI.			N. ^{os} des TACH.	TACHES observées.
H.	M.	S.		
8.	2.	1	11	<i>Copernicus</i> au bord de l'ombre.
8.	3.	21	11	<i>Copernicus</i> à moitié dans l'ombre.
8.	4.	40	11	<i>Copernicus</i> entré.
8.	4.	40	15	<i>Eratosthenes</i> au bord de l'ombre.
8.	7.	24	16	<i>Timocharis</i> au bord de l'ombre.
8.	8.	7	21	<i>Tycho</i> au bord de l'ombre.
8.	8.	7	12	<i>Helicon</i> au bord de l'ombre.
8.	9.	7	21	<i>Tycho</i> à moitié dans l'ombre.
8.	9.	57	21	<i>Tycho</i> entré.
8.	12.	0	...	L'ombre augmentée, on ne voyoit presque plus le bord de la Lune.
8.	14.	24	17	<i>Plato</i> au bord de l'ombre.
8.	15.	25	17	<i>Plato</i> entré.
8.	17.	57	F	<i>Mare serenitatis</i> au bord de l'ombre.
8.	18.	27	24	<i>Manilius</i> au bord de l'ombre.
8.	22.	28	25	<i>Menelaus</i> au bord de l'ombre.
8.	22.	28	28	<i>Dionysius</i> au bord de l'ombre.
8.	22.	58	F	<i>Mare serenitatis</i> à moitié dans l'ombre.
8.	25.	57	G	<i>Mare fecunditatis</i> à moitié dans l'ombre.
8.	27.	0	...	L'ombre devient plus claire qu'au commencement de l'Eclipsé, on voit tout le disque de la Lune dans l'ombre, & les taches beaucoup mieux à travers l'ombre, que lorsque l'ombre étoit moins avancée sur la Lune.
8.	27.	18	27	<i>Possidonius</i> au bord de l'ombre.
8.	28.	0	F	<i>Mare serenitatis</i> entré.
8.	30.	26	G	<i>Mare fecunditatis</i> entré.
8.	32.	8	34	<i>Promontorium somnii</i> au bord de l'ombre.

TEMPS VRAI.			N. ^{os} des TACH.	TACHES observées.
H.	M.	S.		
8.	32.	56	E	<i>Mare tranquillitatis</i> dans l'ombre.
8.	36.	46	H	<i>Mare crisum</i> au bord de l'ombre.
8.	37.	46	H	<i>Mare crisum</i> à moitié dans l'ombre.
8.	39.	34	H	<i>Mare crisum</i> entré.
8.	40.	55	Immersion totale de la Lune dans l'ombre.
10.	19.	40	L'ombre qui couvre la Lune s'éclaircit beaucoup, & continue à s'éclaircir jusqu'à l'émerison.
10.	21.	22	Commencement de l'émerison.
10.	25.	54	1	<i>Grimaldus</i> au bord de l'ombre.
10.	26.	39	1	<i>Grimaldus</i> à moitié hors de l'ombre.
10.	27.	3	1	<i>Grimaldus</i> quitte l'ombre.
10.	30.	2	2	<i>Galileus</i> au bord de l'ombre.
10.	32.	29	A	<i>Mare humorum</i> au bord de l'ombre.
10.	35.	41	A	<i>Mare humorum</i> à moitié hors de l'ombre.
10.	36.	51	3	<i>Aristarchus</i> au bord de l'ombre.
10.	37.	27	4	<i>Keplerus</i> au bord de l'ombre.
10.	38.	37	4	<i>Keplerus</i> à moitié hors de l'ombre.
10.	38.	57	A	<i>Mare humorum</i> quitte l'ombre.
10.	39.	43	4	<i>Keplerus</i> quitte l'ombre.
10.	43.	26	8	<i>Heraclides</i> au bord de l'ombre.
10.	44.	9	21	<i>Tycho</i> au bord de l'ombre.
10.	45.	4	21	<i>Tycho</i> à moitié hors de l'ombre.
10.	46.	7	21	<i>Tycho</i> quitte l'ombre.
10.	46.	15	11	<i>Copernicus</i> au bord de l'ombre.
10.	46.	45	12	<i>Helicon</i> au bord de l'ombre.
10.	47.	5	11	<i>Copernicus</i> à moitié hors de l'ombre.

Suite de la Table des Observations, &c.

TEMPS VRAI.			N. ^{os} des TACH.	TACHES observées.
H.	M.	S.		
10. 47. 45			11	<i>Copernicus</i> quitte l'ombre. L'ombre qui restoit alors sur la Lune étoit d'une nuance égale, mais augmentée d'une teinte plus forte depuis plusieurs minutes; de manière qu'on ne pouvoit plus voir les taches à travers l'ombre: je les avois vues assez bien depuis le commencement de l'émerfion, & pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre.
10. 54. 18			15	<i>Eratosphenes</i> au bord de l'ombre.
11. 1. 57			24	<i>Manilius</i> au bord de l'ombre.
11. 1. 57			F	<i>Mare serenitatis</i> au bord de l'ombre.
11. 4. 53			25	<i>Menclaus</i> au bord de l'ombre.
11. 6. 17			F	<i>Mare serenitatis</i> à moitié hors de l'ombre.
11. 6. 23			31	<i>Fracastorius</i> au bord de l'ombre.
11. 7. 47			D	<i>Mare neclaris</i> au bord de l'ombre.
11. 9. 46			D	<i>Mare neclaris</i> à moitié hors de l'ombre.
11. 10. 36			E	<i>Mare tranquillitatis</i> à moitié hors de l'ombre.
11. 11. 4			F	<i>Mare serenitatis</i> quitte l'ombre.
11. 11. 48			D	<i>Mare neclaris</i> quitte l'ombre.
11. 15. 51			34	<i>Promontorium somnii</i> au bord de l'ombre.
11. 16. 21			E	<i>Mare tranquillitatis</i> quitte l'ombre.
11. 18. 1			H	<i>Mare crisum</i> au bord de l'ombre.
11. 20. 9			H	<i>Mare crisum</i> à moitié hors de l'ombre.
11. 22. 10			H	<i>Mare crisum</i> quitte l'ombre.
11. 23. 42			Fin de l'Eclipe.
11. 34. 28			Reste de pénombre très-légère.

Distances des cornes de l'Ombre.

T E M P S V R A I.			D I S T A N C E des C O R N E S.		D É T A I L S du temps de la mesure des Cornes de l'ombre.
H.	M.	S.	M.	S.	
7.	57.	56	25.	44	pendant l'immersion.
8.	11.	1	31.	7	
8.	20.	0	31.	39	
10.	50.	26	31.	51	pendant l'émerison.
10.	53.	43	29.	53	

*Diamètres apparens de la Lune , mesurés suivant
son cercle horaire.*

T E M P S V R A I.			D I A M È T R E.		D É T A I L S du temps de la mesure du Diamètre.
H.	M.	S.	M.	S.	
8.	45.	25	31.	44	pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre.
8.	48.	55	31.	38	
8.	51.	55	31.	41	
9.	36.	46	32.	0	
10.	3.	42	31.	54	
10.	16.	10	31.	59	après la fin de l'Éclipse.
11.	26.	29	32.	3	
11.	35.	27	32.	0	

La Lune dans cette Éclipse est restée totalement dans l'ombre 1^h 40' 27"; pendant tout le temps que la Lune est restée dans l'ombre, son disque étoit visible : je comparai ses deux bords à deux Étoiles que j'estimai être de septième & de huitième grandeur ; l'une & l'autre sur le parallèle de la Lune.

TEMPS VRAI.			DIFFÉR. de HAUTEUR.	ÉTOILES comparées à la Lune.
H	M.	S.		
9. 21. 46			1. ^{er} bord de la Lune au fil horaire du micromètre.
9. 23. 59			2. ^d bord au même fil ; un peu douteux.
9. 35. 55 $\frac{1}{2}$	7. 30			" de la Vierge au même fil ; inférieur au bord inférieur de la Lune.
9. 37. 12	14. 42			" de la Vierge au même fil ; inférieur au bord inférieur de la Lune.

A 9^h 49' 45" de temps vrai, deux Étoiles télescopiques étoient sorties de dessous le disque de la Lune depuis plusieurs minutes, elles étoient déjà éloignées du bord.

Pour reconnoître ces Étoiles & en déterminer les positions, je les recherchai quatre jours après l'Éclipse (le 22 de Mars) ; je fus fort étonné de trouver & de reconnoître que les deux Étoiles que j'avois comparées à la Lune, & que j'avois estimé être de la septième & de la huitième grandeur, se trouvoient être les Étoiles, la première " de la Vierge, sixième grandeur ; & la seconde " , quatrième grandeur : cette erreur d'estime que j'avois faite, provenoit sans doute du brouillard léger qui existoit alors, & qui diminuoit leur lumière au degré où je les avois estimées. Je comparai ces deux Étoiles " & " de la Vierge à γ , troisième grandeur de la même Constellation, & à deux Étoiles de huitième & neuvième classe, que je présume être les deux Étoiles télescopiques qui ont été éclipsées.

ASCENSION DROITE.			DÉCLINAIS. BORÉALE.			GRANDEUR.	NOMS des Étoiles déterminées.
D.	M.	S.	D.	M.	S.		
179.	35.	41	0.	12.	29	9	Étoile qui a dû être éclipsée.
179.	41.	26	0.	27.	20	8	Étoile qui a dû être éclipsée.
181.	53.	26	0.	25.	20	6	n de la Vierge, comparée à la Lune.
182.	15.	26	0.	32.	39	4	n de la Vierge, comparée à la Lune.
187.	40.	41	0.	15.	19	3	γ de la Vierge, déduite de la Connoiss. des Temps : cette dernière sa déclinaison australe.

Aussitôt que la Lune eut commencé à être éclipsée, il parut sur l'ombre une légère nuance de couleur rouge qui augmenta avec le progrès de l'ombre ; cette nuance de rouge fut considérable pendant tout le temps de l'immersion totale de la Lune dans l'ombre, les parties les plus claires de la Lune présentoient cette couleur rouge avec plus de vivacité que les parties sombres appelées *les mers* ; ces effets étoient très-sensibles à la vue simple : j'avois déjà remarqué cette couleur rouge dans des éclipses précédentes de la Lune, & sur-tout dans celle de la nuit du 30 au 31 Juillet 1776.

Pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre qui dura 1^h 40' 27", le léger brouillard duquel j'ai parlé avoit augmenté, & ce brouillard a pu contribuer pour beaucoup à augmenter la couleur rouge qu'on observoit, très-sensible & très-apparente sur l'ombre qui couvroit la Lune : l'ombre, pendant l'immersion totale, n'étoit pas d'une densité égale ; au commencement de l'immersion, la partie inférieure étoit assez claire, & cette partie claire de l'ombre circuloit autour du centre de la Lune.

L'ombre

L'ombre, pendant la durée de l'Éclipse, étoit bien terminée & mieux que je ne l'avois encore vue dans les éclipses précédentes ; la pénombre très-claire & d'une nuance presque égale, séparée de l'ombre sans confusion, ne laissoit qu'une légère incertitude sur les observations.

Le brouillard & la Lune entièrement éclipsee avoient produit une obscurité très-grande, les lanternes n'étoient point allumées, les voitures dans Paris ne pouvoient plus se voir, elles se rencontroient & l'on craignoit les accidens ; dans ma rue j'entendois, de mon Observatoire, les cris des cochers pour se prévenir : on n'avoit pas prévu à Paris cette grande obscurité, qui eut lieu depuis 8 heures 41 minutes du soir jusqu'à 10 heures 21 minutes, que la Lune commença à sortir de l'ombre.

*SECONDE Éclipse totale de la Lune, la nuit du 10
au 11 Septembre.*

Le Ciel a été parfaitement beau & sans nuages pendant la durée de cette Éclipse, excepté vers sa fin qu'un nuage blanchâtre, mais très-léger, formé au-devant de la Lune, rendoit l'ombre un peu confuse : je parlerai encore de ce nuage dans le détail des Observations.

J'ai employé pour cette Éclipse la même lunette achromatique, le même micromètre que pour l'Éclipse précédente & le même grossissement. Ce grossissement m'a toujours réussi par la grande lumière qu'il procure & la netteté des objets, de manière que j'ai presque toujours vu les taches de la Lune dans les Éclipses à travers l'ombre ; cet avantage m'avoit souvent mis à même de faire de bonnes observations des taches, étant prévenu d'avance de leur sortie dans les émersions de l'ombre : mais dans cette Éclipse je n'ai pas eu le même avantage, l'ombre étoit si obscure que les taches dans l'ombre étoient entièrement effacées, quoique le Ciel fût parfaitement beau & que la lunette grossît peu ; je n'avois pas encore observé dans aucune éclipse de Lune d'ombre

aussi noire que dans celle-ci, elle ressembloit à une forte teinte d'encre de la Chine, je ne pouvois voir les taches que lorsqu'elles commençoient à paroître au bord de l'ombre; cet inconvénient a pu rendre les observations des taches dans l'émerfion un peu douteuses.

La marche de la pendule étoit connue par des hauteurs correspondantes du Soleil prises le 18 Août & le 29 Septembre, & par les midis observés le jour de l'Éclipse & le lendemain, à un instrument des passages placé solidement dans le plan du méridien.

OBSERVATIONS de l'Éclipse de Lune.

T E M P S V R A I.			N. ^{os} des TACH.	TACHES observées.
H.	M.	S.		
9.	39.	34	...	Pénombre sur la Lune déjà sensible.
9.	50.	32	...	La pénombre bien augmentée.
9.	55.	3	...	Commencement de l'Eclipse.
9.	58.	42	1	<i>Grimaldus</i> au bord de l'ombre.
10.	0.	2	1	<i>Grimaldus</i> entré.
10.	3.	21	3	<i>Aristarchus</i> au bord de l'ombre.
10.	3.	41	4	<i>Keplerus</i> au bord de l'ombre.
10.	5.	51	4	<i>Keplerus</i> entré.
10.	8.	1	A	<i>Mare humorum</i> au bord de l'ombre.
10.	8.	1	5	<i>Gassendus</i> au bord de l'ombre.
10.	8.	57	5	<i>Gassendus</i> entré.
10.	8.	57	8	<i>Heraclides</i> entre dans l'ombre.
10.	11.	10	11	<i>Copernicus</i> au bord de l'ombre.
10.	11.	55	A	<i>Mare humorum</i> entré.
10.	12.	42	11	<i>Copernicus</i> entré.
10.	15.	59	12	<i>Helicon</i> au bord de l'ombre.
10.	15.	59	14	<i>Bullialdus</i> au bord de l'ombre.

Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

TEMPS VRAI.			N. ^{os} des TACH.	TACHES observées.
H.	M.	S.		
10.	18.	41	17	<i>Plato</i> au bord de l'ombre. L'ombre cendrée, égale & très-épaisse, empêchoit de voir les taches à travers l'ombre; elles se voyoient encore avant cette dernière observation.
10.	19.	29	17	<i>Plato</i> entré.
10.	22.	38	B.	<i>Mare nubium</i> entré.
10.	24.	25	C	<i>Mare imbrium</i> entré.
10.	24.	25	F	<i>Mare serenitatis</i> au bord de l'ombre.
10.	25.	25	21	<i>Tycho</i> au bord de l'ombre.
10.	25.	25	24	<i>Manilius</i> au bord de l'ombre.
10.	26.	18	21	<i>Tycho</i> à moitié dans l'ombre.
10.	26.	54	24	<i>Manilius</i> entré.
10.	27.	9	21	<i>Tycho</i> entré.
10.	28.	10	25	<i>Menclaus</i> au bord de l'ombre.
10.	29.	49	F	<i>Mare serenitatis</i> à moitié dans l'ombre.
10.	30.	0	E	<i>Mare tranquillitatis</i> au bord de l'ombre.
10.	31.	27	28	<i>Dyonisius</i> au bord de l'ombre.
10.	32.	47	29	<i>Plinius</i> au bord de l'ombre.
10.	34.	46	F	<i>Mare serenitatis</i> entré.
10.	36.	6	E	<i>Mare tranquillitatis</i> à moitié dans l'ombre.
10.	37.	46	D	<i>Mare neclavis</i> au bord de l'ombre.
10.	40.	26	...	L'ombre étoit encore d'une nuance plus forte; on ne pouvoit voir aucune tache à travers l'ombre, & on ne faisoit que soupçonner le bord de la Lune qui étoit dans l'ombre: l'ombre à ce moment devient un peu plus claire, & on commence à apercevoir les taches éclipsées à travers l'ombre. La couleur rouge qui avoit paru jusqu'à ce moment sur la C y avoit été très-foible; elle augmente à mesure que l'ombre devient plus claire.

116 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

T E M P S			N. ^o des TACH.	T A C H E S observées.
V R A I.				
H.	M.	S.		
10.	42.	20	E	<i>Mare tranquillitatis</i> entré.
10.	42.	55	D	<i>Mare nektaris</i> entré.
10.	43.	3	G	<i>Mare fecunditatis</i> au bord de l'ombre.
10.	44.	1	H	<i>Mare crisum</i> au bord de l'ombre.
10.	46.	11	H	<i>Mare crisum</i> à moitié dans l'ombre.
10.	47.	19	G	<i>Mare fecunditatis</i> entré.
10.	48.	16	H	<i>Mare crisum</i> entré.
10.	54.	26	...	Immersion totale de la Lune dans l'ombre. Le point du limbe de la Lune où l'immer- sion totale s'est faite, fut mesuré au moyen du micromètre, & trouvé de 26 minutes 39 secondes au-dessous du bord supérieur de la Lune, suivant son cercle horaire.
12.	35.	9	...	Émerision de la Lune de l'ombre.
12.	37.	6	1	<i>Grimaldus</i> commence à paroître au bord de l'ombre.
12.	38.	28	1	<i>Grimaldus</i> quitte l'ombre.
12.	39.	2	2	<i>Galileus</i> au bord de l'ombre.
12.	42.	48	3	<i>Aristarchus</i> au bord de l'ombre.
12.	43.	23	A	<i>Mare humorum</i> au bord de l'ombre.
12.	44.	8	4	<i>Keplerus</i> au bord de l'ombre.
12.	45.	49	A	<i>Mare humorum</i> à moitié sortie. L'ombre qui étoit restée assez claire sur la Lune jusqu'à cette dernière observation, de manière à voir les taches à travers l'ombre, augmente de nuance, & les taches disparoissent dans l'ombre; le bord de la Lune n'est presque plus visible à la lunette.
12.	46.	54	4	<i>Keplerus</i> quitte l'ombre.
12.	48.	50	8	<i>Heraclides</i> quitte l'ombre.
12.	52.	26	12	<i>Helicon</i> quitte l'ombre.
12.	52.	26	11	<i>Copernicus</i> au bord de l'ombre.

Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

TEMPS VRAI.			N. ^{os} des TACH.	TACHES observées.
H.	M.	S.		
12.	54.	36	11	<i>Copernicus</i> quitte l'ombre.
12.	57.	32	21	<i>Tycho</i> au bord de l'ombre.
12.	58.	23	21	<i>Tycho</i> à moitié hors de l'ombre.
12.	58.	26	17	<i>Plato</i> quitte l'ombre.
12.	59.	6	21	<i>Tycho</i> quitte l'ombre.
13.	4.	34	C	<i>Mare imbrium</i> quitte l'ombre.
13.	6.	34	F	<i>Mare serenitatis</i> au bord de l'ombre.
13.	8.	4	24	<i>Manilius</i> quitte l'ombre; douteuse. L'ombre étoit encore augmentée de densité à cette dernière observation, on ne pouvoit voir avec la lunette aucune tache à travers l'ombre, le bord de la Lune dans l'ombre étoit presque effacé.
13.	10.	54	25	<i>Menelaus</i> quitte l'ombre.
13.	11.	14	F	<i>Mare serenitatis</i> à moitié hors de l'ombre.
13.	11.	47	E	<i>Mare tranquillitatis</i> déjà un peu hors de l'ombre.
13.	16.	19	F	<i>Mare serenitatis</i> quitte l'ombre.
13.	18.	1	E	<i>Mare tranquillitatis</i> quitte l'ombre. L'ombre jusqu'à cette dernière observation avoit augmenté en densité; le bord de la Lune dans l'ombre que j'avois toujours soupçonné, ne pouvoit plus se voir; ce qui pouvoit provenir d'un nuage léger & blanchâtre qui s'étoit formé au devant de la Lune, & qui probablement augmentoit la densité de l'ombre, en rendoit les limites mal terminées & les observations des taches incertaines.
13.	22.	2	D	<i>Mare nectaris</i> quitte l'ombre; l'ombre mal terminée.
13.	24.	2	E	<i>Mare tranquillitatis</i> quitte l'ombre.

118 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Suite des Observations de l'Éclipse de Lune.

T E M P S V R A I.			N. ^{os} des TACH	T A C H E S observées.
H.	M.	S.		
13.	24.	52	G	<i>Mare fecunditatis</i> à moitié hors de l'ombre. A cette dernière observation, le nuage blanchâtre étoit presque dissipé.
13.	27.	31	H	<i>Mare crisum</i> à moitié hors de l'ombre.
13.	30.	1	H	<i>Mare crisum</i> quitte l'ombre.
13.	30.	47	G	<i>Mare fecunditatis</i> quitte l'ombre.
13.	35.	45	Fin de l'Éclipse.
13.	43.	58	Pénombre très-sensible à la vue simple.
13.	48.	57	Il restoit encore sur la Lune un soupçon de pénombre.

Distances des Cornes de l'ombre.

T E M P S V R A I.	DISTANCES des CORNES.	DÉTAILS du temps de la mesure des CORNES.
12 ^h 42' 8"	23' 5"	} pendant l'émerſion de la Lune de l'ombre.
12. 47. 40	29. 3	
12. 53. 43	31. 45	
12. 59. 55	32. 41	
13. 5. 9	31. 49	
13. 10. 8	30. 32	
13. 11. 19	29. 25	
13. 18. 3	27. 14	
13. 22. 9	24. 57	
13. 26. 42	23. 56	
13. 29. 25	16. 4	
13. 31. 31	13. 39	
13. 33. 0	11. 5	
13. 34. 14	9. 27	

Diamètres apparens de la Lune, mesurés suivant son cercle horaire.

TEMPS VRAI.			DIAMÈTRE.	DÉTAILS du temps de la mesure du Diamètre.
H.	M.	S.		
9.	33.	38	32. 26	diamètre mesuré avant l'Éclipse.
11.	8.	20	32. 33	pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre.
12.	17.	11	32. 42	pendant l'immersion totale.
13.	38.	58	32. 31	après la fin de l'Éclipse.

Avant que l'Éclipse fût commencée, j'examinai s'il n'y auroit pas dans le voisinage de la Lune quelques Étoiles qui pussent lui être comparées ; j'en trouvai une de sixième grandeur sur son parallèle, qui étoit la quatre-vingt-seizième du Verseau, suivant Flamsteed. J'avois soupçonné que cette Étoile pourroit bien être éclipsée pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre ; elle ne le fut pas, le bord supérieur passa au-dessous de l'Étoile : celle-ci fut comparée à la Lune, ainsi que trois autres Étoiles, pendant l'immersion totale. De ces trois Étoiles, il y en avoit deux de connues, qu'on trouve dans le Catalogue de *Tobie Mayer*. Deux Étoiles télescopiques furent éclipsées pendant l'immersion totale. Voici ces Observations.

TEMPS V R A I.			DIFFÉR. de HAUTEUR.		ÉTOILES comparées à la Lune.
H.	M.	S.	M.	S.	
9.	29.	37 $\frac{1}{2}$	8.	33	96. ^e du Verseau ; pass. au fil horaire, supérieur au bord inférieur de la Lune.
9.	33.	28 $\frac{1}{4}$		premier bord de la Lune au même fil.
9.	35.	42 $\frac{1}{3}$		second bord de la Lune au même fil.
9.	45.	0		second bord de la Lune au fil horaire.
9.	48.	49	9.	3	96. ^e étoile du Verseau au même fil, inférieur au bord supérieur de la Lune.
11.	26.	41 $\frac{1}{2}$		premier bord de la Lune au fil horaire.
11.	28.	47 $\frac{1}{2}$		second bord au même fil.
11.	30.	13 $\frac{1}{2}$	19.	55	Étoile de septième grandeur de Mayer au même fil, inférieur au bord supérieur de la Lune.
11.	32.	13	6.	24	Étoile de sept à huitième grandeur de Mayer au même fil, supérieur au bord supérieur de la Lune.
11.	34.	13	13.	23	Étoile de septième grandeur nouvelle au même fil, inférieur au bord supérieur de la Lune.
11.	49.	40 $\frac{1}{2}$		immersion d'une Étoile de neuvième grandeur, bonne à la seconde.
11.	50.	50		immersion d'une seconde Étoile de neuvième grandeur, moins bonne.

L'immersion de cette dernière Étoile étoit difficile à bien faire, à cause du mouvement de la Lune en déclinaison ; l'Étoile fut long-temps comme adhérente au bord de la Lune avant son immersion : j'avois employé pour cette Observation un grossissement de quatre-vingts fois, car avec un plus foible, l'Observation eût été trop douteuse, à cause de la petitesse de ces deux Étoiles. Quelques minutes avant les immersions, une petite Étoile de même grandeur étoit sortie du bord opposé de la Lune.

Pour reconnoître les Étoiles que j'avois comparées à la Lune,

Lune, & les deux petites qui avoient été éclipsées, je les recherchai le 14 Septembre, quatre jours après l'éclipse de Lune: les ayant reconnues, je les comparai à l'étoile ϕ du Verseau, quatrième grandeur. J'ai déterminé leurs positions en ascension droite & en déclinaison pour le 10 Septembre 1783.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON australe.	Grandeur.	Noms des Étoiles déterminées.
D. M. S.	D. M. S.		
345. 46. 26	7. 12. 17	4.5	ϕ Du Verseau, position déd. de la <i>Conn. des Temps.</i>
347. 2. 40	6. 17. 44	6	96.° du Verseau, Catalogue de Flamsteed.
347. 33. 9	5. 50. 46	7	Étoile qui n'avoit pas encore été déterminée.
348. 50. 10	5. 48. 36	9	Étoile qui a été éclipsée, mais non observée.
349. 22. 17	5. 27. 57	9	Étoile éclipsée, l'immersion observée.
349. 22. 17	5. 38. 23	9	Étoile éclipsée, l'immersion observée.
349. 35. 2	5. 42. 3	7	Étoile du Catalogue de Tobie Mayer.
350. 4. 59	5. 15. 42	7.8	Étoile du même Catalogue.
350. 54. 39	5. 35. 21	7	Étoile qui n'avoit pas encore été déterminée.

Les observations de cette Éclipse sont d'autant plus exactes, que les limites de l'ombre se distinguoient sans confusion de la pénombre: cette dernière étoit d'une nuance égale & assez claire pour juger de leurs différences, & ne pas les confondre l'une avec l'autre.

Avant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre, la couleur rouge parut sur la Lune; elle augmenta avec le progrès de l'ombre; elle fut très-apparente pendant l'immersion totale de la Lune dans l'ombre, qui dura 1^h 40' 43". La Lune paroissoit, à une vue basse, comme une grande Étoile rougeâtre, semblable à la Planète de Mars, & rayonnante; mais en la regardant avec la lunette, on voyoit faiblement son disque & la couleur rouge inégalement distribuée sur la Lune, ainsi que l'ombre: une partie étoit plus claire que l'autre; la

Mém. 1783.

Q

partie la plus obscure circuloit lentement autour du centre de la Lune. Dans l'émerſion de la Lune, la couleur rouge fut moins apparente : elle le fut moins auſſi dans cette Éclipſe que dans la précédente du 18 Mars, ce qui pouvoit provenir dans celle-ci du brouillard léger qui avoit exiſté pendant ſa durée.

Tout le temps que la Lune reſta dans l'ombre, l'obſcurité fut très-grande & le ciel d'une très-grande beauté ; on pouvoit voir juſqu'aux plus petites Étoiles. Je n'avois pas encore vu un ciel auſſi pur & les Étoiles auſſi brillantes ; ce ſpectacle étoit raviſſant. Je parcourus le ciel pendant cette grande obſcurité, avec une lunette de nuit pour la recherche des Comètes, mais je ne rencontraï que des Nébuleuſes déjà connues, que je n'avois jamais vues auſſi belles & auſſi apparentes que dans le temps de cette grande obſcurité.

Cette Éclipſe avoit ſans doute rappelé la grande obſcurité qu'avoit produite la dernière Éclipſe du 18 Mars, les accidens & les embarras des voitures qu'elle avoit occaſionnés dans les rues de Paris, faute d'avoir éclairé cette grande Ville : les réverbères durant celle-ci furent allumés, & il n'arriva aucun embarras.

M. Pigott fils m'a envoyé d'York l'Obſervation qu'il avoit faite des deux petites Étoiles que j'avois obſervées pendant l'immerſion totale de cette Éclipſe avec l'occultation de deux autres Étoiles en 1783 : les voici.

	<i>Temps vrai.</i>	
1783. Sept. 10	11 ^h 29' 6"	Immerſion de l'une des deux petites Étoiles.
	11. 34. 44 $\frac{1}{2}$	Immerſion de la ſeconde.
Oct. 7	14. 26. 28 $\frac{1}{2}$	Immerſion de ϕ du Verſeau.
Déc. 30	8. 0. 24	Immerſion de δ des Poifſons.



M É M O I R E

CONTENANT LES OBSERVATIONS

DE LA COMÈTE DE 1783,

Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine. (a)

Par M. MESSIER.

CETTE Comète qui étoit très-petite, très-difficile à observer, & qu'on ne pouvoit voir qu'avec des lunettes, fut découverte à Paris, par M. Méchain, le 26 Novembre 1783, à neuf heures du soir, sur le pied droit de derrière de la constellation du Bélier: à 10 heures 30 minutes du soir, il en détermina la position; son ascension droite étoit de 34 degrés 47 minutes, & sa déclinaison boréale de 12 degrés 2 minutes $\frac{1}{2}$; & à 14 heures 16 minutes, elle avoit 34 degrés 41 minutes d'ascension droite, & 12 degrés 15 minutes de déclinaison. Le lendemain 27 Novembre, M. Méchain me donna ces positions, au moyen desquelles je cherchai la Comète avec ma grande lunette achromatique, montée sur sa machine parallaxique; à 7 heures du soir, par un beau ciel, je trouvai la Comète au-dessous & près de l'Écliptique, sous le ventre du Bélier; elle ressembloit à une nébuleuse, sa lumière étoit extrêmement foible; au centre on apercevoit une lumière plus forte, qui étoit le noyau, autour duquel cette lumière foible s'étendoit également; son diamètre étoit d'environ 4 minutes de degré: avec un peu d'attention, & l'œil dirigé par la grande lunette, je pouvois voir la Comète avec une lunette de nuit, d'un

(a) C'est la XXI.^e Comète que j'ai observée de l'Observatoire de la Marine, & la LXVIII.^e dont l'orbite a été calculée: en suivant l'ordre de

la Table des Comètes, qui est rapportée dans l'Astronomie de M. de la Lande, tome III, page 366; & tome IV, page 704.

pied de foyer, mais à la vue simple il n'étoit pas possible de la voir. Je comparai la Comète deux fois à une Étoile de la neuvième grandeur, qui étoit sur son parallèle, & cette Étoile fut ensuite comparée aux étoiles α & σ du Bélier, au moyen d'une Étoile intermédiaire; de cette comparaison, j'ai tiré la position de la petite Étoile (*n.^e 8*), qu'on trouvera dans la *Table II* qui est à la suite de ce Mémoire; & de la comparaison de la Comète à cette Étoile, j'ai déduit celle de la Comète: le 27 Novembre, à 7 heures 56 minutes 17 secondes, temps vrai, la Comète précédoit l'Étoile au fil horaire du micromètre, de $1^d 44' 15''$; la Comète étoit au midi de l'Étoile, de $27' 13''$: ainsi son ascension droite étoit de $34^d 4' 30''$, & sa déclinaison, $13^d 8' 7''$, boréale: à 8 heures 34 minutes 29 secondes, l'ascension droite de la Comète étoit de $34^d 3' 17''$; & sa déclinaison, $13^d 9' 46''$.

Je ne rapporte ces détails que pour la première observation, on trouvera les autres dans deux Tables qui sont à la suite de ce Mémoire: la première contient les déterminations de la Comète en ascension droite & en déclinaison pour tous les jours d'observations; & la seconde Table, les positions des Étoiles, soit celles qui étoient déjà connues, soit celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations, & dont la plupart ont servi à la détermination des lieux de la Comète, à chaque jour où la Comète a été observée.

Le 28, la Comète se voyoit moins bien que la veille, le ciel étoit cependant beau, mais il y avoit un peu de brouillard; je pouvois voir la Comète avec la lunette de nuit, mais plus faiblement que le 27; je la comparai directement aux étoiles σ & α du Bélier, j'en ai rapporté trois positions dans la Table: la Comète, dans cette observation, étoit au-dessus de l'Écliptique qu'elle avoit traversée entre les observations du 27 & du 28 Novembre.

Le 29, beau temps; la Comète paroissoit, à peu de chose près, avoir la même lumière que les deux jours précédens, sans qu'on pût reconnoître si sa lumière augmentoit ou diminueoit; je comparai la Comète à une Étoile nouvelle de

huitième grandeur : pour déterminer le lieu de cette Étoile, je la comparai directement à σ du Bélier ; ces observations m'ont donné deux positions du lieu de la Comète, qu'on trouvera dans la première Table.

Le 30, le ciel fut couvert : le même jour je reçus une Lettre d'Angleterre, de M. Pigott fils, datée d'York, le 22 Novembre, dans laquelle il m'annonçoit la découverte qu'il venoit de faire d'une nouvelle Comète, c'étoit la même que celle dont je rends compte dans ce Mémoire. Voici un extrait de la Lettre de M. Pigott.

« Je m'empresse de vous annoncer que j'ai découvert une Comète le 19 de ce mois (Novembre) : voici les observations que le temps m'a permis d'en faire. Le 19 Novembre, « à 11 heures un quart du soir, elle avoit 41^d 0' d'ascension « droite, & 3^d 10' de déclinaison boréale : le 20, je vis la « Comète le soir, où je l'attendois ; à 10 heures 54 minutes ; « son ascension droite étoit de 40 degrés, sa déclinaison de « 4 degrés 32 minutes : le 21, je vis la Comète, mais je ne « pus l'observer avec mes instrumens ; cette Comète ressemble « à une nébuleuse, ayant un diamètre d'environ 2 minutes « de degré ; le centre n'est pas beaucoup plus brillant que la « lumière environnante, en éclairant les fils de l'instrument, « on ne pouvoit la voir qu'avec difficulté. »

L'on voit par l'extrait de cette lettre, que la Comète a été vue en Angleterre, sept jours plus tôt qu'à Paris.

Le 1.^{er} Décembre, le ciel qui avoit été couvert s'éclaircit vers une heure de l'après-midi ; le soir, beau temps, à l'exception d'un léger brouillard qui s'étoit élevé ; la Lune qui entroit dans son premier quartier, répandoit une grande lumière ; & ce ne fut pas sans peine que je pus revoir la Comète, je la trouvai placée sur le parallèle de l'étoile γ du Bélier, à laquelle elle fut directement comparée ; je ne fus pas obligé d'éclairer les fils du micromètre pour l'observer, la lumière de la Lune suffisoit.

L'étoile γ du Bélier, qui est rapportée dans les catalogues de quatrième grandeur, est double ; ce sont deux étoiles,

très-près l'une de l'autre, séparées seulement de l'un de leurs diamètres; les deux étoiles ayant exactement la même lumière, estimées de la septième à sixième grandeur.

Le 2, beau temps le soir, il y avoit moins de brouillard que la veille, mais la Lune qui avoit passé son premier quartier, répandoit une si grande lumière qu'elle étoit suffisante pour éclairer les fils du micromètre: je comparai la Comète directement à la même étoile γ du Bélier; elle fut observée & comparée plusieurs fois à cette Étoile, j'en ai rapporté les positions dans la première Table.

Le 3, ce ne fut qu'avec la plus grande difficulté que je pus revoir la Comète, il falloit bien connoître sa position & son lieu dans le Ciel pour la trouver & la reconnoître; je la comparai directement & trois fois à l'Étoile η du Bélier, sixième grandeur; la grande lumière de la Lune effaçoit presque celle de la Comète; je présimai qu'il ne seroit pas possible de la revoir tant que la Lune & la Comète seroient sur l'horizon, & j'étois presque sans espérance de la revoir, lorsque la Lune n'y formeroit plus d'obstacle, à cause de la foiblesse de sa lumière qui diminueoit en s'éloignant de la terre.

Depuis le 3 de Décembre jusqu'au 12, la lumière de la Lune & le brouillard, m'empêchèrent de rechercher la Comète; le 12, le ciel étant devenu très-beau le soir, je cherchai la Comète avant que la Lune fût levée, je la trouvai près de l'Étoile α du grand triangle où elle devoit être d'après mes précédentes observations; sa lumière étoit si affoiblie qu'il ne fut pas possible de pouvoir éclairer les fils du micromètre, sans la faire disparaître; je la comparai cependant trois fois à l'Étoile α du grand triangle, de troisième à quatrième grandeur; de ces trois déterminations j'ai pris le milieu pour avoir la position de la Comète, qu'on trouvera dans la première Table.

Le 13 Décembre, beau temps comme la veille, je comparai quatre fois la Comète à la même étoile α du grand triangle; j'en ai déduit par un milieu la position de

la Comète; je déterminai le même soir la position d'une Étoile de septième grandeur, en la comparant à la même Étoile, pour servir le lendemain à la détermination de la Comète, celle-ci ne pouvant plus être comparée directement à l'Étoile α .

Le 14, beau temps le soir; mais les illuminations de Paris pour la paix, répandoient une grande vapeur dans l'atmosphère, & ce ne fut pas sans peine que je pus revoir la Comète; elle étoit bien plus difficile à apercevoir que la veille, je la comparai encore trois fois à l'Étoile nouvelle de septième grandeur, que j'avois déterminée par α du grand Triangle; de ces trois observations qui s'accordoient entr'elles, j'ai déduit la position de la Comète; elle étoit sur le parallèle de la nébuleuse qui est entre le grand Triangle & le Poisson boréal, que j'avois découverte le 2 Août 1764, & qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie, année 1771. page 453, sous le n.^o XXXIII. La Comète & cette nébuleuse avoient la même lumière.

Grand brouillard les 15, 16 & 17 Décembre, le Soleil même ne parut pas: ce brouillard avoit déposé un givre considérable, les toits étoient blancs comme s'il eût tombé de la neige. La nuit du 17 au 18, ce grand brouillard se dissipa & le ciel s'éclaircit; le 18, beau temps le soir, je cherchai la Comète qui perdoit chaque jour de sa lumière, & ce ne fut pas sans peine que je pus la revoir; je la trouvai sur le parallèle des étoiles ϵ , η & γ du grand Triangle, je la comparai à ces trois Étoiles, & j'en ai déduit la position de la Comète.

Le 19, beau temps le soir, la Comète paroissoit un peu plus foible que la veille, elle étoit sur le parallèle de l'étoile γ du grand Triangle à laquelle je la comparai directement; comme la différence de passage au fil horaire du micromètre, entre la Comète & l'Étoile, étoit de plus d'une demi-heure, je ne pus répéter une seconde fois l'observation; je crois cependant que cette différence observée est bonne à quelques secondes près, je dis à quelques secondes, à cause de la

grande difficulté de voir la Comète, & parce que je ne pouvois plus éclairer les fils du micromètre sans la faire disparaître, ainsi l'observation de ce soir peut être plus incertaine que les précédentes.

Le 20 au soir, le ciel assez beau, cependant il y avoit un peu de brouillard qui commençoit à s'élever; la Comète étoit sur le parallèle de la belle étoile β , deuxième grandeur de la ceinture d'Andromède: je la comparai directement à cette Étoile, & deux fois à une Étoile de la sixième grandeur que j'avois déterminée en la comparant à la même étoile β ; cette Étoile de sixième grandeur étoit peu éloignée de la Comète: ces observations s'accordoient entr'elles, j'ai pris un milieu pour avoir la position de la Comète.

Dernière
observation.

Le 21 Décembre, beau temps, la Comète, à cause de son peu de mouvement en déclinaison, se trouvoit encore ce soir sur le parallèle de β d'Andromède, & de la nouvelle Étoile que j'avois déterminée; je comparai la Comète une fois à β & deux fois à l'autre Étoile: le milieu m'a donné, avec assez de précision, la position de la Comète en ascension droite & en déclinaison.

Le 22, le ciel couvert d'un brouillard, qui continua les jours suivans, de manière qu'il ne fut plus possible de rechercher & de revoir la Comète: il est même à présumer qu'il n'auroit plus été possible de la revoir; sa lumière, à ma dernière observation, étoit trop foible pour qu'elle pût être visible encore les jours suivans. Ainsi ma dernière observation sur cette Comète est du 21 Décembre: & depuis le 27 de Novembre jusqu'au 21 de Décembre, j'ai eu treize jours d'observations & vingt-deux déterminations du lieu de la Comète en ascension droite & en déclinaison.

Voici maintenant deux Tables, dont l'une contient tous les lieux de la Comète observés en ascension droite, en déclinaison, en longitude & latitude, avec les différences de passages entre la Comète & les Étoiles au fil horaire du micromètre, & les différences que les observations ont données en déclinaison entre la Comète & l'Étoile à laquelle elle

elle a été comparée. Ces différences sont marquées des signes + & — : le premier indique qu'il faut ajouter ces différences observées aux positions des Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée, pour avoir celles de la Comète en ascension droite ou en déclinaison.

La seconde Table contient les ascensions droites & les déclinaisons des Étoiles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, tant celles qui ont été prises en différens Catalogues, que les nouvelles Étoiles que j'ai déterminées. Ces Étoiles sont réduites au temps des observations ; je n'y ai fait d'autre réduction que celle qu'on trouve dans les Catalogues, sous le titre de *variation annuelle*.

Je joins aussi à ce Mémoire une Carte céleste, que j'ai destinée & construite d'après mes Observations ; cette Carte est divisée en degrés d'ascension droite & de déclinaison. J'ai rapporté les positions & la route apparente de la Comète parmi les Étoiles fixes. Il sera aisé de juger, à l'inspection de cette Carte, de la position de la Comète observée, & de celles des Étoiles qui ont servi à sa détermination : je les ai renfermées dans un cercle. J'ai rapporté aussi sur cette Carte la position observée à York. On voit par cette Carte, que la Comète, pendant la durée de son apparition, a passé entre les deux Comètes observées en 1766 (que j'ai rapportées sur cette Carte), par la tête de la Baleine, par le Bélier qu'elle a traversé, & par la pointe du grand Triangle : elle a cessé de paroître sur le parallèle de l'Étoile β de la ceinture d'Andromède.

TABLE I.

Des lieux apparens de la Comète de 1783, comparée aux Étoiles fixes.

1783.	TEMPS MOYEN des Observ.	ASCENS. droite de la Comète observée.	DÉCLIN. de la Comète observée, boréale.	DIFFÉRENCE en ascension droite de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉR. en décl. de la Comète avec les Étoiles.	LONGIT. de la Comète observée.	LATITUDE de la Comète observée *.	Grandeur des Étoiles.	Letres & N. ^{os} des Étoiles.	ÉTOIL. avec lequel. la Comète a été comp.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
Nov. 27	7. 44. 23	34. 4. 30	13. 8. 7	— 1. 44. 15	— 27. 13	36. 13. 45	0. 30. 19 A	9	8	} déterm.
	8. 22. 35	34. 3. 17	13. 9. 46	— 1. 45. 28	— 25. 34	36. 13. 9	0. 28. 22 B	9	8	
28	7. 28. 14	33. 18. 17	14. 19. 37	— 6. 35. 30	+ 8. 39	35. 55. 5	0. 52. 1 B	6	σ	} du Bélier.
	7. 59. 33	33. 16. 32	14. 20. 59	— 6. 35. 15	+ 10. 1	35. 53. 55	0. 53. 52	6	σ	
	8. 31. 10	33. 14. 55	14. 22. 25	— 6. 38. 52	+ 11. 27	35. 52. 54	0. 55. 44	6	σ	} déterm.
29	7. 27. 1	32. 30. 55	15. 29. 8	+ 1. 28. 45	+ 40. 41	35. 35. 6	2. 14. 20	8	6	
	8. 10. 12	32. 28. 55	15. 30. 48	+ 1. 26. 45	+ 42. 22	35. 33. 53	2. 15. 9	8	6	} grand Triang. } déterm. } grand Triang. } d'Andr.
Déc. 1	7. 50. 51	31. 1. 10	17. 45. 55	+ 5. 35. 45	— 28. 4	35. 0. 38	4. 50. 40	4	γ	
	8. 16. 6	31. 0. 10	17. 46. 48	+ 5. 34. 45	— 27. 11	34. 59. 59	4. 51. 50	4	γ	
2	6. 51. 11	30. 20. 10	18. 47. 44	+ 4. 54. 45	+ 33. 45	34. 45. 14	6. 2. 6	4	γ	
	6. 15. 13	30. 19. 10	18. 49. 1	+ 4. 53. 45	+ 35. 2	34. 44. 48	6. 4. 29	4	γ	
	7. 38. 39	30. 18. 47	18. 50. 11	+ 4. 53. 22	+ 36. 12	34. 44. 52	6. 4. 51	4	γ	
3	6. 57. 3	29. 38. 24	19. 51. 40	— 0. 32. 30	— 19. 30	34. 30. 23	7. 15. 46	6	η	
	7. 26. 39	29. 37. 47	19. 51. 50	— 0. 33. 7	— 19. 20	34. 29. 54	7. 16. 7	6	η	
	7. 35. 53	29. 37. 9	19. 51. 56	— 0. 33. 45	— 19. 14	34. 29. 22	7. 16. 25	6	η	
12	6. 23. 16	24. 30. 8	28. 6. 23	— 0. 42. 0	— 24. 56	33. 5. 49	16. 38. 48	4	α	
13	6. 15. 17	24. 3. 33	28. 53. 49	— 1. 8. 35	+ 22. 30	33. 2. 2	17. 31. 33	4	α	
14	6. 2. 31	23. 39. 8	29. 38. 39	+ 1. 16. 52	+ 41. 39	32. 59. 24	18. 21. 7	7	γ	
18	8. 28. 2	22. 10. 16	32. 31. 15	— 8. 57. 36	— 19. 9	32. 56. 31	21. 29. 43	4	γ	
19	7. 36. 56	21. 52. 52	33. 7. 37	— 9. 15. 0	+ 17. 13	32. 57. 38	22. 8. 55	4	γ	
20	7. 37. 45	21. 34. 41	33. 47. 35	+ 7. 9. 25	— 40. 39	32. 59. 55	22. 51. 36	2	β	
21	7. 35. 37	21. 19. 29	34. 23. 28	+ 6. 54. 13	— 4. 46	33. 3. 8	23. 29. 31	2	β	

* La latitude de la Comète du 27 Novembre est australe, toutes les autres sont boréales.

TABLE II.

*Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles
la Comète a été comparée.*

Leurs positions sont réduites au temps des Observations.

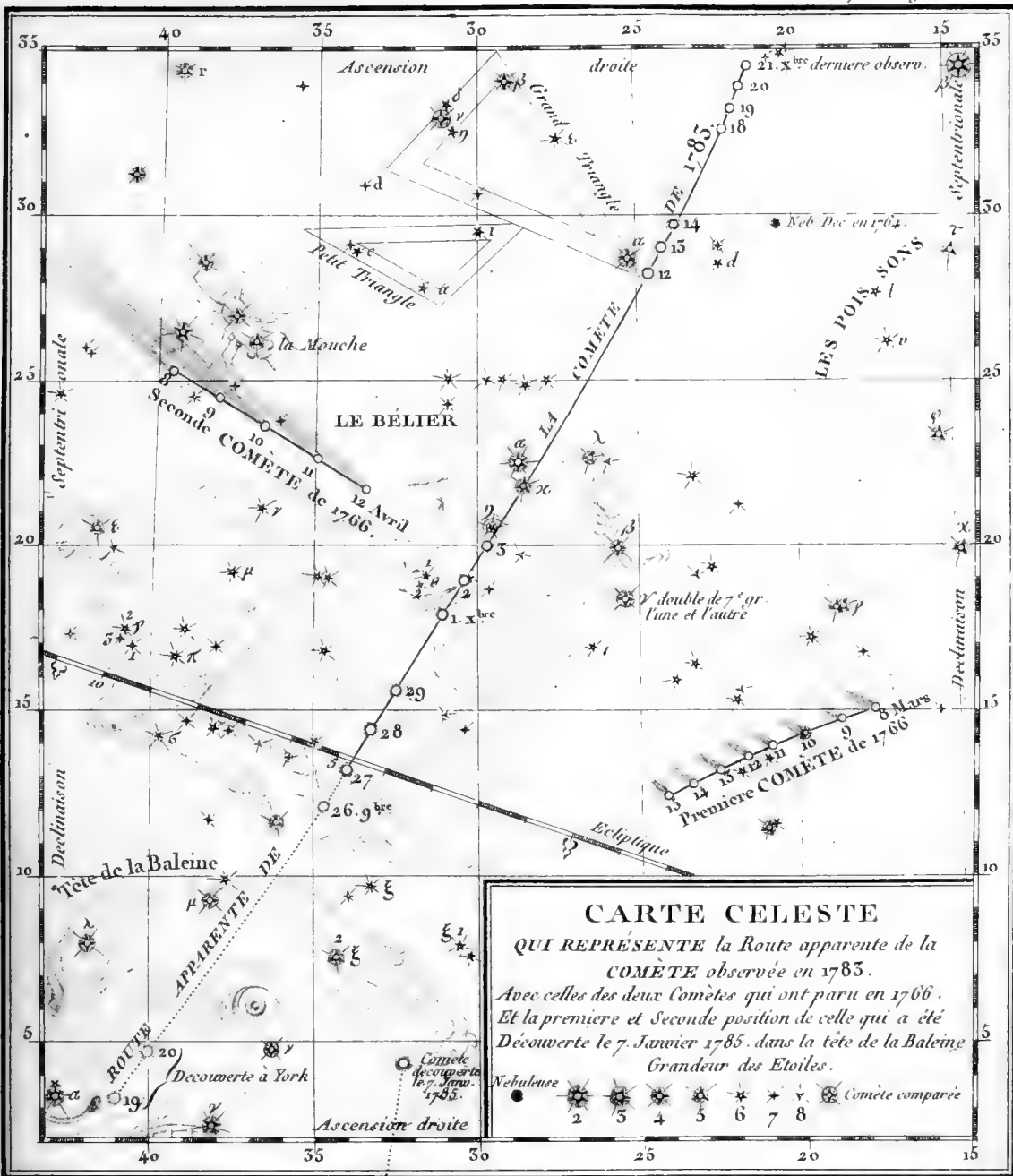
ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAIS. des Étoiles boréale.	Grandeur des Étoiles.	Letres & N. des Étoiles.	NOMS DES CONSTELLATIONS qui ont servi à la détermination du lieu de la COMÈTE.
D. M. S.	D. M. S.			
14. 25. 16	34. 28. 14	2	β	d'Andromède, Connoissance des Temps, Comète comparée les 20 & 21 Décembre.
20. 7. 16	34. 43. 35	6	1	déterminée par le n. ^o 4 ci-dessous.
20. 23. 23	34. 29. 32	7	2	déterminée par le n. ^o 1 ci-dessus.
22. 22. 16	28. 57. 0	7	3	déterminée par α du grand Triangle, Comète comparée le 14 Décembre.
22. 24. 19	34. 9. 6	6	4	déterminée par β d'Andromède.
25. 12. 8	28. 31. 19	4	α	du grand Triangle, Conn. des Temps, Comète comparée les 12 & 13 Décembre.
25. 25. 25	18. 13. 59	4	γ	double du Bélier, Catalogue zod. de la Caille, Comète comparée les 1. ^{er} & 2 Décembre.
25. 40. 58	19. 44. 39	4	β	du Bélier, Connoissance des Temps.
28. 35. 5	19. 33. 6	8	5	déterminée par β du Bélier.
29. 40. 13	18. 28. 46	7	15	du Bélier, comparée à γ .
30. 10. 54	20. 11. 10	6	η	du Bélier, comp. à β , Comète comp. le 3 Déc.
31. 2. 10	14. 48. 26	8	6	déterminée par σ du Bélier, Comète comparée le 29 Décembre.
31. 7. 52	32. 50. 24	4	γ	du grand Triangle, Conn. des Temps, Comète comparée le 19 Décembre.
35. 16. 27	14. 3. 55	7	7	déterminée par le n. ^o 6 ci-dessus.
35. 48. 45	13. 35. 20	9	8	déterm. par le n. ^o 9 ci-dessous, Comète comp. le 27 Novembre.
36. 47. 6	13. 55. 1	8	9	déterminée par σ du Bélier.
7. 38. 58	14. 17. 2	7	10	déterminée par le n. ^o 9 ci-dessus.
38. 9. 45	14. 23. 13	6	0	du Bélier, comparée au n. ^o 9 ci-dessus.
39. 0. 43	14. 35. 39	7	11	déterminée par le n. ^o 9 ci-dessus.
39. 33. 47	14. 10. 58	6	σ	du Bélier, prise du Catalogue zodiac. Comète comparée le 28 Novembre.

D'après les lieux déterminés de cette Comète, l'on a recherché les élémens de son orbite; M. le Président de Saron l'a calculée, ainsi que M. Méchain: les élémens qu'ils en ont déduits ne cadrent pas avec les observations, il y a toujours quelques minutes de différence, quoiqu'on ait employé différentes déterminations de la Comète dans la recherche de chacun de ces élémens.

	I. ^{er} Élément.	II. ^e Élément.	III. ^e Élément.
	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
Lieu du nœud ascendant..	1. 24. 10. 10	1. 24. 26. 51	1. 24. 10. 45
Inclinaison de l'orbite....	54. 9. 53	56. 46. 28	52. 19. 57
Lieu du périhélie dans l'orb.	1. 13. 58. 47	0. 27. 44. 56	1. 19. 4. 30
Logar. de la distance périh.	0,195175	0,167876	0,1978810
Passage au périhélie 1783,	Nov. 13 ^d 6 ^h 13' 0"	Oct. 23 ^d .	Nov. 20 ^d 9 ^h 26' 0"
temps moyen à Paris.			
Sens du mouvement direct.			

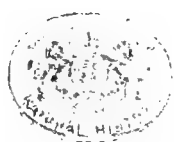
M. le Chevalier d'Angos, Directeur de l'Observatoire de Malte, à qui j'avois envoyé mes observations, m'a écrit, « je n'ai pu faire cadrer vos observations de la Comète de 1783, dans une parabole ».





Gravé par Y. le Couv, d'après le dessin de M. Messier

9. Janvier



EXPÉRIENCES

*Propres à développer les effets de la Lumière
sur certaines Plantes.*

Par M. l'Abbé TESSIER.

LES personnes livrées à l'étude de la Physique végétale, n'ont pas oublié d'observer que la lumière du jour produisoit des effets sur les Plantes : deux phénomènes sur-tout ont dû les frapper ; le penchant de celles qui se trouvent écartées de la lumière pour se diriger vers elle, c'est ce qu'on appelle *nutatation*, & l'*éthiolement* de celles qui croissent dans l'obscurité. Ray, & peut-être d'autres Savans avant lui, ont parlé de la cause de l'éthiolement des Plantes : M.^{rs} Bonnet, du Hamel & Meesse ont rapporté sur cet objet des expériences qui leur sont propres, particulièrement M. Bonnet ; mais ils se sont arrêtés trop tôt, & n'ont pas poussé leurs recherches aussi loin qu'ils l'auroient pu faire. Quoiqu'il soit très-vrai que mes expériences sur cet objet aient été projetées & exécutées en partie avant que j'eusse rien lû de ce que ces Savans en ont écrit, & avant même qu'ils eussent publié toutes leurs découvertes, néanmoins je ne m'attribuerai que le foible mérite d'avoir varié les expériences & d'en avoir fait de neuves, qui m'ont conduit à calculer, pour ainsi dire, le penchant des Plantes vers la lumière, & à prouver jusqu'à quel point la lumière, différemment modifiée, pouvoit influer sur l'éthiolement de certains végétaux.

Lû
en 1783.

Ce Mémoire sera partagé en deux articles.

ARTICLE PREMIER.

Penchant des Plantes vers la lumière.

LORSQUE dans une serre ou dans une cave, on voit des Plantes qu'on y cultive se pencher vers les fenêtres ou vers les soubiraux, on est porté à croire qu'elles ne prennent cette

direction que pour se rapprocher de l'air ; car on ne peut imaginer que ce soit pour chercher la chaleur , puisqu'en hiver il fait plus chaud dans les serres & dans les caves que dehors ; mais il est certain que c'est uniquement pour recevoir l'impression de la lumière. J'ai vu dans une serre de jardin , qui n'avoit qu'une fenêtre , plusieurs rangs de chicorée sauvage qui y croissoit , se courber plus ou moins , à proportion de ce qu'ils étoient plus ou moins éloignés de la lumière. Dans une cave destinée à conserver des pommes de terre , les fanes de celles qui poussèrent au printemps étoient d'autant moins penchées , qu'elles étoient plus près du soubirail.

Ces observations réunies à beaucoup d'autres , m'ont fait naître l'idée de m'assurer , par des expériences : 1.^o si le penchant des Plantes vers la lumière avoit lieu à la surface de la terre , comme dans des caves ; dans des appartemens fort éclairés , comme dans des serres où il y avoit peu de jour : 2.^o si l'inclinaison des Plantes ne variroit pas , selon la manière dont elles seroient élevées & selon l'époque de leur végétation : 3.^o si les différentes modifications de la lumière n'y causeroient pas quelque changement : 4.^o si elles n'auroient pas plus ou moins de penchant vers la lumière , selon qu'elles seroient dans telle ou telle position. C'est par des faits que tous ces points se trouveront éclaircis.

I.^{me}
Expérience.

Un pot , dans lequel j'avois semé du blé , fut placé dans une chambre , où il recevoit obliquement la lumière de la fenêtre : les jeunes tiges s'inclinèrent de ce côté d'une manière très-sensible : lorsqu'elles eurent un pouce je retournai le pot ; bientôt l'extrémité des tiges se renversa & se pencha vers la fenêtre ; ce ne fut que quelques jours après que le reste des tiges prit cette direction & par degrés.

II.^{me}
Expérience.

Je semai du blé dans plusieurs pots , remplis , comme le premier , de terre de jardin ; je les disposai de manière que le jour de la fenêtre tombât plus ou moins obliquement sur eux. L'inclinaison des tiges qui poussèrent , fut en raison de l'éloignement où étoient les pots de la fenêtre. Ces tiges étant foibles , comme celles de beaucoup de Plantes élevées

dans des appartemens, au moment où la première feuille s'en sépara, elles se renversèrent, mais presque toutes du côté de la lumière.

Je posai dans un gobelet plein d'eau un morceau de liège percé de trous, sur lesquels j'avois placé des grains de blé: ils germèrent, & leurs tiges se dirigèrent vers la fenêtre: l'une d'elles se pencha presque horizontalement, en s'appuyant sur le bord antérieur du gobelet.

III.^{me}
Expérience.

Sur une cheminée en face d'une fenêtre, deux gobelets pleins de mousse humide, & dans lesquels j'avois mis des grains de blé, ayant été placés, l'un devant la glace & l'autre devant un des pilastres du dessus de cheminée, les tiges du premier s'élevèrent presque droites; celles du second se dirigèrent, mais faiblement, vers la fenêtre. Je pensai que dans ces deux cas l'inclinaison étoit faible, parce que la lumière de la fenêtre étant répétée dans la glace & réfléchiée par la couleur blanche du pilastre, les tiges avoient reçu moins d'impression de la lumière directe de la fenêtre.

IV.^{me}
Expérience.

Après avoir couvert d'une étoffe noire, une encoignure placée obliquement par rapport à la fenêtre, j'y disposai deux gobelets pleins de mousse & sur laquelle il y avoit du blé: derrière l'un d'eux j'avois ajusté un miroir, de manière qu'il en recevoit toute la réflexion; les tiges du gobelet qui avoit derrière lui l'étoffe noire, s'inclinèrent fortement; celles de celui qui étoit devant le miroir s'élevèrent presque droites.

V.^{me}
Expérience.

De quatre gobelets dans l'état de ceux de l'expérience précédente, deux furent mis devant une glace, & deux devant des pilastres de cheminée, recouverts d'une étoffe noire, & tous en face d'une fenêtre; c'étoit pour confirmer l'expérience précédente, & pour voir si dans la cinquième expérience j'avois eu raison d'attribuer à la glace & à la blancheur des pilastres, le peu d'inclinaison des tiges: en effet, dans celle-ci, les tiges des deux gobelets placés devant la glace, n'eurent qu'une très-faible inclinaison, tandis que celles des deux gobelets placés devant les pilastres tendus en noir, en eurent une très-forte.

VI.^{me}
Expérience.

J'ai répété plusieurs fois cette expérience en semant du blé dans la terre, au lieu de le mettre sur de la mousse; les résultats en ont été les mêmes.

VII.^{me}
Expérience.

Lorsque les tiges qui étoient dans des gobelets & dans des pots, furent parvenues à une certaine hauteur, je les coupai jusqu'à leurs racines; mon intention étoit d'examiner si les repousses se porteroient vers la lumière, mais elles se dirigèrent en différens sens; je n'ai vu de penchant bien marqué vers la fenêtre, que dans les repousses des tiges placées devant une étoffe noire: les premières tiges qui sortent du germe, sont tendres, & par conséquent plus sensibles aux effets de la lumière, que les repousses qui sont plus fermes & moins mobiles; celles qui se trouvoient devant une étoffe noire, n'étant contre-balancées par aucune lumière de réflexion, ont cédé à l'impression de la lumière directe.

J'observerai que j'ai employé pour les expériences précédentes, tantôt du blé pur, tantôt du blé entaché de carie, tantôt du blé nouveau, tantôt du blé vieux; dans tous ces cas l'inclinaison est la même: je me suis servi de blé plutôt que de toute autre graine, parce que j'ai reconnu qu'il s'inclinoit sensiblement vers la lumière, & parce que d'ailleurs il germe promptement.

VIII.^{me}
Expérience,

Les trois expériences qui suivent, ont été faites dans une chambre & sur une cheminée qui étoit éclairée par des fenêtres placées obliquement & à une plus grande distance que dans les premières expériences; j'ai cru que je devois me conduire ainsi pour rendre les observations plus certaines en les faisant de diverses manières: je disposai sur la cheminée deux gobelets remplis de terre, deux remplis de coton, & deux remplis de mousse humide, sur lesquels j'avois semé du blé; les deux remplis de coton étoient devant la glace: les grains en pleine terre ont germé les premiers, ensuite ce sont ceux qui étoient sur de la mousse, les autres n'ont germé qu'après: les tiges des premiers se sont inclinées le plus, celles des troisièmes se sont inclinées le moins, mais leur inclinaison

inclinaison a été plus forte que celle des deux premiers de l'expérience sixième, quoiqu'également placés devant une glace: la raison de cette différence est sans doute parce que dans la chambre où l'expérience sixième a été faite, la glace est en face de la fenêtre, au lieu que dans celle-ci la glace est placée obliquement: les tiges qui poussent dans la terre se penchent plus que celles qui poussent dans de la mousse, & ces dernières plus que celles qui poussent dans du coton, parce qu'une de ces matières gêne plus que l'autre la sortie du germe, & toutes les deux la gênent plus que la terre: j'ajouterai que les tiges étoient d'autant plus inclinées qu'elles se trouvoient plus éloignées de la fenêtre.

J'avois cru remarquer que toutes choses étant égales d'ailleurs, certaines tiges s'inclinoient plus que d'autres vers la lumière; je présimai que la position différente des grains de blé que j'avois jusque-là semés au hasard, en étoit peut-être la cause: en conséquence je plaçai avec attention des grains de blé dans huit bocaux remplis de terre; dans deux, les grains avoient le germe en bas; dans deux, ils étoient posés sur la rainure, le germe étant opposé à la fenêtre; dans deux, les grains étoient sur la rondeur, le germe du côté de la fenêtre; ils ont levé inégalement, toutes les tiges se sont inclinées vers la fenêtre, celles dont les semences avoient été posées sur la rainure, le germe opposé à la fenêtre, avoient une inclinaison sensiblement plus forte.

IX.^{me}
Expérience.

J'ai répété cette expérience; la terre ayant été trop mouillée, il s'est formé dessus une croûte & des crevasses, par où les jeunes pousses se portoit, quelquefois en s'écartant du jour; mais à peine sorties, elles se tournoient vers la fenêtre en décrivant une courbe.

Jusque-là je n'avois point encore mesuré les degrés d'inclinaison des Plantes que j'élevois sur une cheminée: comme ils pouvoient varier, selon la distance où elles étoient du jour, selon la manière dont les grains étoient posés, & selon la hauteur que les tiges acquéroient, j'employai le procédé suivant pour tout comparer à la fois.

X.^{me}
Expérience.

Dix vases remplis de terre de jardin, prise au même endroit, ont reçu chacun deux grains de blé seulement : si j'en eusse semé davantage, il eût été difficile d'en mesurer les tiges. Les vases ont été préparés à la même heure : c'est du même blé que j'y ai semé ; ils ont été posés sur une cheminée à la suite les uns des autres, de manière que le premier de la ligne étoit à la distance de 8 pieds d'une grande fenêtre, placé obliquement, & le dernier en étoit à 12 pieds. Les vases se correspondoient tellement pour la position où étoient les grains, que le *n.^o 1.^{er}* le plus près de la fenêtre, répondoit au *n.^o 10*, c'est-à-dire, au plus éloigné ; le *n.^o 2* au *n.^o 9*, & ainsi de suite. Dans chaque vase un grain étoit placé sur le bord voisin de la fenêtre, & l'autre sur le bord opposé.

Dans les *n.^{os} 1.^{er} & 10*, le germe des grains avoit été mis en bas.

Dans les *n.^{os} 2 & 9*, ils étoient en haut.

Dans les *n.^{os} 3 & 8*, les grains étoient posés sur la rainure, le germe opposé à la fenêtre : dans les *n.^{os} 4 & 7*, la rainure étoit en dessus, & le germe du côté de la fenêtre.

Dans le *n.^o 5*, les grains étoient posés sur la rondeur, les germes près l'un de l'autre, de manière que ces grains croisoient ceux du *n.^o 4*, qui étoit à côté.

Dans le *n.^o 6*, les grains étoient posés sur la rainure, germes éloignés l'un de l'autre, de manière que ces grains croisoient ceux du *n.^o 7*, qui étoit à côté.

Ces grains n'ont pas levé tous en même-temps, mais à peu-près, parce que j'ai tenu la terre de tous les vases dans le même état d'humidité. Voici quels en ont été les degrés d'inclinaison : la tige antérieure du *n.^o 1.^{er}*, c'est-à-dire, le plus près du bord antérieur du vase, & dans lequel les grains avoient été posés le germe en bas, mesurée à 14 lignes de hauteur, avoit 15 degrés d'inclinaison, & à 4 pouces 1 ligne, avoit 9 degrés : la tige postérieure, c'est-à-dire, celle qui étoit le plus près du bord postérieur à 15 lignes, avoit 8 degrés, & à 4 pouces $\frac{1}{2}$, avoit 3 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 10*, correspondant au *n.^o 1.^{er}*, mais

éloigné de la fenêtre de 4 pieds plus que le précédent, à 12 lignes avoit 46 degrés, & à 2 pouces 11 lignes avoit 4 degrés : la tige postérieure, à 13 lignes avoit 46 degrés, & à 3 pouces avoit 6 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 2*, dont les grains avoient été posés le germe en haut, à 6 lignes avoit 33 degrés, & à 4 pouces 4 lignes avoit 22 degrés : la tige postérieure, à 7 lignes avoit 21 degrés, & à 4 pouces 5 lignes avoit 15 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 9*, correspondant au *n.^o 2*, à 11 lignes avoit 47 degrés, & à 3 pouces avoit 6 degrés : la tige postérieure, à 8 lignes avoit 43 degrés, & à 2 pouces $\frac{1}{2}$ avoit 5 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 3*, dont les grains étoient posés la rainure en bas, le germe opposé à la fenêtre, à 11 lignes $\frac{1}{2}$ avoit 37 degrés, & à 3 pouces $\frac{1}{2}$ avoit 4 degrés : la tige postérieure, à 8 lignes avoit 22 degrés, & à 3 pouces 5 lignes avoit 6 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 8*, correspondant au *n.^o 3*, à 11 lignes avoit 70 degrés, & à 2 pouces 9 lignes avoit 19 degrés : la tige postérieure, à 11 lignes avoit 60 degrés, & à 2 pouces 9 lignes avoit 16 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 4*, dont les grains étoient posés sur la rondeur, le germe du côté de la fenêtre, à 7 lignes avoit 10 degrés, & à 1 pouce 11 lignes avoit 1 degré : la tige postérieure, qui se trouvoit un peu recoquillée, à 5 lignes avoit 21 degrés $\frac{1}{2}$, & à 3 pouces avoit 4 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 7*, correspondant au *n.^o 4*, à 9 lignes avoit 7 degrés, & à 1 pouce 10 lignes avoit 3 degrés : la tige postérieure, à 4 lignes avoit 15 degrés, & à 1 pouce $\frac{1}{2}$ avoit 12 degrés.

La tige antérieure du *n.^o 5*, dont les grains posés sur la rondeur, germes près l'un de l'autre, croisoient les grains du *n.^o 4*, à 7 lignes avoit 31 degrés, & à 3 pouces 1 ligne avoit 3 degrés : la tige postérieure, qui étoit un peu reco-

quillée, à 6 lignes avoit 36 degrés, & à 3 pouces 3 lignes avoit 36 degrés.

On observera que du $n.^o$ 1.^{er} au $n.^o$ 5, la distance de la fenêtre augmentoit de 6 pouces par vase: de même, du $n.^o$ 10 au $n.^o$ 6, la distance de la fenêtre diminuoit de 6 pouces par vase.

La tige antérieure du $n.^o$ 6, dont les grains posés sur la rainure, germes éloignés l'un de l'autre, croissoient les grains du $n.^o$ 7, à 12 lignes avoit 17 degrés, & à 2 pouces 11 lignes avoit 11 degrés: la tige postérieure, à 9 lignes avoit 58 degrés, & à 3 pouces 3 lignes avoit 7 degrés.

Toutes ces inclinaisons ont été mesurées à la manière ordinaire, c'est-à-dire, en marquant sur un papier blanc le plus exactement possible, le point extrême de chaque tige & le point d'où elle sort de terre, & en tirant ainsi de l'un à l'autre une ligne, dont l'angle a été pris sur le rapporteur.

Il eût été à désirer que les jours où j'ai mesuré toutes les tiges, elles eussent été à la même hauteur; mais les grains ayant été semés dans des positions différentes, ils n'avoient pu croître également. D'ailleurs, pour que l'accroissement soit égal entre plusieurs Plantes, il faut la réunion de beaucoup de circonstances; ce qui ne se trouve jamais.

XI.^{me}
Expérience.

Indépendamment des mesures prises des degrés d'inclinaison de toutes les Plantes de la précédente expérience, dans un vase séparé je mesurai une Plante: à 3 lignes de hauteur elle avoit une inclinaison de 83 degrés $\frac{1}{2}$; à 13 lignes, de 35 degrés; & à 2 pouces 3 lignes, de 12 degrés $\frac{1}{2}$.

Je pouffai ces mesures encore plus loin, & je voulus savoir en même-temps si en plaçant des vases devant une glace, devant un linge blanc & devant une étoffe noire, la différence d'inclinaison qui devoit en résulter, se prolongeroit selon l'accroissement des Plantes. Des vases furent placés de ces trois manières: les grains de blé que j'avois semés; au nombre de quatre par vase, étoient tous posés sur la rainure, germe opposé à la fenêtre, & par conséquent dans la position la plus favorable pour se pencher davantage. Je n'en mesurai

qu'un dans chaque vase, ce fut celui qui d'abord me parut le plus incliné. Chacun fut mesuré quatre fois au même moment, & de vingt-quatre en vingt-quatre heures.

La tige placée devant une étoffe noire, à 12 lignes avoit 86 degrés d'inclinaison; à 23 lignes, en avoit 45 degrés; à 3 pouces, elle en avoit 47 degrés, & à 4 pouces 4 lignes, 39 degrés.

La tige placée devant un miroir, à 8 lignes avoit 50 degrés d'inclinaison, à 19 lignes elle avoit 37 degrés $\frac{1}{2}$, à 2 pouces 11 lignes elle avoit 34 degrés, & à 4 pouces 8 lignes elle avoit 20 degrés. La tige placée devant un linge blanc à 9 lignes avoit 47 degrés $\frac{1}{2}$, à 21 lignes en avoit 27, à 2 pouces 7 lignes en avoit 25 $\frac{1}{2}$, & à 4 pouces avoit 19 degrés.

Si l'on compare ces degrés d'inclinaison avec ceux des tiges de l'expérience dixième, dont les grains ont été posés aussi favorablement, on verra que dans cette dernière expérience l'inclinaison est plus forte. On cessera d'en être étonné quand on saura que le lieu où a été faite la dixième expérience, étoit vaste & éclairé de deux grandes fenêtres; au lieu que j'ai fait la onzième dans un lieu plus étroit, où il n'y avoit qu'une petite fenêtre à 10 pieds des vases. Mon intention étoit de varier toujours les expériences autant qu'il étoit possible, pourvu qu'en vérifiant mes observations dans des endroits différens, je pusse en faire de nouvelles, qui ajoutassent quelque chose aux premières.

J'avois disposé dans une cave plusieurs miroirs, dont le premier recevoit la lumière d'un soupirail: celui-ci la réfléchissoit sur un autre, & ainsi des uns aux autres; des tiges de blé & de chicorée sauvage, placées devant ces miroirs s'inclinoient vers la lumière qu'ils réfléchissoient; il en étoit de même des tiges de pareilles Plantes & d'autres élevées dans une cave & placées vis-à-vis d'une lampe ou d'un miroir qui renvoyoit la lumière de la lampe: ce qui paroît contraire à l'opinion de M. Senebier (*Journal de Physique de Novembre 1779*) qui prétend que la lumière de la flamme

XII.^{me}
Expérience.

ne remplace pas celle du jour sur les Plantes. La réflexion de deux miroirs, qui recevoient la lumière du jour par des soubiraux différens, ayant été réunie dans un même point, des Plantes placées à cet endroit s'élevoient droites, parce que la lumière renvoyée par un miroir, contrebalançant celle de l'autre, il n'y avoit plus lieu à l'inclinaison.

De tous ces faits rapportés dans ce Mémoire, il résulte les vérités suivantes : plus les tiges des Plantes sont près de leur naissance, plus elles s'inclinent vers la lumière; plus elles s'éloignent de leur naissance, plus leur inclinaison diminue : chacune des expériences particulières comprises dans la dixième & dans la onzième, en fournit une preuve. On ne peut dire qu'elles ont d'autant plus besoin de la lumière, qu'en germant dans la terre elles en ont été privées; car des grains qui germent sur de la mousse ou sur du coton ou sur du liège s'inclinent aussi davantage à leur naissance : c'est sans doute parce que plus une Plante est jeune, plus elle est tendre & disposée à se porter vers un élément qui lui est nécessaire.

Plus des Plantes, qu'on élève dans des vases, sont éloignées de la lumière, toutes choses étant égales d'ailleurs, plus elles ont de penchant pour s'y porter; dans la dixième expérience, entr'autres exemples frappans, les tiges antérieures des n.^{os} 3 & 8, dont le dernier étoit à 3 pieds plus loin de la lumière que le premier, ayant été mesurées à 11 lignes, marquoient, celle du n.^o 3, 37 degrés, & celle du n.^o 8, 70 degrés.

Plus des Plantes, toutes choses étant égales d'ailleurs, croissent devant des corps dont les couleurs absorbent, ou réfléchissent peu les rayons de la lumière, plus leur inclinaison vers elle est considérable. Dans la onzième expérience les tiges placées devant une étoffe noire, se sont inclinées plus que celles qui étoient devant un miroir, & ces dernières plus que celles qui étoient devant un linge blanc; parce que le miroir renvoyoit une partie de la lumière bien au-delà

du vase où étoient les Plantes, tandis que le linge blanc la conservoit aux environs.

La position du germe des semences est encore une des causes de la différence de l'inclinaison de leurs tiges vers la lumière; par exemple, dans le blé la jeune tige qui sort du germe se prolonge le long de la rondeur. Il arrive de là que si l'on dispose des grains sur la rainure, le germe étant opposé à la fenêtre, ils ont naturellement du penchant pour s'y diriger: aussi a-t-on vu dans la dixième expérience les *n.^{os} 3, 5, 8*, fournir des exemples d'inclinaison plus grande, parce que les grains étoient posés sur la rainure, germe opposé à la fenêtre, que les *n.^{os} 4, 6 & 7* qui étoient auprès, & dont les grains étoient posés sur la rondeur, le germe vers la fenêtre. Il ne s'ensuit pas pour cela que des grains placés de la même manière, à hauteur égale & à côté les uns des autres, auront toujours une égale inclinaison; car souvent dans le même vase des grains posés les uns comme les autres ne forment pas des angles d'inclinaison pareils, comme on le voit dans les tiges du *n.^o 8* de la dixième expérience: mais la différence de l'inclinaison de ces tiges entre elles est bien moindre que celle qui se trouve entre des tiges de vases plus éloignés les uns que les autres de la fenêtre, ou dont les grains ont été posés diversément. Plus des Plantes ont de facilité à pousser leurs tiges au-dehors, plus elles s'inclinent aisément vers la lumière; il est aisé de s'en convaincre par la huitième expérience.

On peut conclure de ces dernières réflexions, que l'inclinaison des Plantes vers la lumière, est en raison composée de leur jeunesse, de la distance où elles sont de la lumière, de la manière dont leurs germes ont été posés, de la couleur des corps devant lesquels elles croissent, & du plus ou moins de facilité que leurs tiges trouvent à sortir soit de terre, soit des autres matières, sur lesquelles on a semé les graines.

On doit tirer encore de toutes les expériences précédentes les conséquences qui suivent, 1.^o de quelque côté qu'on place des Plantes qu'on élève, elles se tournent vers la

lumière ; si on les dérange de leur penchant naturel en plaçant les vases en sens contraire , d'abord leur extrémité plus tendre que le reste , se retourne ; le surplus de la tige prend , mais lentement & successivement , la même direction. Les feuilles se renversent lorsqu'elles sont à une certaine hauteur , & la plupart du côté de la lumière. Si on coupe les tiges jusqu'à la racine , en repoussant de nouveau il n'y en a que quelques-unes qui s'inclinent , parce qu'elles acquièrent plus de force.

2.^o Que ce soit à la surface de la terre ou dans des souterrains , dans des appartemens très-éclairés , ou dans des lieux qui reçoivent peu de jour , qu'on sème des graines pour les élever , les jeunes tiges se pencheront toujours vers la lumière , parce qu'il paroît que les végétaux en ont un grand besoin. M. Fougereux de Bondaroy a remarqué que des marrons d'Inde , qu'il avoit plantés au moment où ils commençoient à germer , ayant été retirés au mois de Juin , d'une terre très-ameublie & profonde , les tiges & les racines étoient mêlées sans aucune direction. Selon le même Observateur , des pommes de terre , placées dans un caveau entièrement obscur , sans soupirail , poussèrent des racines & des tiges qui ne s'élevèrent point : dans ces deux cas , c'est la privation de la lumière qui a formé obstacle à l'ascension des tiges. Ce besoin se manifeste singulièrement à l'égard des arbres des forêts : on voit ceux qui se trouvent sur les bords se jeter du côté libre , leurs voisins s'en rapprocher ; ceux qui sont environnés de beaucoup d'autres , s'élever au-dessus pour recevoir l'impression de la lumière , en périr même s'ils ne peuvent y parvenir. C'est peut-être autant en facilitant la distribution de la lumière , qu'en procurant des courans d'air , que des percées faites dans les bois en favorisent la végétation.

3.^o Comme la lumière est une , & que les différentes modifications n'altèrent point son essence ni ses propriétés , les Plantes qui croissent devant la lumière réfléchie par des miroirs , s'y inclinent aussi ; non pas à la vérité aussi fortement que vers la lumière directe. La flamme d'une chandelle ne

me paroît être autre chose que la lumière du jour dans un état différent. Il n'est donc pas étonnant que j'aie vu des Plantes s'incliner vers cette espèce de lumière, moins fortement sans doute que vers la lumière du jour réfléchie. Au reste, si j'avois employé une forte flamme, l'inclinaison eût peut-être été aussi considérable.

Je sens bien qu'on pourroit rendre ces expériences & ces observations encore plus complètes, mais le temps ne permet pas toujours de pousser les recherches aussi loin qu'on le désireroit. Il me semble que j'en ai dit assez pour développer, plus qu'il ne l'avoit été, un phénomène aussi curieux que celui de l'inclinaison des Plantes vers la lumière. A l'exception de la douzième expérience, dans laquelle j'ai employé de la chicorée sauvage, seulement pour faire voir qu'elle s'inclinoit vers la lumière, ou directe ou réfléchie, & vers la lumière d'une lampe, ou directe ou réfléchie; toutes les autres expériences ont été faites avec du blé. Je ne regarde donc les conséquences que j'en tire que comme relatives à ce genre de Plantes; & je me propose d'en examiner qui soient d'un autre genre & d'une autre classe, pour en connoître les rapports & les différences; car on ne peut douter qu'il ne s'en trouve entr'elles.

ARTICLE SECOND.

Éthiolement des Plantes.

LES Plantes qui viennent dans les souterrains, & celles qui se trouvent couvertes par hasard, ou qu'on lie dans les jardins, sont jaunes ou blanches, au lieu d'être vertes: ce phénomène ne peut être attribué qu'à la privation de la lumière. Les Physiciens en sont persuadés, sur-tout depuis que M.^{rs} Bonnet, de Genève; du Hamel du Monceau, Meesse, & quelques autres, ont fait aussi des expériences sur ce sujet. Je ne rappellerai point ici les moyens ingénieux qu'ils ont imaginés pour prouver cette vérité, on peut consulter les Ouvrages de M. Bonnet, la Physique des arbres de M. du Hamel, & le Journal de Physique, tome VI, page 445; mon

Mém. 1783. T.

but est d'examiner dans ce Mémoire, si les différentes modifications de la lumière ont sur la couleur des plantes la même influence que la lumière directe; recherches que je ne crois pas qu'on ait encore faites, du moins d'une manière aussi particulière.

Le lieu dans lequel je fis les expériences suivantes, est une cave de dix à douze pieds de profondeur; elle a sept pieds de largeur & quarante pieds de longueur: à une extrémité est l'escalier, dont le bas est éclairé par un soupirail oblique de neuf pouces d'ouverture en carré, & qui jette sa lumière à quatorze pieds. Il y a à l'autre extrémité un soupirail perpendiculaire, dont l'ouverture est de dix pouces sur seize, & qui jette sa lumière à huit pieds; la position de ces soupiraux & celle de la porte établissent dans la cave un courant d'air: on n'y voit clair qu'aux deux extrémités; le reste, à cause de l'éloignement des soupiraux & d'un coude qui s'y trouve, est dans l'obscurité parfaite.

J'avois résolu de me servir du *solanum tuberosum*, dont les feuilles sont d'un vert foncé; mais en ayant descendu à la cave, bientôt les feuilles se flétrirent & pourrirent.

Je semai du blé dans un pot que je laissai à la surface de la terre, jusqu'à ce qu'il eût un pouce & demi; alors je le plaçai dans la cave, à l'endroit où un miroir renvoyoit la lumière qu'il recevoit d'un des soupiraux: le blé s'étant élevé se renversa en différens sens, en sorte que certaines feuilles se trouvoient dans l'obscurité, & d'autres exposées à la réflexion de la lumière du miroir; ces dernières étoient vertes & les premières jaunes.

Je plaçai ensuite dans la même cave quatre miroirs, un au bas du premier soupirail, un à la réflexion de ce miroir, un autre au bas du second soupirail, & le quatrième à la réflexion de celui-ci: les deux miroirs placés à chacune des réflexions des miroirs qui recevoient le jour des soupiraux, renvoyoient leur lumière en un point commun qui étoit au milieu de la cave, en sorte que cette double réflexion réunie en étoit plus forte

Les miroirs étoient de grandeur inégale, & tels que j'avois pu me les procurer; par cette disposition, la cave, obscure auparavant, devenoit assez éclairée pour qu'on pût y marcher sans lumière, car dans les endroits où les réflexions ne portoient pas, il y avoit une lueur qui en ôtoit l'obscurité.

Les deux miroirs qui recevoient immédiatement la lumière du jour, étoient distans l'un de l'autre de quarante-huit pieds; chacun renvoyoit la lumière à douze pieds, & ceux qui la recevoient d'eux, la renvoyoient aussi à douze pieds: je plaçai au bas de chaque miroir un pot rempli de blé semé à la cave, un à la réunion des deux réflexions, & un dans un endroit où il n'y avoit point de réflexion: comme la chicorée sauvage croît facilement à la cave, j'en fis mettre des racines dans des pots, & je plaçai un pot de cette Plante à côté de chaque pot de blé.

Des thermomètres placés aux différens endroits, annoncèrent que par toute la cave la température étoit à 12 degrés; celle de l'atmosphère étoit alors à 24.

Au bout de quelque temps je comparai les pots entr'eux: 1.^o les plants de ceux qui étoient placés au-dessous de l'un & l'autre soubirail, étoient plus verts que le reste; ceux qui recevoient la lumière du soubirail perpendiculaire, plus grand que l'autre, avoient la couleur verte plus foncée que ceux qu'éclairoit le soubirail oblique.

2.^o Les pots placés devant le miroir qui répétoit la lumière de celui qui la recevoit du soubirail oblique, n'étoient pas aussi verts que les pots placés à la réflexion du soubirail perpendiculaire, pour deux raisons sans doute; la première, parce que ce dernier miroir étoit plus grand; la seconde, parce que le soubirail perpendiculaire avoit plus d'ouverture, & ne jetoit pas la lumière aussi loin, ce qui ne l'affoiblissoit pas autant: les uns & les autres avoient une nuance de vert intérieur à celui des pots placés au bas de chaque soubirail.

3.^o Je ne trouvai presque point de différence dans la couleur verte des Plantes placées à la réunion des deux réflexions secondaires, d'avec celle des Plantes placées à

chacune des deux premières réflexions, parce qu'en réunissant ainsi deux réflexions, j'ai rendu la lumière aussi forte que celle de chaque première réflexion.

4.^o Les Plantes placées à l'obscurité, quoiqu'au plus à un pied des lumières directes ou réfléchies, étoient d'un jaunepâle : puisque la lueur répandue dans la cave, à cause de toutes les réflexions, n'a pas suffi pour rendre vertes ces dernières Plantes, il est donc nécessaire pour qu'elles conservent cette couleur, que la lumière tombe directement sur elles : on voit encore par-là, que pour peu qu'elles soient éloignées du point où se dirigent les rayons de la lumière, elles ne participent point, ou ne participent que foiblement à son influence.

J'observerai que dans les pots de blé, les nuances n'étoient pas aussi sensibles que dans les pots de chicorée sauvage qui peut-être souffre moins de la privation de la lumière, car j'ai déjà remarqué que la chicorée sauvage s'incline moins vers la lumière que le blé.

Pour bien voir l'effet de l'obscurité sur une Plante de chicorée sauvage, il faut qu'elle commence à pousser à la cave, car si on ne l'y descend que quand elle a commencé à pointer, souvent cette pointe seulement reste un peu verte, tandis que le surplus de la Plante est jaune.

On avoit négligé pendant six jours d'ôter l'humidité des miroirs, cette négligence me fit répéter l'expérience de la même manière & avec plus de soin encore, & les résultats en furent mieux marqués : dans cette seconde expérience, le pot placé auprès du soupirail perpendiculaire, donna des plants moins verts que ceux des réflexions, ce qui m'étonna d'abord ; mais je m'aperçus qu'il se trouvoit par hasard sur la bordure de l'obscurité & dans l'obscurité, aussi étoit-il semblable à celui que j'avois mis exprès dans l'obscurité.

Il ne suffisoit pas de savoir que la lumière réfléchie par des miroirs, conservoit plus ou moins aux Plantes leur couleur verte, il falloit encore s'assurer si la flamme d'un corps allumé produiroit le même effet, ce qui étoit à présumer,

puisque devant une lampe, des Plantes s'inclinent comme devant la lumière du jour, soit directe, soit réfléchie; cette idée donna lieu aux quatre expériences suivantes.

Un pot de laitue romaine, de l'espèce la plus verte, & qui étoit déjà levée, fut exposé à la cave, au-dessous d'une lampe tenue allumée jour & nuit, & dont la mèche étoit trop petite pour qu'elle pût échauffer le pot qui en étoit à plus de deux pieds: pour avoir un objet de comparaison, je mis en même temps un autre pot de la même Plante au bas du premier soubirail, d'où il recevoit la lumière du jour.

La végétation de ces Plantes a été très-lente, leurs tiges étoient blanchâtres comme toutes celles des végétaux qui croissent dans les souterrains; mais les feuilles étoient vertes, à la vérité avec moins d'intensité que celles des mêmes Plantes élevées à la surface de la terre; le pot placé au bas de la lampe avoit une nuance de moins que celui qui étoit au bas du soubirail.

Ces Plantes, en vingt jours, n'étoient parvenues qu'à deux pouces & deux pouces & demi; les ayant remontées de la cave, je les vis périr en peu de temps.

Un pot de laitue romaine déjà avancée, fut mis devant la même lampe, les feuilles restèrent vertes quelques jours, & peu-à-peu elles pourrirent.

La laitue ne m'ayant pas paru propre à être élevée dans la cave, parce qu'apparemment elle est d'une nature trop humide; pour répéter l'expérience précédente, je recourus à la chicorée sauvage, dont la racine assez forte, rend les tiges en état de résister à l'humidité des souterrains; j'en fis mettre dans quatre pots qui furent distribués lorsqu'elle commençoit à pousser, savoir;

Le n.^o 1.^{er} au bas du premier soubirail de la cave:

Le n.^o 2 à la réflexion d'un miroir placé au bas de ce soubirail:

Le n.^o 3 dans un endroit obscur de la cave, mais peu distant du n.^o précédent & du suivant:

Le *n.^o 4* au bas de la lampe, vers le milieu de la cave, à la place même où tous les hivers un Jardinier élevoit de la chicorée sauvage qui y devenoit jaune.

Cette distribution de pots me parut capable de prouver mieux l'effet de la lumière de la lampe sur la Plante qui étoit au bas, parce qu'elle fournissoit une suffisante quantité d'objets de comparaison: sept jours après, les quatre pots ayant été examinés les uns à côté des autres, les feuilles des *n.^{os} 1.^{er}, 2 & 4* furent jugées vertes, à peu-près comme des feuilles de laitue romaine qui ne sont pas d'un vert égal; les feuilles du *n.^o 3* placé dans l'obscurité, étoient totalement jaunes.

Je continuai encore l'expérience pendant onze jours, afin de voir si avec le temps les tiges vertes ne jauniroient pas; ce jour-là je remontai tous les pots, & je les exposai, sans prévenir, au jugement d'un grand nombre de personnes; elles prononcèrent unanimement que les feuilles du *n.^o 1.^{er}* étoient du vert le plus foncé; que les feuilles des *n.^{os} 2 & 4* dont la verdeur étoit la même, avoient quelques feuilles aussi vertes que dans le *n.^o 1.^{er}*, & quelques-unes moins vertes; le *n.^o 4* étoit devant la lampe: enfin que le *n.^o 3* mis dans l'obscurité, étoit parfaitement jaune.

Je coupai toutes les feuilles, je laissai les racines, afin qu'elles en repoussassent de nouvelles, & je changeai quelques pots de place, 1.^o pour examiner ce qui arriveroit aux repousses; 2.^o pour confirmer encore mieux par le changement des pots, l'influence de la lampe, de l'obscurité & de la réflexion du miroir sur les Plantes qui y étoient exposées,

Le *n.^o 1.^{er}* resta au bas du soupirail.

Le *n.^o 2* fut mis à la place du *n.^o 3*, c'est-à-dire, dans l'obscurité.

Le *n.^o 3* remplaça le *n.^o 2*, c'est-à-dire qu'il fut mis à la réflexion du miroir.

Le *n.^o 4* ne changea point de place, mais j'éteignis la lampe.

Onze jours s'étant écoulés, je comparai entr'eux les pots: le *n.^o 1.^{er}*, comme on n'en peut douter, étoit vert; le

n.^o 2 d'un jaune-pâle; le n.^o 3 moins vert que le n.^o 1.^{er}, & aussi moins vert que le n.^o 2, avant que les feuilles en eussent été coupées; & le n.^o 4 parfaitement jaune, au lieu que celui qui avoit été devant la lampe, avant qu'elle fût éteinte, étoit verdâtre.

Il résulte de cette expérience, que des Plantes qui croissent devant une lampe allumée, y conservent une verdeur à peu près pareille à celle des Plantes placées devant la réflexion d'un miroir; tandis qu'en les faisant croître à la même place, mais après avoir éteint la lampe, elles sont décolorées; ce seul exemple ne suffiroit-il pas pour constater l'influence de la flamme sur la couleur des végétaux?

Par les changemens que j'ai fait des différens pots, on voit que le plus ou moins d'altération de la couleur provient des places dans lesquelles je les ai posés, puisque la repousse du n.^o 2, qui avoit été verte étant à la réflexion du miroir, étoit jaune lorsque ce numéro a été mis dans l'obscurité. Par la même raison le n.^o 3, qui d'abord avoit été jaune, en passant de l'obscurité à la réflexion d'un miroir, est devenu vert, mais non pas autant que le n.^o 2, lorsque celui-ci occupoit sa place; peut-être parce que l'influence de l'obscurité sur ce numéro, dans le premier cas, a conservé sur ces racines quelque effet capable d'altérer la couleur des repousses. Je dois observer que si la lampe n'eût pas été allumée sans interruption, je n'aurois pas eu devant elle des Plantes presque aussi vertes que celles qui étoient à la réflexion d'un miroir; mais je ne risquois rien d'entretenir la lampe pour avoir un effet marqué, parce que si elle n'eût dû avoir aucune influence sur la couleur verte des Plantes, je ne lui en aurois pas donné en l'entretenant sans cesse: j'ai d'un autre côté lieu de soupçonner qu'avec une mèche plus forte j'aurois rendu les Plantes plus vertes. Qui sait comment on peut égaler par la lumière d'une lampe une masse donnée de lumière du jour?

J'avois placé autant de pots qui contenoient du *solanum frutescens*, que de pots de chicorée sauvage, & à autant

d'endroits différens. La tige de cet arbruste étant ligneuse, j'avois espéré qu'il se soutiendrait long-temps à la cave.

Je m'aperçus au bout de douze jours que les *n.^{os} 1.^{er}, 2.^e & 4.* étant toujours verts, le *n.^o 3* jaunissoit, parce qu'il étoit dans l'obscurité. Bientôt ces Plantes, loin de croître, dépérissent.

Après avoir éprouvé précédemment que la lumière du jour réfléchie empêchoit les Plantes de perdre leur couleur verte, je pensai que je devois aussi m'assurer si la réflexion de la lumière d'une lampe auroit la même influence. En conséquence, j'en fis allumer une dans la cave; on en ménagea tellement la lumière, en l'environnant de planches, qu'elle tomboit en partie sur un miroir qui en étoit à un pied & demi; ce miroir avoit un pied en carré, & renvoyoit la lumière, qu'il recevoit de la lampe, à cinq pieds, où je plaçai un pot de chicorée sauvage: un autre pot de chicorée fut placé à quatre pieds de la lampe, dans l'endroit où étoit dirigé le surplus de sa lumière.

Pour suivre toujours la comparaison, il y avoit un pot de chicorée sauvage au bas du premier soupirail, un autre à la réflexion d'un miroir placé au bas de ce soupirail, & un autre dans l'obscurité à trois pieds de la lampe. Les places où étoient tous ces pots se trouvoient à la même température.

Huit jours après cette disposition, j'examinai les Plantes qui n'étoient pas encore bien hautes; mais je me trouvois obligé de partir du lieu où je faisois l'expérience.

Celles du bas du soupirail étoient les plus vertes.

Celles de la réflexion du miroir étoient moins vertes.

Celles de l'obscurité étoient d'un jaune-blanc.

Celles de la lumière de la lampe étoient verdâtres.

Enfin celles de la réflexion de la lampe, avoient une nuance de vert moindre que celles de la lumière directe de la lampe; & les unes & les autres étoient d'une nuance différente de celles qui étoient dans l'obscurité.

Dans cette circonstance, la lampe ne brûloit pas toute la nuit.

On

On peut donc en quelque sorte assimiler les effets de la flamme sur les Plantes, à ceux de la lumière du jour. S'il y avoit un moyen de se procurer une lumière de lampe, ou de tout autre corps en combustion, qui pût égaler la lumière du jour, peut-être les Plantes qui croîtroient sous l'influence de l'une, seroient-elles aussi vertes que celles qui croîtroient sous l'influence de l'autre. Mais n'entrons pas dans une matière qui nous conduiroit trop loin, & rendons compte encore de quelques recherches.

La lumière de la Lune étant la réflexion de celle du Soleil, & par conséquent un affoiblissement du jour, il y avoit lieu de croire que des Plantes qu'on n'exposeroit qu'à cette lumière ne seroient pas entièrement privées de la couleur verte, néanmoins j'ai voulu m'en assurer de la manière suivante.

Au mois de Juin, j'ai semé de la graine de rave dans quatre pots remplis de terreau, qui étoient d'une égale hauteur, & d'une égale capacité.

L'un, que je désignerai par le n.^o 1.^{er} a été placé dans un Jardin, à l'ombre du Soleil, où il est resté toujours.

Le n.^o 2 est resté aussi pendant toute l'expérience dans une serre close & obscure, où l'on entroit plusieurs fois par jour.

Le n.^o 3, depuis le lever du Soleil jusqu'après son coucher, étoit exposé au jour & aux rayons du Soleil; le soir on l'entroit dans la serre à côté du n.^o 2.

Le n.^o 4, depuis le coucher du Soleil jusqu'à son lever, se trouvoit exposé à la lumière de la Lune qui étoit à son premier quartier; on le rentroit dans la serre au moment où l'on déplaçoit le n.^o 3 pour le mettre au jour; de manière qu'alternativement le n.^o 3 & le n.^o 4 étoient dans l'obscurité, dont on ôtoit le dernier pendant la nuit & l'autre pendant le jour.

Environ quinze jours après je comparai les Plantes des quatre pots.

Les feuilles du n.^o 1.^{er} étoient très-vertes.

Mém. 1783.

U

Celles du n.^o 2 étoient entièrement étiolées & blanches.

Celles du n.^o 3 avoient une nuance de vert plus foible que celles du n.^o 1.

Enfin celles du n.^o 4 étoient d'un vert beaucoup plus foible que celles des n.^{os} 1 & 3 ; elles différoient de celles du n.^o 2 , qui étoient blanches.

On en peut donc conclure que la lumière de la Lune influe sur la couleur des végétaux.

Desirant connoître en outre les effets de la lumière sur les Plantes en passant par des milieux diversément colorés , j'ai fait placer un châssis , composé de quatre carreaux , à une fenêtre d'un rez-de-chaussée ; l'un des carreaux étoit de verre blanc , un autre de verre jaune-clair ou peu foncé , un autre de verre jaune-foncé , & un autre de bleu-foncé ; c'étoient les seuls verres colorés que je pussé me procurer.

Ils ont été séparés les uns des autres par des planches ; j'ai pris toutes les précautions pour éviter que les murs & les embrasures de la fenêtre ne jetassent sur les planches une lumière de réflexion.

J'ai placé devant chaque carreau un pot de racines de chicorée sauvage , qui ont poussé avec lenteur , parce que la saison étoit froide.

Quand les pousses ont été parvenues à une certaine hauteur , je les ai comparées.

Les feuilles qui ont poussé devant le carreau de verre blanc , étoient vertes , moins cependant que si le pot eût été hors d'un appartement.

Les feuilles qui étoient devant le verre bleu étoient ensuite les plus vertes , il y avoit entr'elles & les précédentes une nuance sensible.

Les feuilles qui ont poussé devant le carreau jaune-clair , ne différoient des dernières que par une foible nuance , elles étoient un peu moins vertes.

Enfin , les moins vertes de toutes étoient celles qui avoient été placées devant le carreau d'un jaune-foncé ; la différence en étoit frappante.

Voici les conséquences que je crois devoir tirer des expériences qui précèdent.

Les feuilles des Plantes qui croissent à la lumière du jour en liberté, sont en général vertes, à moins que quelques circonstances de culture ou de maladie, ou de chaleur, n'en changent ou n'en altèrent la couleur.

Celles qu'on élève dans les souterrains y sont d'autant moins vertes qu'il s'y introduit moins de lumière, ou qu'elle y parvient plus obliquement, ou que la cave étant profonde, la lumière y est portée de plus loin.

Dans les souterrains, celles qui reçoivent la lumière du jour, ont une couleur verte plus foncée que celles qui ne reçoivent que la lumière de réflexion; plus les réflexions se multiplient, plus la couleur verte diminue, parce que la lumière s'affaiblit davantage.

La lumière d'une lampe conserve aux Plantes leur verdeur avec moins d'intensité que la lumière du jour directe ou réfléchie : à la réflexion de la lumière d'une lampe, la couleur verte s'affaiblit encore, du moins j'en ai eu des preuves dans les expériences dont j'ai rendu compte; mais comme je n'ai pas calculé les degrés de lumière, soit naturelle, soit artificielle, employés, je ne prononce pas sur cette diminution d'influence. Il suffit de dire ici que la couleur verte des végétaux ne se détruit pas à la clarté la plus foible comme elle se détruit dans l'obscurité.

Pour qu'une Plante soit décolorée, il n'est pas nécessaire qu'elle soit très-éloignée de la lumière; pourvu que la lumière ne tombe pas sur elle, elle n'aura pas de couleur.

Toutes les Plantes ne sont pas également disposées à être élevées dans les souterrains, qui sont les endroits qu'on peut rendre les plus obscurs; il y en a qui n'y croissent pas, d'autres ne s'y soutiennent pas, d'autres enfin s'y élèvent plus facilement.

On ne peut douter que la lumière de la Lune n'entretienne dans les végétaux la couleur verte qu'ils reçoivent du jour ou du Soleil, puisque des Plantes qui passent les nuits dans

des lieux parfaitement obscurs, sont moins vertes que celles qui sont la nuit exposées à la lumière de la Lune.

Quelles conséquences tirer de ce que des Plantes en végétation devant un verre coloré en bleu-foncé, y sont ou plus ou au moins aussi vertes que celles qui végètent devant un verre jaune-foncé, ou même jaune-clair & par conséquent approchant de la transparence ? je crois qu'il faut s'en abstenir jusqu'à ce que ce fait unique ait été répété & constaté de nouveau.

On demandera pourquoi, s'il est vrai que la couleur verte des Plantes soit, comme il le paroît, en raison de la plus ou moins grande lumière qu'elles reçoivent, celles qui sont au nord moins éclairé que le midi, ou abritées par des bois, sont plus vertes que celles qui sont au grand Soleil & sans abri ? C'est que dans le premier cas elles sont ordinairement plus fraîchement, au lieu que dans le second cas étant plus exposées aux évaporations & à l'ardeur du Soleil qui les dessèche, elles ne peuvent conserver leur couleur verte, qui demande, outre la lumière, une certaine humidité sans laquelle elle ne se soutient pas.

Il seroit sans doute intéressant de pouvoir expliquer par quelle raison la couleur verte des végétaux est dépendante de la lumière ; il le seroit également d'expliquer la cause de leur inclinaison vers elle : ce dernier phénomène se conçoit mieux que le premier, parce qu'on peut croire que la lumière est nécessaire pour la végétation, comme l'eau l'est en général pour toutes les Plantes, & particulièrement pour quelques-unes qui dirigent leurs tiges vers cet élément lorsqu'elles en sont à quelque distance. Les rapports de la lumière du jour avec la couleur verte des végétaux ne sont encore point connus, ce ne seroit qu'en se livrant à des conjectures qu'on pourroit essayer d'en rendre raison ; moyens que nous croyons devoir rejeter, & qui ne sont nullement propres à avancer la Physique.



RAPPORT

FAIT À L'ACADÉMIE,

Relativement à l'avis que le Parlement a demandé à cette Académie, par arrêt du 6 Septembre 1783.

Sur la contestation qui s'est élevée à Rochefort, au sujet de la taxe du Pain; sur les Expériences qui ont été faites dans cette Ville à ce même sujet, en exécution d'un arrêt du Parlement du 17 Juin 1781; & sur les moyens d'établir le prix juste du Pain, proportionnellement à celui du Blé, suivant la quantité de Farines différentes qu'une quantité de livres de Blé peut rendre, & suivant la quantité de Pain que ces Farines doivent donner.

Par M.^{rs} LE ROY, TILLET & DESMAREST.

LE Parlement a fait l'honneur à l'Académie de lui demander son avis sur une contestation qui s'est élevée, au sujet de la taxe du pain, entre les Maire & Échevins de la ville de Rochefort, Lieutenans généraux de Police, & la communauté des Boulangers de la même Ville. L'Académie nous a chargés en conséquence d'entrer dans l'examen de cette contestation, aussi importante en elle-même que délicate par les circonstances qui l'ont accompagnée; de faire toutes les expériences qu'elle pourroit exiger, & de lui rendre compte des résultats auxquels nos observations nous auroient conduits.

Le Parlement ordonna, par un arrêt du 8 Janvier 1780, qu'un tarif fait en 1703 pour la taxe du pain à Rochefort,

y auroit son exécution ; les Maire & Échevins de cette Ville y formèrent opposition ; ils demandèrent qu'une Ordonnance de Police rendue en 1709 , & peu favorable aux Boulangers, fût exécutée par préférence au tarif de 1703.

Les Boulangers croyant avoir autant lieu de se plaindre de l'Ordonnance de 1709 , que les Maire & Échevins avoient d'opposition pour le tarif de 1703 , demandèrent qu'il fût fait un essai , afin qu'on pût juger authentiquement du produit réel de leur travail , & prononcer en connoissance de cause sur les motifs de leurs réclamations ; cet essai fut accordé aux Boulangers par un Arrêt du 17 Juin 1781 , & le Parlement ordonna en même-temps aux Juges d'Angoulême de se transporter à Rochefort pour y présider à cette opération.

C'est précisément cet essai dont le résultat auroit dû devenir une base fixe pour asseoir la taxe du pain , un moyen décisif de rendre justice au Peuple sans blesser les intérêts des Boulangers , qui a excité des plaintes réitérées de la part de ceux-ci , qui a fait naître de vives discussions par écrit , que le Parlement n'a pas cru devoir homologuer , & sur le fonds duquel l'Académie se trouve consultée aujourd'hui.

Qu'il nous soit permis avant que de rendre compte de notre travail , de faire ici une réflexion sur laquelle peut-être l'Académie nous a déjà prévenus.

On est étonné au premier coup-d'œil , que dans ce moment-ci , où les Boulangers de plusieurs villes de Province font des représentations aux Magistrats sur la taxe trop basse du pain , & en trouvent naturellement les motifs dans une augmentation assez considérable depuis un certain temps du prix de toutes les denrées , des frais de main-d'œuvre , & en général de tout ce qui fait un objet de dépense pour les Citoyens , on est surpris que les Boulangers de Rochefort ne s'éloignent pas beaucoup d'adopter un tarif fait pour cette Ville en 1703 , & relatif à celui qui a été établi pour la Rochelle en 1700 , & que leurs plaintes tombent princi-

palement sur une Ordonnance de Police qui s'est écartée à leur préjudice de la teneur de ce tarif; il pouvoit être trop favorable aux Boulangers en 1703, mais en considérant l'augmentation réelle du prix des denrées depuis quatre-vingts ans, n'a-t-on pas lieu de présumer, avant tout examen en détail, que ce tarif porté d'abord trop haut, rentre aujourd'hui dans l'ordre d'une estimation modérée, & ne s'éloigne presque point de ceux qui ont été établis dans plusieurs villes de Province par des Magistrats éclairés?

Instruits, comme nous le sommes, des lumières qu'a l'Académie sur la mouture des grains, sur les produits en farines qu'il est ordinaire d'en tirer, & sur la quantité de pain que fournit une quantité déterminée de blé, nous aurions pu sans doute, en y joignant les connoissances que nous avons acquises sur ce sujet, nous dispenser de faire des expériences en grand, & nous borner au précis d'un travail que des Citoyens zélés ont déjà mis dans tout son jour: mais nous avons senti que ce seroit mieux répondre à la confiance dont le Parlement honore l'Académie, & à la commission dont elle nous a chargés, de faire des expériences plus étendues que celles qui ont été exécutées à Rochefort; de faire même marcher de pair la mouture économique avec la mouture à la grosse; & en remplissant le vœu du Parlement par le détail de celle-ci qu'il a demandé d'une manière expresse, de mettre encore sous ses yeux les résultats d'une mouture mieux entendue en elle-même, & plus parfaite pour la distinction des produits. Si par ces expériences faites assez en grand, & qui ont été suivies avec toute l'attention qu'elles demandoient, nous ne parvenons pas à aplanir les difficultés qui se sont élevées à Rochefort, au moins viendront-elles à l'appui des bons principes sur la mouture, qui sont établis aujourd'hui; elles montreront qu'il y a en ce genre un point de perfection auquel le tâtonnement a conduit, & que saisissent d'une manière assez constante les Meuniers intelligens; qu'aller au-delà pour avoir un produit plus abondant, c'est perdre un temps

précieux, augmenter la dépense, altérer les derniers produits en farines & n'en obtenir que de mauvais pain.

Nous diviserons ce Rapport en trois Parties; la première contiendra tous les détails des opérations de meunerie qui ont été faites sous nos yeux, tant par la mouture économique que par la mouture à la grosse, sur vingt-quatre setiers de blé, dont la moitié étoit de la meilleure qualité, & l'autre moitié d'une qualité médiocre.

Il sera question dans la deuxième Partie, des opérations de boulangerie appliquées également sous nos yeux à des quantités déterminées de farines de qualités différentes, & qui faisoient partie de celles que nous avons obtenues de la mouture de nos blés; on y verra les détails relatifs à la formation des levains, à la préparation de la pâte, à l'apprêt qu'on lui donne pendant qu'elle est en masse & après qu'elle a été subdivisée, à la conduite assez délicate du four, & enfin à la quantité de pain, de formes & de qualités différentes, qu'ont rendue les farines que nous avons employées.

Nous exposerons dans la troisième les conséquences qui nous auront paru naître des expériences dont nous aurons rendu compte dans les deux premières Parties: nous rapprocherons de l'essai fait à Rochefort, sur lequel l'Académie est consultée, le résultat de nos opérations: après avoir établi la valeur du pain proportionnellement à celle du blé & des farines, en y joignant un prix fixe pour les frais de main-d'œuvre, nous proposerons un moyen d'aplanir les difficultés qui se sont élevées à Rochefort, celui d'y mettre en vigueur, pour la taxe du pain, un tarif ancien rédigé pour le pays d'Aunis, & de l'y établir à l'avantage du Public, avec les changemens qui sont autant indiqués par nos propres expériences que par les opérations ordinaires des boulangers instruits.

Dans l'obligation où nous sommes de donner à ce Rapport une assez grande étendue, afin qu'il conduise, s'il est possible, à quelque utilité générale pour le fonds des opérations, ou au moins à une connoissance exacte de celles qu'on fait communément à Paris, nous ne nous dissimulons point qu'un
grand

grand nombre de faits répandus dans ce Mémoire, des calculs multipliés, beaucoup de résultats d'un ordre différent, & plusieurs observations qui s'y trouvent jointes, demanderont une attention suivie, & pourront même échapper en partie à l'application qu'on leur donnera. Nous avons donc cru devoir terminer ce rapport par un résumé qui en contiendra toute la substance, qui offrira des réponses directes aux questions que le Parlement a proposées à l'Académie, & dans lequel ces réponses, déduites du fond de notre travail avec la précision dont il est susceptible, pourront préparer la voie à une décision sur l'objet important qui l'a occasionné,

PREMIÈRE PARTIE.

Dès le moment où l'Académie nous eut chargés de l'examen de l'affaire délicate de Rochefort, & où nous eumes réfléchi sur les suites, à l'égard de la taxe du pain en général, que nos observations pouvoient avoir, nous sentîmes combien il étoit important, pour l'expérience que nous avions projetée, d'être entièrement libres dans le moulin où nous l'exécutions, d'y être aidés dans notre travail par des personnes auxquelles nous eussions une entière confiance, & de pouvoir y suivre sans interruption la mouture complète des grains.

Les moulins de Corbeil qui appartiennent à l'Hôpital général de Paris, & d'où sortent les quantités immenses de farines que consomment les maisons dépendantes de cet hôpital, nous parurent les plus propres à remplir notre objet, tant pour y obtenir la meilleure mouture que nous pouvions espérer, que pour y avoir toutes les facilités nécessaires, & une tranquillité dont nous n'aurions joui que difficilement dans un moulin particulier. M.^{rs} Cochin & Boscheron, Administrateurs des Hôpitaux, & qui sont chargés spécialement de la partie des grains, se prêtèrent avec plaisir à la proposition que nous leur fîmes d'employer pour notre expérience leurs moulins de Corbeil : le Bureau d'Administration auquel ils en firent part, l'agréa sur le champ avec

tout le zèle qui lui est propre ; il favorisoit une opération que le rapprochement des deux sortes de mouture sur le même grain rendoit intéressante pour les hôpitaux, & qui d'ailleurs avoit trait au bien public.

Avec ces facilités pour faire aussi exactement qu'il nous seroit possible les expériences que nous avions déterminées, nous nous rendîmes à Corbeil le 25 Septembre 1783. M. Boscheron très-instruit sur la mouture des grains, M.^{rs} d'Arcet & Legendre, Membres de l'Académie, se joignirent à nous pour toute la suite de cette opération, & y furent témoins assidus des résultats différens & assez nombreux qu'elle nous fournit. M. de Malaizieux, Auditeur des Comptes & Administrateur des Hôpitaux, se rendit aussi à Corbeil pendant le séjour que nous y fîmes, & y fut témoin également des produits de notre travail : deux habiles Meuniers, & dignes d'une entière confiance, le sieur Roland attaché aux moulins des hôpitaux, & le sieur Hallé établi à Essonne, se chargèrent avec plaisir de la conduite des trois moulins que nous employâmes en même temps, & ne laissèrent aux ouvriers en sous-ordre que ce qu'il y avoit de plus pénible dans le travail.

Notre premier soin en arrivant à Corbeil, fut de choisir les grains qui devoient faire la matière de notre expérience ; on nous avoit prévenus que nous en trouverions à Essonne de différentes qualités ; nous y allâmes, & ce fut chez le sieur Hallé même que nous eumes le choix des deux sortes de blé dont nous avions besoin : après avoir fait enlever de chez lui & transporter à Corbeil une quantité plus forte que celle qui nous étoit nécessaire, tant en grains de la première qualité qui étoit de 1781, & qui avoit été tiré de Provins, qu'en grains de 1782 d'une qualité médiocre, & tiré de la Brie, nous les fîmes cribler séparément ; on en mesura ensuite sous nos yeux douze setiers de l'une & de l'autre sortes, & les vingt-quatre sacs de grains bien distincts pour leur qualité, furent pesés séparément : le poids cumulé des douze setiers du plus beau grain, se trouva de deux mille

neuf cents quatre livres , déduction faite du poids des sacs ; c'est-à-dire , que chacun des douze setiers , mesure de Paris , pesoit , l'un dans l'autre , deux cents quarante-deux livres , ce qui annonce du froment d'une bonne qualité , bien nourri , & que les insectes n'ont point attaqué : le poids cumulé , aussi des douze setiers de froment médiocre , n'étoit que de deux mille sept cents cinquante-une livres huit onces , déduction faite également des sacs , c'est-à-dire , que chaque setier de ce blé inférieur ne pesoit , l'un dans l'autre , que deux cents vingt-neuf livres quatre onces cinq gros vingt-quatre grains , & avertissoit par-là , comme nous en avons jugé par le coup-d'œil , de la qualité médiocre dont il étoit.

Les deux mille neuf cents quatre livres de froment de la première qualité , qui composoient douze setiers , furent partagées en deux parties égales , du poids chacune de quatorze cents cinquante-deux livres , & furent destinées l'une à être soumise à la mouture économique , & l'autre à la mouture à la grosse.

Les douze autres setiers en blé médiocre , pesant ensemble deux mille sept cents cinquante-une livres huit onces , furent divisés aussi en deux parties égales , ayant chacune le poids juste de treize cents soixante-quinze livres douze onces ; & six de ces setiers de froment inférieur furent destinés également à la mouture économique , pendant que nous réservâmes les six autres pour la mouture à la grosse.

Des trois moulins que nous employâmes pour notre expérience , deux furent consacrés uniquement à la mouture économique , comme exigeant le double du temps ou environ que demande l'autre mouture ; & le troisième moulin servit seul pour celle-ci : la totalité des grains dont nous venions de constater le poids , fut transportée en ordre dans l'étage du bâtiment de Corbeil , qui est immédiatement au-dessus des moulins.

Les douze setiers de blé représentés par autant de sacs , & qui avoient été destinés à la mouture économique , avec des marques distinctives qui annonçoient la qualité des

grains , furent placés au-dessus des deux moulins où ils devoient être convertis en farine, mais de manière que six de ces sacs, qui contenoient le froment de la première qualité, étoient placés à côté de l'ouverture pratiquée au plancher, laquelle communiquoit à la trémie dépendante du premier des deux moulins où la mouture économique devoit être employée; & les six autres sacs en blé inférieur, répondoient à la trémie du second moulin où cette même mouture devoit avoir lieu.

Nous primes les mêmes précautions à l'égard des douze autres setiers, tant du plus beau froment, que de celui qui étoit d'une qualité inférieure, en les plaçant au-dessus du troisième moulin qui étoit un peu éloigné des deux autres, & où la mouture à la grosse devoit être employée: nous établîmes une séparation bien marquée entre les six sacs de beau froment par lesquels l'opération devoit y commencer, & les six autres sacs de blé médiocre par lesquels elle devoit s'y terminer.

Cet ordre une fois établi dans la distribution des grains qui étoient la matière de notre expérience, & qu'il falloit garantir de la moindre confusion, nous nous occupâmes du soin de visiter les moulins, & de n'y rien laisser qui pût augmenter nos produits; nous cédâmes cependant dans cette circonstance, au conseil que nous donnèrent les deux meuniers intelligens qui nous guidoient; ils nous déterminèrent à ne pas dégarnir le fond des archures du peu de farine qui s'y rassemble lorsque les meules broient les grains, & qui s'y maintient toujours en petite quantité assez égale dans l'opération de la mouture: on sait que ces archures sont un bâtis en bois, de forme circulaire, & composé de plusieurs pièces qui sont maintenues ensemble par des crochets; ces archures portent sur la meule gissante, & servent à retenir la farine à mesure qu'elle se forme, à ne lui laisser d'autre issue que celle de l'anche d'où elle tombe dans la bluterie, & de-là dans le dodinage quand il est employé: c'est au fond du petit espace qui se trouve entre les côtés de la meule

tournante & les parois intérieures des archures, que séjourne une petite portion de farine; rassemblée une fois dans cet endroit, elle s'y maintient, & en même temps qu'elle ne reçoit aucune augmentation sensible par les moutures réitérées, elle paroît n'éprouver aucune diminution dont il faille s'occuper; au moins est-il certain qu'à la fin de notre expérience les archures parurent à peu-près garnies comme elles l'étoient avant qu'on la commençât; & d'ailleurs, sur 4178 livres de farine qu'elle nous fournit, quelques onces ou même une livre de plus ou de moins n'étoit d'aucune conséquence pour les produits différens que nous tirâmes de la mouture de nos blés.

Les mêmes meuniers jugèrent encore qu'il étoit convenable de faire passer dans l'œillard de la meule tournante, sept à huit livres de recoupettes ou menu son, avant d'y faire tomber le grain; afin que les meules eussent quelque aliment entr'elles dès que le moulin seroit en action, & pour que la première portion de nos blés, réduite en farine, succédât sans interruption à ces recoupettes, sauf à laisser dans l'œillard, en terminant l'expérience, une quantité pareille de notre menu son.

Après tous ces préparatifs, dont il convenoit que nous fissions un exposé fidèle, & qui devenoient nécessaires par la nature même de notre expérience, dans laquelle nous avions un double objet; il ne nous restoit plus qu'à nous rendre attentifs à la mouture des grains, suivant l'ordre que nous avions établi, & à être de simples témoins de l'intelligence des deux meuniers auxquels nous avions confié la conduite des moulins: ils furent mis en action tous les trois en même temps; le premier, comme nous l'avons dit, étoit disposé pour la mouture économique, & reçut le grain de la première qualité; le second, préparé également pour cette même mouture, fut employé pour le blé inférieur; l'un & l'autre avoient d'abord un bluteau propre à donner la fleur de farine, & duquel s'échappoient les sons gras pour tomber dans un dodinage à travers duquel passoient d'abord les

gruaux blancs & ensuite les gruaux bis: à mesure qu'on tiroit de la huche les premiers produits de l'un & de l'autre moulins, on les mettoit dans des sacs, vis-à-vis du moulin qui les avoit fournis, & dans l'ordre même des produits: les gruaux repassés sous la meule à quatre reprises, & blutés autant de fois, étoient mis également dans des sacs, & prenoient, en face du moulin, le rang suivant lequel ils avoient été blutés; par-là, en voyant à la tête des sacs la fleur de farine, on distinguoit par ordre le premier, le second, le troisième & le quatrième produit de la mouture répétée des gruaux; à leur suite venoient aussi par ordre les issues sorties de chaque moulin, c'est-à-dire le remoulage de gruaux, le remoulage bis, les recoupes & le gros son.

Le précis que nous donnons, mais auquel nous aurons lieu de revenir, sur les différens produits que nous tirâmes par la mouture économique des six setiers de froment de la première qualité, ce détail succinct doit être appliqué aux résultats que nous fournit la mouture pareille des six setiers de blé médiocre; & comme le procédé fut le même dans les deux moulins, le même ordre régna dans les cinq produits en farine & dans les issues qui en furent séparées.

L'opération qui se fit au troisième moulin, où l'on employa la mouture à la grosse, n'offrit aucun des produits distincts qui viennent d'être exposés; il n'étoit question en effet que d'y broyer simplement les grains, & de faire passer dans des sacs la farine confondue avec les gruaux & le son: on commença donc par moudre les six setiers de froment de la première qualité, & ensuite les six autres setiers d'une qualité inférieure: les sacs qui contenoient la farine brute de l'une & l'autre sortes de grain, furent transportés & distingués avec soin, suivant la qualité du blé duquel cette farine brute provenoit, dans l'endroit indépendant du moulin où elle devoit être blutée suivant l'usage, & partagée en différens produits, sans qu'aucun d'eux passât de nouveau sous les meules. Comme la mouture économique est la seule dont on fasse usage dans les moulins de l'hôpital, nous n'y trou-

vames point de bluterie montée pour la mouture à la grosse: prévenus de bonne heure que nous n'y aurions pas cet avantage, & desirant néanmoins que notre expérience fût consommée à Corbeil, nous y envoyâmes, avant notre départ de Paris, le sieur Sédaine, ouvrier formé à ce genre de travail, & pourvu de tout ce qui étoit nécessaire pour l'exécuter.

Le sieur Leroux, boulanger très-instruit, & qui a toute la confiance de l'Administration des hôpitaux, pour la partie des grains, accompagna cet ouvrier: deux grands bluteaux, bien partagés pour le degré de finesse des soies, se trouvèrent établis à Corbeil avant que nous y arrivassions; ce fut à la faveur de ces deux instrumens bien disposés pour leur effet, & qui devoient donner chacun des produits différens, que nous nous préparâmes à établir une séparation dans nos farines brutes, & à obtenir les résultats ordinaires de la mouture à la grosse: le sieur Leroux voulut bien se charger de la conduite des bluteaux, dont l'usage lui est familier, & qui demandent une certaine attention pour que dans le mouvement qu'on leur imprime, la farine plus ou moins atténuée passe à travers les soies du bluteau qui lui sont le mieux appropriées.

Les détails relatifs à la mouture à la grosse étant principalement ceux que le Parlement demande, & la bluterie séparée du moulin, par le moyen de laquelle nous avons partagé la farine brute en différens produits, faisant partie essentielle de l'opération dont il s'agit ici, nous avons cru devoir entrer dans quelque explication sur l'ordre qui a régné dans cette bluterie, & sur la manière la plus avantageuse dont on y a tiré parti de la farine brute des deux sortes de grains.

Nous avons employé pour cet effet deux bluteaux renfermés chacun dans une espèce de coffre allongé, ouvert sur un des côtés, lequel étoit recouvert avec soin par une toile lorsque le travail avoit lieu; ce coffre étoit partagé sur sa longueur en deux parties, dont la première avoit trois fois

l'étendue de la dernière, comme devant recevoir le produit le plus abondant.

Le premier bluteau, nommé *bluteau à blanc*, étoit composé de huit laizes de soie, dont les six premières plus fines que les deux autres, se trouvoient au-dessus de la case la plus longue d'un des coffres dont nous venons de parler, & y faisoient tomber la fleur de farine; tandis que les deux autres laizes, placées au-dessus de la case la plus courte, donnoient passage à la farine moins légère, nommée *bis-blanc* : les *sons gras*, c'est-à-dire chargés de gruaux, sortoient par la grande ouverture de ce bluteau, & recueillis ensuite, ils étoient portés au second, nommé *bluteau à sons gras*.

Celui-ci étoit composé aussi de huit laizes, dont les quatre premières étoient de soie, il est vrai, comme les précédentes, mais elles étoient plus claires que celles de l'autre bluteau, & par-là hors d'état de retenir les gruaux blancs : quant aux deux laizes suivantes elles étoient formées de quintin, espèce de toile de fil gommé, moins serrée que le tissu des quatre premières laizes, & propre à laisser échapper les gruaux bis; on n'avoit employé pour les deux dernières laizes qu'une toile assez grossière, nommée *riffard*, & destinée à donner passage, tant aux recoupes qu'aux recoupettes; & enfin le gros son sortoit par la grande ouverture de ce second bluteau.

Dans le dessein de retirer la plus grande quantité de fleur de farine qu'il seroit possible d'obtenir des farines brutes, & d'en bien séparer les gruaux, on réunit, après les opérations successives de la bluterie, le premier produit du second bluteau à sons gras avec le second produit, nommé *bis blanc*, du premier bluteau, & on les fit repasser mêlés ensemble dans ce même premier bluteau, qui rendit encore de la fleur de farine dans la case la plus longue du coffre, & du bis blanc dans la case la plus courte; ce qui sortit par la grande ouverture de ce premier bluteau fut reporté dans le second qui restitua d'abord du bis blanc, ensuite des farines bisées sur celles qui étoient restées dans le coffre de ce second bluteau, & enfin

enfin du menu son au-dessus de celui qu'on y avoit laissé également.

Aussi a-t-on peut-être déjà remarqué avec quelque surprise , en jetant les yeux sur les tableaux de tous les produits que nous avons obtenus, qu'ils ont été plus forts en fleur de farine dans la mouture à la grosse que dans la mouture économique; en voici la raison: la portion de cette fleur de farine qui avoit échappé d'abord aux six premières laizes du bluteau à blanc, qui étoit tombée en partie sur le bis-blanc qu'on a repris, qui avoit suivi en partie les sons gras, & s'étoit mêlée avec les premiers produits du second bluteau; cette même portion de fleur de farine a passé enfin à travers les six premières laizes du bluteau à blanc, lorsqu'on y a fait repasser confusément & le bis-blanc dont nous venons de parler, & les premiers produits du second bluteau.

Toutes les opérations de bluterie que nous venons de détailler, & qu'avoit exigées la mouture à la grosse pour que nous en tirassions tout l'avantage qu'il étoit possible d'en espérer, ont été appliquées successivement aux farines brutes des deux sortes de blé, & conduites dans le même ordre qu'on a déjà vu; de manière qu'après avoir commencé par les farines des grains de 1781, on ne s'est occupé de celles du blé de 1782 que lorsqu'on a eu recueilli les produits donnés par les premières, & vidé avec soin tant les deux coffres que les bluteaux.

L'opération commença par la farine brute que nous avons obtenue des six setiers de froment de la première qualité, & fut continuée sans interruption: de la totalité de cette farine brute nous tirames d'abord trois produits distincts, qui étoient 1.^o la fleur de farine; 2.^o la farine de la seconde qualité ou le bis blanc, le blanc bourgeois; 3.^o la farine bise; & enfin il resta trois autres produits en issues, c'est-à-dire, le gros son, les recoupes & les recoupettes.

Dans l'opération pareille de la bluterie sur la farine brute des six setiers de blé médiocre, nous eumes les mêmes résultats, quant à la distinction seulement des farines en trois

qualités différentes & à la séparation des issues, dans l'ordre que nous venons d'exposer.

Les produits de toutes les farines brutes furent mis chacun dans des sacs, avec une distinction pour leur qualité, & une marque relative, soit aux six setiers du blé le plus beau, soit aux six autres de blé médiocre; & nous n'eûmes plus qu'à constater le poids tant des farines, que des issues que les deux sortes de mouture nous avoient données.

Le même ordre que nous avons observé pour les produits différens que nous avons obtenus des deux sortes de mouture, nous le suivîmes dans la pesée de ces mêmes produits.

On peut se rappeler que les six setiers de froment de la première qualité, qui furent soumis à la mouture économique, pesoient ensemble, & déduction faite des sacs 1452 livres; nous tirâmes de cette quantité de grains, déduction faite également du poids des sacs,

	<i>Livres. Onces.</i>	
En fleur de farine.....	583.	"
En première farine de gruau.....	286.	8.
En deuxième farine de gruau.....	122.	8.
En troisième.....	57.	"
En quatrième.....	47.	"
	<hr/>	
	1096.	"
Le poids des issues ayant été constaté ensuite, celui		
du remoulage de gruau fut de.....	43.	"
Du remoulage bis fut de.....	94.	8.
Les recoupes pesèrent.....	119.	"
Et le gros son se trouva du poids de.....	68.	"
	<hr/>	
Les déchets se trouvèrent de.....	31.	8.
	<hr/>	
	1452.	"

On voit d'après ce Tableau, qu'un setier de froment d'une bonne qualité, à la mesure de Paris, & pesant 242 livres, a donné en farines différentes, par la mouture économique.....

Livres. Onces.

Que les issues ont été de.....	182.	10 $\frac{2}{3}$.
Et qu'il y a eu en déchet.....	54.	1 $\frac{1}{3}$.
	5.	4.

 242. "

Les six setiers de froment d'une qualité inférieure, qui furent soumis également à la mouture économique, pesoient ensemble, déduction faite du poids des sacs, 1375 livres 12 onces, ils nous donnèrent en fleur de farine.....

En farine de premier gruau.....	454.	"
En farine de second gruau.....	280.	"
En farine de troisième.....	151.	8.
	64.	"
Et enfin, en produit de quatrième gruau.....	64.	8.

 1014. "

Le poids des issues fut pour le remoulage de gruau,

de.....	44.	"	}	322.	"
Pour le remoulage bis de.....	106.	8.			
Pour les recoupes de.....	65.	8.			
Et pour le gros son de.....	106.	"			

Les déchets furent par conséquent de.....

39. 12.

 1375. 12.

Le setier de ce froment, d'une qualité médiocre, & du poids seulement de 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$, ne donna donc en farines différentes que.....

169. "

Le poids des issues fut de.....

53. 10 $\frac{2}{3}$.

Et celui du déchet de.....

6. 10.

 229. 4 $\frac{2}{3}$.

Que d'après ce premier exposé, on rapproche les produits du setier de froment de la première qualité, & recueilli en

1781, des produits de l'autre setier de froment d'une qualité inférieure & récolté en 1782, & qu'on fasse la comparaison de leur poids, on remarquera d'abord que si le setier de blé de 1781, pesoit 12 livres 11 onces $\frac{1}{3}$ de plus que celui de 1782, il a fourni aussi une plus grande quantité de farine que ce dernier, par une suite de sa plus grande pesanteur & de sa meilleure qualité; il a donné en effet 182 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ de farine, pendant que le setier de blé de 1782, n'en a donné que 169. La différence, comme on voit est de 13 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ à l'avantage du froment de 1781, & cet excédant en farine ne sauroit être considéré comme soustrait à la partie des issues du setier de froment de 1781, puisqu'elle est du poids de 54 livres 1 once $\frac{1}{3}$, & que cette quantité de gros & menu son, est celle que retirent en général les Meuniers, par la mouture économique, d'un setier ordinaire de froment; on a vu d'ailleurs dans le détail précédent, que le setier de blé de 1782 a donné 53 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ d'issues, quoiqu'il n'ait produit que 169 livres de farine; c'est-à-dire, comme nous venons de le faire observer, 13 livres 10 onces $\frac{2}{3}$ de moins qu'on n'en a obtenu du setier de blé de 1781. Il est donc à présumer que l'opération de la mouture économique appliquée ici à des grains de qualité assez inégale, a été bien conduite, puisque les résultats en farines paroissent ne varier qu'à raison du poids des grains, & que l'excédant en farines qui se trouve sur les six setiers de froment de la première qualité, se rapproche beaucoup de l'excédant de poids de ces six setiers en nature sur les six autres de blé médiocre.

Qu'il nous soit permis de faire ici une observation qui tient à ce que nous venons de dire, & qui tiendra également au détail sur les produits de la mouture à la grosse que nous allons bientôt exposer.

On a remarqué sans doute que l'excédant en poids des six setiers de 1781 sur ceux de 1782, n'étoit que de 76 livres 4 onces, pendant que l'excédant en farines alloit jusqu'à 82 livres, & on en a conclu avec raison que cette

dernière quantité de farines ne peut pas résulter d'une moindre quantité de grains , puisqu'on ne retire ordinairement en farines différentes , par la mouture économique , que les trois quarts du blé qu'on a fait moudre , & qu'alors les 76 livres 4 onces d'excédant de poids du froment de 1781 , n'auroient dû donner tout au plus sur ce pied-là , en excédant de farines , que 57 livres 3 onces.

Mais il est essentiel d'observer que si l'on peut attendre pour l'ordinaire , à la faveur de la mouture économique , les trois quarts en farines , & même un peu au-delà , comme on l'a vu , d'une certaine quantité de froment d'une qualité supérieure & d'un poids déterminé , de 200 livres , par exemple , on ne doit pas espérer un produit aussi avantageux d'une quantité pareille de 200 livres de blé médiocre & peu nourri. On sent en effet que la pesanteur du grain résultant & de la farine qu'il contient & de son écorce , le poids de celle-ci est toujours à-peu-près le même dans le blé médiocre que dans celui qui est d'une qualité supérieure ; outre qu'il doit y avoir un plus grand nombre de grains en nature , & conséquemment plus d'écorce dans les 200 livres de blé médiocre que dans les 200 livres de celui qui est d'une bonne qualité & bien nourri ; ainsi , loin que dans notre expérience les 1375 livres 12 onces de blé inférieur aient rendu autant de farine proportionnellement que les 1452 livres de blé supérieur , elles n'ont pas même donné les $\frac{3}{4}$ de leur poids en farines différentes ; il auroit fallu qu'au lieu de 1014 livres de farine qu'on a tirées de ces 1375 livres 12 onces de blé médiocre , on en eût obtenu 1038 livres 13 onces ou à-peu-près , pour que leur produit eût été proportionné à celui des 1452 livres de beau froment ; alors les farines de ces 1452 livres , comparées avec celles que les 1375 livres 12 onces ont rendues , n'auroient eu en excédant de poids que 57 livres 3 onces , qui sont précisément le produit en farine des 76 livres 4 onces de grains en nature qu'ont les 1452 livres de beau froment au-delà du poids des 1375 livres 12 onces de froment inférieur.

Si, à l'appui de ce raisonnement, on jette les yeux sur les produits en issues & sur les déchets relatifs, tant aux six setiers de 1781 qu'à ceux de 1782, on verra que le total du gros & menu son & des déchets dépendans des 1452 livres de beau froment, ne s'est trouvé que de 356 livres; c'est-à-dire, de 7 livres au-dessous du quart de ces 1452 livres; tandis que la totalité tant des issues que des déchets relatifs aux 1375 livres 12 onces de blé médiocre, est de 361 livres 12 onces, c'est-à-dire, de 17 livres 13 onces plus fort que le quart de ces mêmes 1375 livres 12 onces; ce dernier excédant, tant en issues qu'en déchets, particulier aux six setiers de 1782, étant réuni aux 7 livres en issues & en déchets qu'ont éprouvé de moins les six setiers de 1781, forment un total de 24 livres 13 onces, qui est exactement la quantité de plus en produit de différentes farines qu'auroient dû donner les six setiers de 1782, pour que ce produit se trouvât proportionnel à celui du blé de 1781, pour qu'il fût de 1038 livres 13 onces, au lieu de 1014 livres, dont il a été seulement; & ceci fait bien connoître que dans l'achat des blés on doit peut-être se rendre plus attentif à la qualité des grains qu'au prix qui s'y trouve attaché, puisqu'on est bien dédommagé de 20 ou 30 sous, que chaque setier peut coûter de plus, par un produit plus fort en farine, par une plus grande quantité de meilleur pain, & un profit supérieur au prix un peu plus haut, sur lequel on a eu la prudence de ne point hésiter.

Les produits de la mouture à la grosse avoient été séparés avec soin, comme on a vu, de ceux dont nous venons de rendre compte: les farines obtenues par cette mouture, & sorties des grains de 1781, avoient été séparées également de celles que le blé de 1782 avoit données, & il régnoit d'ailleurs une distinction exacte entr'elles pour la qualité des produits.

Nous commençames par établir le poids des farines que nous avions tirées des six setiers de froment de la première

qualité, & qui, comme les six autres de la même sorte, pesoient ensemble 1452 livres.

Le poids de la farine de la première qualité, déduction faite de celui des sacs, se trouva de.....	<i>Livres. Onces.</i>
	701. 8.

Celui de la farine de la deuxième qualité, ou du bis-blanc, étoit de.....	136. 8.
---	---------

Et enfin, la farine bise ou de la troisième qualité pesoit.....	233. "
	<hr/> 1071. "

Pour le produit des issues, nous eumes en gros

fon.....	117. "	}	364. 8.
En recoupes.....	99. "		
Et en recoupettes.....	148. 8.		
Les déchets ne se trouvèrent que de.....	16. 8.		
			<hr/> 1452. "

Il résulte de ce Tableau, qu'un setier de froment d'une bonne qualité, à la mesure de Paris, & pesant 242 livres a rendu, en farines différentes, à la mouture à la grosse.....

178. 8.

En issues.....	60. 12.
----------------	---------

Et n'a éprouvé en déchet que.....	2. 12.
-----------------------------------	--------

242. "

On se rappelle que les six setiers de blé médiocre ne pesoient ensemble que 1375 livres 12 onces, nous en obtinmes en farine de la première qualité.....

685. "

En farine de la seconde ou en bis-blanc.....	162. "
--	--------

Et en farine bise.....	150. "
------------------------	--------

997. "

Le poids des issues se trouva, pour le gros son, de.....

120. 8.

Pour les recoupes de.....	122. 8.	}	356. 8.
Et pour les recoupettes de.....	113. 8.		

Les déchets furent de.....	22. 4.
----------------------------	--------

1375. 12.

D'après les produits différens , établis dans ce dernier Tableau , on voit qu'un setier de froment d'une qualité médiocre & du poids , à la mesure de Paris , de 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$, a donné en farines différentes , à la mouture à la grosse		Livres	Onces.
		166.	2 $\frac{2}{3}$.
En issues		59.	6 $\frac{2}{3}$.
Et a perdu par le déchet		3.	11 $\frac{1}{3}$.
		<hr/>	
		229.	4 $\frac{2}{3}$.

Si, en se réglant sur ce que nous avons fait pour les résultats de la mouture économique, on rapproche actuellement les produits par la mouture à la grosse, d'un des six setiers de froment de la première qualité, & de 1781, des produits d'un des six autres d'une qualité médiocre, & de 1782; & si on compare leur poids, on verra que le setier de blé de 1781 qui pesoit 12 livres 11 onces $\frac{1}{3}$ de plus que celui de 1782, a donné aussi plus de farine que ce dernier, comme étant d'une plus grande pesanteur spécifique dûe à la bonne qualité: nous en avons retiré en effet 178 livres 8 onces, tandis que le setier de blé de 1782 n'a rendu en farine que 166 livres 2 onces $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, 12 livres 5 onces $\frac{1}{3}$ de moins que le setier du beau froment de 1781. On ne sauroit regarder, & nous en avons déjà fait l'observation, ce surplus en farine fourni par le setier de blé de 1781, comme une soustraction faite aux issues de ce même setier, puisqu'elles sont en total du poids de 60 livres 12 onces; que leur quantité approche de celle qui sort communément d'un setier de grains par la mouture économique; que le poids de ces issues n'excède celui du gros & menu son du setier de blé de 1782, que de 1 livre 5 onces $\frac{1}{3}$, & que par conséquent les 12 livres 5 onces $\frac{1}{3}$ de farine dont nous venons de parler, sont réellement un produit de cette qualité qui est dû à un blé plus sain & mieux nourri: il paroît donc encore par ce résultat, que l'opération dont il s'agit ici a été conduite avec la sorte de précision dont la mouture à la grosse étoit susceptible; qu'il n'y a eu aucune

confusion

confusion dans les produits du travail sur l'une & l'autre sorte de grains, puisque l'excédant de poids, à mesure égale, du blé de 1781, sur celui de 1782, s'est annoncé par celui des farines dans les deux sortes de mouture, puisqu'il n'a laissé aucun doute sur l'ordre que nous avons établi relativement à la distinction des blés en nature, des produits différens des trois moulins, & de ceux de la bluterie isolée que la mouture à la grosse exigeoit nécessairement.

Nous avons lieu ici de rappeler une observation que nous avons déjà faite, & que nous avons annoncée comme devant recevoir une nouvelle application.

Les 1452 livres de blé de 1781, ont donné par la mouture à la grosse 1071 livres de farine, tandis qu'on n'en a retiré que 997 livres des 1375 livres 12 onces de blé de 1782; la différence d'entre les deux produits en farine, est de 74 livres: cependant l'excédant de poids qu'ont les six setiers de blé de 1781 sur ceux de 1782, n'est que de 76 livres 4 onces, & on ne peut pas avoir tiré 74 livres de farine de cet excédant en grains, qui n'a que 2 livres 4 onces au-delà du poids de ces mêmes farines; aussi n'entre-t-il réellement que 57 livres 3 onces de farine dans les 1071 livres, pour les 76 livres 4 onces de blé; il est vrai qu'il faut ajouter la quantité précise de 16 livres 13 onces pour compléter les 74 livres de farine qu'ont de plus les 1452 livres de blé de 1781, mais il est nécessaire de remarquer que dans la comparaison des six setiers de 1781 avec ceux de 1782, les issues & les déchets des uns & des autres doivent être considérés & faire partie du calcul. Si dans cette opération de la mouture à la grosse, le gros, le menu son & les déchets toujours inévitables, n'eussent formé, comme à l'ordinaire, que le quart de la quantité de blé employée, le total de ces objets n'auroit été pour les 1452 livres du blé de 1781, que de 363 livres, au lieu qu'il s'est trouvé de 381 livres, c'est-à-dire, de 18 livres au-dessus du quart des six setiers de 1781; il n'auroit été pour ceux de 1782 que de 348 livres 15 onces, au lieu

qu'il a monté jusqu'à 378 livres 12 onces, c'est-à-dire, à 34 livres 13 onces au-delà du quart; alors les six setiers de 1781 doivent avoir dans la comparaison un excédant en farine de 16 livres 13 onces, qui est précisément la quantité dont il vient d'être question, pour compléter les 74 livres de farine qu'ont les six setiers de 1781 sur ceux de 1782, & qui est en même temps la quantité qui reste des 34 livres 13 onces, après la soustraction des 18 livres d'excédant au-delà du quart des issues & des déchets qui regardent les six setiers de blé de 1781.

Nous avons cru devoir aller au-devant d'une difficulté qui pourroit d'abord se présenter, quand on feroit attention au poids d'une certaine quantité de farine comme supérieur ou peu inférieur au moins à celui d'une certaine quantité de blé de laquelle cette farine paroîtroit avoir été extraite; les produits rapprochés frapperont au premier coup-d'œil, & feront évanouir la difficulté: c'est dans cette vue que nous mettrons sous les yeux de l'Académie trois tableaux relatifs à toutes les opérations que nous venons d'exposer.

Le premier offrira les produits distincts de la mouture économique sur l'une & l'autre sorte de grains qui ont fait la matière de notre expérience; le second présentera également les produits de la mouture à la grosse sur des quantités égales des deux sortes de grains; & le troisième sera comme un précis de ces deux différentes moutures, en offrant les produits plus faciles à saisir, & tirés avec précision d'un seul setier de froment d'après les produits que nous avons obtenus plus en grand, & en donnant lieu encore de faire sur le champ une comparaison exacte du poids des deux sortes de grains, de celui des farines qui en sont résultées, de la quantité des issues relative à chaque opération, & des déchets plus ou moins considérables qui en ont été la suite.

Les personnes qui se sont occupées des produits en farine de la mouture à la grosse, pour les comparer avec ceux de la mouture économique, seront surprises sans doute que nous en ayons obtenu d'aussi avantageux de cette première

mouture , puisqu'ils se rapprochent beaucoup de ceux qu'on tire communément de la dernière ; & il est certain que dans un Mémoire lu à l'Académie en 1783 , où l'on avoit pour objet un tarif propre à établir le prix du pain relativement à la valeur du blé & des farines , on a supposé avec assez de fondement que la mouture à la grosse , telle qu'on la pratique dans les provinces , n'étoit pas aussi favorable , à beaucoup près , que la mouture économique ; mais l'avis demandé à l'Académie par le Parlement , devoit avoir spécialement la mouture à la grosse pour objet ; elle avoit été employée à Rochefort dans l'essai qui a fait naître une contestation ; nous devons dès-lors nous y rendre très-attentifs , & chercher autant par esprit d'équité que par le desir de faire tomber , s'il étoit possible , cette contestation , à tirer de cette mouture tout l'avantage qu'elle peut procurer ; nous n'avons donc rien négligé pour parvenir à ce but , & c'est peut-être par l'attention que tant de motifs nous portoient à donner à cette mouture , que nous en avons obtenu des produits un peu plus avantageux que nous ne les espérions.

Mais il est important de remarquer qu'il ne s'agit pas uniquement , dans la mouture des grains , de tendre au plus grand produit sous un point de vue général , & sans aucun égard à la qualité des farines , puisqu'on peut par un travail si mal entendu moudre presque la totalité des grains & confondre les farines avec le son atténué ; il est question au contraire , dans une mouture conduite avec intelligence , d'obtenir les premières farines dans leur plus grande pureté , d'en recueillir le plus qu'il est possible , & de ne laisser dans les dernières que le peu de son réduit en poudre impalpable qu'il est au-dessus de l'art d'en bien séparer : or , dans ce principe la mouture à la grosse peut donner , il est vrai , une assez grande quantité de fleur de farine pure , elle peut fournir des farines d'une seconde qualité où il se trouvera peu de particules de son ; mais il n'en sera pas de même des farines bisées par lesquelles on terminera l'opération , elles seront sensiblement piquées , & annonceront par leur rougeur que le son y est

abondant. Une chose bien digne d'attention dans cette mouture, c'est que pendant que le son atténué jusqu'à un certain point, passe à travers le bluteau & se confond avec la farine, une partie des gruaux, c'est-à-dire, la portion la plus précieuse du grain qui a échappé au broyement de la meule, & qui par sa grosseur n'a pas pu se faire jour à travers les soies trop fines du bluteau, sort en qualité d'issues par la grande ouverture de ce même bluteau, & occupe une place parmi le gros son, tandis que parmi les farines la sienne est occupée par le son atténué; & on ne doit pas être surpris que dans la mouture à la grosse une partie des gruaux échappe toujours à l'action des meules: on sait que dans cette espèce de mouture il n'y a qu'une seule opération au moulin, & que les farines sont rendues dans l'état brut aux propriétaires des grains; il est aisé de sentir que le blé ne passant qu'une seule fois sous la meule, n'y est pas broyé complètement, que des portions de grains s'y maintiennent en petits grumeaux, qu'enveloppées de toutes parts par la farine très-atténuée, elles sont garanties jusqu'à un certain point de l'action rapide des meules, qu'elles conservent de la consistance au milieu de la farine & du son qui reçoivent immédiatement le choc des meules, & sortent bientôt de dessous elles à mesure que de nouveau grain s'y introduit; aussi remarque-t-on que les gruaux destinés, dans la mouture économique, à repasser sous les meules, n'ont pas sous les doigts la douceur & le moelleux de la farine; il semble qu'on touche du sablon fin ou du grès mis en poudre; ces petites aspérités particulières aux gruaux annoncent sans doute que les meules ne les ont pas parfaitement atteints, qu'ils conservent une certaine grosseur, & ne peuvent que glisser par conséquent sur les soies du bluteau, à travers desquelles au contraire la farine légère passe facilement; dès-lors on reconnoît que ces portions précieuses du grain n'étant broyées que très-imparfaitement dans la mouture à la grosse, & ne repassant pas sous les meules, doivent rester confondues avec le son, & occasionner par-là une diminution plus ou moins sensible sur le produit en farine qu'on étoit en droit d'espérer.

On n'éprouveroit pas cette perte sans doute, si l'on employoit des bluteaux dont les toiles peu serrées donnaient passage à ces gruaux ; mais elles le donneroient aussi non-seulement aux petites parties de son qui s'y trouveroient adhérentes , mais encore au son plus grossier & dépouillé de farine avec lequel ces gruaux seroient confondus ; ceux-ci dès ce moment perdroient tout leur prix par ce mélange , & rentreroient dans l'ordre des farines bises , tandis que les deux premiers produits en gruaux étant repassés sous les meules , sont au moins aussi estimés que la fleur de farine , sont mêlés souvent avec elle par les boulangers , lui donnent plus de corps qu'elle n'en auroit seule , & contribuent sur-tout à la meilleure qualité du pain.

Nous n'ignorons pas , d'après des expériences particulières que nous avons faites , & auxquelles un motif de curiosité nous avoit conduits , qu'on ne puisse par un rapprochement excessif des meules & dans une seule opération du moulin , atténuer si parfaitement une grande partie des gruaux , qu'ils soient en état de passer à travers les soies fines du bluteau & en sortir avec la fleur de farine ; mais ce travail forcé tombe également sur le son confondu avec ces gruaux ; une partie de ce son réduit en poudre impalpable se mêle avec la farine la plus pure , s'introduit dans les gruaux broyés , ôte à ces produits de la première qualité le blanc mât , ou dans certaines circonstances la teinte légère de jaune qui les caractérise , occasionne par-là un désordre dans les produits de la mouture , qui n'échappe point , soit au coup-d'œil , soit au tact des gens de l'art , & qui met obstacle encore au talent des boulangers instruits , celui de faire la combinaison des farines , & d'avoir sous la main dans des gruaux seuls d'une excellente qualité , le moyen facile d'améliorer des farines médiocres , & de maintenir le pain , par ce mélange , dans la bonne qualité qu'on y a d'abord attachée.

Il est vrai que dans cette mouture à la grosse , où les meules sont très-rapprochées , on obtient encore une portion des gruaux , mais elle est foible , le son y est remarquable ,

& encore de la petite quantité qu'on obtient s'en est-il échappé une partie qui reste confondue avec le gros son, & qui demanderoit une nouvelle opération de la meule pour rentrer dans l'ordre des farines à la faveur du bluteau.

Le détail dans lequel nous venons d'entrer paroîtra suffisant sans doute à l'Académie, pour faire sentir que la mouture à la grosse sur laquelle nous avons été forcés de nous étendre par l'objet même de notre Rapport, a des inconvéniens presque inévitables; qu'elle n'est pas de nature à procurer l'extraction totale de la partie farineuse des grains; que l'ordre dans les produits, si favorable aux boulangers & utile au Public, ne sauroit y être observé avec autant d'exactitude & d'une manière aussi détaillée que dans la mouture économique. Elle occasionne d'ailleurs plus de frais que celle-ci n'en demande par les bluteries domestiques qu'elle met dans la nécessité d'établir; au lieu que dans l'autre mouture un seul moteur produit des effets différens, & tout est consommé au moulin. Nous ne nous arrêterons point ici sur cet article d'une augmentation de frais, il en a été question assez au long dans le Mémoire dont l'Académie a entendu la lecture, & que nous avons déjà cité.

Nous avons fait observer, & on peut voir par les tableaux qui accompagnent notre Rapport, que les produits en farine par la mouture à la grosse, ne s'éloignent pas considérablement de ceux de la même nature & du même blé que la mouture économique a rendus, puisqu'il ne s'agit que de 42 livres de différence à l'avantage de celle-ci, sur 2827 livres 12 onces de grains qui ont été soumises à chacune de ces deux sortes de mouture; mais il y a une observation à faire à cet égard, qui nous rappelle à la balance des déchets que nous avons éprouvés dans nos opérations, & qu'il convient d'établir ici.

Il paroît en général que les déchets dans la mouture économique, sont plus considérables que dans la mouture à la grosse, & nous en avons une preuve dans les résultats de notre travail. Tandis en effet que les 12 setiers, tant

du blé de 1781 que de celui de 1782, ont perdu par la mouture économique 71 livres 4 onces; douze autres setiers absolument pareils n'ont eu en déchets dans la mouture à la grosse que 38 livres 12 onces, c'est-à-dire, 32 livres 8 onces de moins que les douze premiers setiers.

On ne sauroit douter que ces déchets plus forts, qu'on observe dans la première de ces moutures, n'aient pour cause principale les opérations multipliées du moulin & de la bluterie qui sont répétées aussi souvent que le blé, d'abord en nature, puis réduit à des gruaux, passe & repasse sous les meules. L'agitation continuelle d'une matière aussi légère que la fleur de farine, le déplacement qu'on est obligé d'en faire, lorsqu'elle est sortie du bluteau, le transport réitéré des gruaux, soit pour les faire passer sous les meules à plusieurs reprises, soit pour les verser dans des sacs en état de farine & dans l'ordre où ils ont été remoulus, la durée du travail qui est de deux heures ou environ pour que l'opération soit complète, sur 240 livres de blé, tout annonce que dans la mouture économique, les déchets tombent principalement sur la partie farineuse du grain; qu'ils doivent être moins considérables, par proportion, sur son écorce; & que dès-lors la perte qu'on éprouve dans cette mouture tient nécessairement à une nature de produit qu'il seroit essentiel de conserver & sur lequel, si les déchets sont inévitables, ils peuvent au moins, par des précautions assez simples, être réduits beaucoup au-dessous de ceux qu'on remarque communément dans les moulins.

Si l'on suppose donc que dans notre expérience sur la mouture économique on se fût garanti, comme nous sentons qu'on l'auroit pu, à la rigueur, de la perte des 32 liv. 8 onces de farine au-delà du total des déchets observés dans la mouture à la grosse, il en seroit résulté que par la première de ces moutures nous aurions eu un excédant en farine, de 74 livres 8 onces sur les produits en farine de la seconde, & que la supériorité de l'une sur l'autre auroit été bien plus marquée que nous ne venons de l'observer. Il ne faut pas

croire cependant que cet excédant en farine, ne fût-il même supposé que de 42 livres, comme les Tableaux l'annoncent, ait été pris sur le menu son, & qu'il auroit dû faire partie réelle des issues, comme étant de la même nature & d'une basse qualité. On sait que dans la mouture économique, le gros, le menu son & les déchets forment communément le quart de la quantité de blé employée, & que les trois autres quarts sont composés de cinq produits différens en farine qu'il est ordinaire aussi de tirer de cette mouture. Les deux premiers de ces produits sont, il est vrai, de la plus belle & de la meilleure qualité, le troisième en diffère peu; & quoique les deux derniers ne soient proprement que des farines bises, cependant on les vend plus cher quelquefois, toute proportion gardée, que les farines de la première qualité.

Si, d'après la quantité assez constante de ces produits en farine par la mouture économique, on jette les yeux sur les Tableaux de nos opérations, on verra que les 1452 livres du blé choisi de 1781, ont rendu en farine par cette même mouture 1096 livres, c'est-à-dire, 7 livres de plus que les trois quarts de la quantité de blé employée, & qu'il ne manque par conséquent que 7 livres aux issues jointes aux déchets pour former le quart de cette même quantité de blé.

On observera encore que les 1375 livres 12 onces de grains de 1782, n'ont rendu par cette mouture également que 1014 livre de farine, comme blé d'une qualité médiocre, au lieu de 1031 livres 13 onces qui seroient les trois quarts de la quantité de blé mise en expérience.

On reconnoîtra enfin que ces deux quantités de blé réunies, & pesant ensemble 2827 livres 12 onces, ont donné 2110 livres de farine, c'est-à-dire 10 livres 13 onces de moins sur les trois quarts de la totalité des grains, & que par conséquent les issues jointes aux déchets qui dépendent de ces deux quantités de grains réunies, présentant un total de 717 livres 12 onces, n'ont que 10 livres 13 onces au-delà du quart de la totalité des grains.

Par l'application du même calcul aux produits moins
avançageux

avantageux en farine de la mouture à la grosse, on verra que les 2827 livres 12 onces des deux sortes de blé, n'ont rendu que 2068 livres de farine, au lieu de 2120 livres 13 onces qu'auroient dû produire, sur le pied des trois quarts, les grains soumis à cette mouture; & que les 52 livres 13 onces de farine qu'on observe de moins dans cette opération, se retrouvent dans le total des issues & des déchets qui sont résultés de cette mouture, puisque ce total est de 759 livres 12 onces, tandis qu'il n'auroit dû monter qu'à 706 livres 15 onces pour former le quart de la totalité des grains.

Dans l'emploi que nous avons fait de douze setiers de froment de la meilleure qualité, & recueilli dans une année favorable aux grains, telle qu'étoit 1781, & dans l'emploi en même temps de douze autres setiers de froment d'une qualité inférieure & de la récolte de 1782, nous avons eu pour objet, non-seulement de partir des mêmes bases pour comparer les deux moutures & de les appliquer chacune aux deux sortes de blé, mais encore de donner dans les résultats de la mouture des six setiers du plus beau froment & des six autres setiers du blé médiocre, la facilité de tirer un produit moyen qui pût représenter celui d'un *blé marchand*, qu'on regarde dans le commerce des grains comme au-dessous de la *tête des blés*, & au-dessus de ceux qui sont peu recherchés: le prix de ce *blé marchand* paroît être celui qui doit servir de règle pour asséoir la taxe du pain, puisqu'un boulanger n'achète ordinairement & assez cher des grains ou des farines d'une excellente qualité, que pour les marier avec d'autres dont il connoît la qualité inférieure, & qu'il n'a payé aussi qu'à proportion des défauts qu'il y a reconnus.

Les opérations même des boulangers mettent donc sur la voie pour trouver la base de la taxe du pain; c'est, à ce qu'il semble, la valeur du *blé marchand*, soutenue pendant quelque temps dans des marchés bien garnis, & qui tient à peu-près le milieu entre le prix du plus beau grain & celui des blés qui au premier coup-d'œil n'annoncent qu'un faible produit en farine, & auxquels ne s'attachent pas les

boulangers instruits, quoiqu'on les leur offre à un prix assez bas.

Si on supposoit avec assez de fondement, que six des setiers de blé de 1781, mêlés avec six autres de 1782, & formant un total en poids de 2827 livres 12 onces, pourroient être regardés comme représentant *le blé marchand* dont il vient d'être question, alors on auroit vu par le résultat de nos expériences, que les trois quarts ou à très-peu-près de cette quantité de blé dont on suppose ici le mélange, ont été convertis en farine par la mouture économique; mais on auroit remarqué en même temps, que le produit en farine n'a pas été aussi avantageux dans la mouture à la grosse, quoiqu'appliquée également à une quantité pareille de blé, par la raison bien sensible, que les issues qu'elle a données, ont recélé une partie des gruaux, par un vice sur lequel nous nous sommes déjà expliqués, & qui est inhérent à cette opération. Nous aurons lieu de revenir sur cet objet essentiel, comme étant une des bases sur lesquelles doit porter le travail dont nous sommes chargés, lorsque nous aurons exposé les opérations de la boulangerie, & rendu compte de la quantité de pain de différentes qualités, qu'ont produit les farines que nous avons employées.

SECONDE PARTIE.

L'OPÉRATION de convertir en pain une partie des farines que nous avons obtenues, exigea de notre part la même attention que nous avons donnée à la mouture des grains, & nous nous fîmes un devoir de la suivre jusqu'à dans le plus simple détail pendant tout le temps qu'elle demanda. La mouture à la grosse étant principalement celle dont nous devons nous occuper pour remplir les intentions du Parlement, nous crûmes devoir employer par préférence les farines que nous avons tirées de cette mouture, & en faire usage pour les convertir en pain dans les trois qualités de farine qui en étoient résultées: nous nous transportâmes en conséquence, le 15 Décembre de cette année, à Scipion,

maison dépendante de l'Hôpital général, où toutes nos farines étoient en dépôt, & distinguées par des étiquettes qui désignoient leur poids, leur qualité, & les blés desquels ces farines provenoient.

Après avoir reconnu que le cachet que nous avions appliqué sur la ligature de ces sacs à Corbeil, étoit sain & entier, nous fîmes ouvrir un de ceux qui contenoient la moitié ou environ de la farine de la première qualité que nous avions obtenue par la mouture à la grosse, du blé de 1781, & nous en tirâmes 310 livres qui furent mises dans un autre sac séparément, lequel fut lié, cacheté de nouveau & étiqueté; nous tirâmes encore 130 livres de farine de la seconde qualité, fournies aussi par le blé de 1781, & provenant également de la mouture à la grosse, du sac qui la contenoit, & dont il ne resta que 6 livres 8 onces pour échantillon: ces 130 livres de farine furent mises dans un autre sac qui fut fermé avec les mêmes précautions qu'on avoit prises pour le premier: enfin nous tirâmes 220 livres de farine de la troisième qualité, sorties toujours du blé de 1781, & obtenues par la mouture à la grosse, du sac où étoit enfermée cette farine bise, & dont il ne resta que 13 livres pour échantillon; les précautions dont on avoit usé à l'égard des deux premiers sacs, furent les mêmes pour celui dans lequel on mit ces 220 livres de farine, & ce premier ordre une fois établi, nous ne nous occupâmes plus que du soin de faire transporter ces farines dans l'endroit où nous pourrions jouir d'une certaine aisance, & sur-tout de la tranquillité que notre expérience demandoit: le travail continu des boulangers de Paris ne nous offroit que peu de ressources de ce côté; nous jetâmes donc les yeux sur l'école de boulangerie, comme plus favorable que tout autre endroit pour l'exactitude de l'opération dont nous étions chargés; d'ailleurs, nous comptâmes sur le zèle & les lumières de M. Brocq qui est à la tête de cette école de boulangerie, & nous ne nous trompions pas: nos trois sacs de farine furent transportés en conséquence à cette boulangerie, le même

jour 15 Décembre, & dès le soir nous y commençames notre opération. Il y a deux fours dans cette École, qui sont assez continuellement occupés, tant pour le pain des Prisons & celui du Dépôt de Saint-Denis, que pour celui de l'École-militaire; tout le travail relatif à ces trois enuroits fut fait dans la journée du 15 Décembre, & nous eumes la liberté pendant la nuit de disposer des ouvriers attachés à cette boulangerie, pour les opérations multipliées que notre expérience demandoit.

Nous nous proposâmes de faire trois fournées de pain dans l'emploi des farines que nous avions enlevées de Scipion, & nous comptâmes, d'après des épreuves connues, sur 288 livres de pain ou environ par chaque fournée.

On a vu plus haut que le premier des trois sacs que nous avions fait transporter à l'école de boulangerie, contenoit 310 livres de farine de la première qualité; que le second contenoit 130 livres de farine de la seconde qualité, nommée *bis-blanc*, & qu'il y avoit 220 livres de farine bise dans le troisieme sac; le total de ces farines étoit de 660 livres, dont le tiers de 220 livres, converti en pâte, étoit destiné pour chacune des trois fournées.

Comme les 310 livres de farine étoient de la même qualité, elles furent traitées dans un pétrin séparé; les 130 livres de bis-blanc eurent aussi un pétrin à part; & les farines bises furent également travaillées en particulier: ce ne fut qu'au moment de faire usage du four qu'une partie de la pâte produite par les 310 livres de farine de la première qualité, fut réservée pour former une certaine quantité de pain, & être jointe en cet état, pour une fournée, à ceux que devroient donner les 130 livres de bis-blanc: quant aux 220 livres de farine bise, elles suffisoient seules, étant converties en pâte, pour occuper le four, & ne le garnir qu'autant que nous l'avions jugé convenable. Nous aurions désiré de faire une fournée entière de bis-blanc, comme elle a eu lieu pour les deux autres sortes de farine, mais nous n'avions que 130 livres de bis-blanc ou environ, & il étoit plus essentiel de faire

une fournée entière dans laquelle ce bis-blanc fût compris, avec la précaution de le bien distinguer, que de l'exposer séparément en petite quantité à toute la chaleur d'un four assez grand : 90 livres de farine de la première qualité qu'avoient en excédant les 310 livres dont il vient d'être question, & qui donnèrent 118 livres de pain, complétèrent la fournée trop forte du bis-blanc, & les rendirent toutes les trois égales, comme ayant reçu chacune le produit en pâte de 220 livres de farine.

L'exposé que nous venons de faire nous a paru indispensable pour la clarté de notre opération, & afin que rien n'arrêtât dans les détails qui nous restent à exposer.

Le même jour 15 Decembre, à 10 heures $\frac{1}{2}$ du soir, on commença à préparer le *levain de première* [farine], qui étoit destiné pour les 310 livres de farine de la première qualité ; on prit pour cet effet 10 livres de levain dans celui qui appartenoit à l'école de boulangerie ; on les délaya dans huit pintes d'eau de puits un peu chaude, on les mêla ensuite avec 30 livres de farine tirées du sac qui contenoit les 310 livres de la première qualité, & on en forma une pâte ferme & élastique qu'on entretint dans une douce chaleur, afin qu'elle prît plus tôt son apprêt : on referma le sac de farine que ce levain regardoit, & on en cacheta la ligature.

A 2 heures 42 minutes du matin on procéda au levain de *deuxième* ; on délaya le levain de *première* dans 12 pintes d'eau tiède, on les mêla avec 48 livres de farine tirées du sac dont nous venons de parler, & on en forma une masse de pâte qui avoit toute la consistance de la première ; on la mit dans une corbeille d'osier qui fut recouverte par une toile grossière, & qu'on entretint dans une douce chaleur sur le cul du four : à 6 heures 55 minutes du matin, ce levain de *deuxième* avoit tellement reçu son apprêt, que la pâte se gonflloit de toutes parts, & commençoit à se répandre hors de la corbeille ; on le délaya sur le champ dans 22 pintes d'eau, on le mêla parfaitement avec 77 livres de farine de première qualité, & lorsque le levain de *tout point*, c'est-à-

dire le troisième & dernier, eut été converti en pâte solide & bien liée, on lui fit prendre son apprêt dans deux corbeilles qui furent placées bien recouvertes sur le cul du four.

A 9 heures 40 minutes du matin, ce levain *de tout point* ayant éprouvé la fermentation qui étoit nécessaire pour qu'on le mêlât de nouveau avec une quantité de farine proportionnée à sa masse, on le mit dans un pétrin; on y mit en même-temps les 155 livres de farine qui restoit des 310 livres destinées pour le pain de la première qualité, & on délaya ce levain *de tout point* avec 51 pintes d'eau: lorsque le mélange de la farine & du levain fut complet, & qu'on en eut formé une masse de pâte parfaitement homogène & bien liée, on la mit par parties dans le tour, qui est une sorte de pétrin plus petit & moins profond que le premier; cette pâte y fermenta encore, & y prit un nouvel apprêt, en attendant qu'elle fût divisée en autant de portions qu'on voudroit former de pains.

Quoique les heures auxquelles on a formé les trois levains destinés pour chaque sorte de farine, se soient ou suivies d'assez près, ou trouvées entre-mêlées, de manière qu'on préparoit un levain pour une sorte de farine, pendant qu'un autre levain formé plus tôt, recevoit son apprêt; cependant nous avons cru devoir, pour un plus grand ordre, suivre sans interruption la marche des trois levains & de leur emploi pour chaque sorte de farine, & les présenter sous un même coup-d'œil, en remontant pour chacun d'eux, aux heures où il a été préparé.

A 10^h 50' du soir, on disposa le levain de *première* pour la farine de la seconde qualité, nommée *bis-blanc*: à 3 livres de levain de *chef*, prises dans la pâte de l'école de boulangerie, on joignit 9 livres de farine de *bis-blanc*; on délaya ce levain dans trois pintes d'eau chaude, & après avoir formé du tout une pâte ferme & bien liée, comme celle dont nous venons de parler, on lui laissa prendre son apprêt en la maintenant dans une douce chaleur. A 3 heures du matin, ce même levain fut repris; on le délaya dans 6 pintes d'eau,

& on le pétrit avec 23 livres de farine de bis-blanc : la pâte bien travaillée qui en résulta, devint le levain de *seconde*, & passa pendant quelques heures à la fermentation : on le reprit à 7 heures $\frac{3}{4}$ pour composer le levain de *tout point* ; il fut délayé dans 9 pintes d'eau & mêlé avec 33 livres de farine de bis-blanc. Ce troisième levain eut bientôt acquis la consistance de la pâte ; mis ensuite dans une corbeille, il y éprouva une nouvelle fermentation, & à 10 heures $\frac{1}{4}$ du matin il fut tiré de la corbeille, mis dans le pétrin, délayé dans 23 pintes d'eau, & mêlé avec les 65 livres de farine de bis-blanc qui étoient restées ; lorsque le total de la masse eut été bien pétri, on mit la pâte dans le tour où elle fermenta de nouveau en attendant la subdivision qu'on en feroit pour en former des pains.

On vient de voir que les six premiers levains ont été préparés assez près les uns des autres, parce que nous avions la liberté d'employer deux fours en même temps, & qu'il falloit que les pains en pâte & sur *couche* fussent prêts en même temps pour chacun des fours ; mais nous n'avions pas la même précaution à prendre pour les levains relatifs à la farine bise, puisque la cuisson des pains qu'elle devoit nous fournir ne pouvoit avoir lieu qu'après celle des pains de la première qualité ; & lorsqu'on auroit eu donné à l'un des deux fours toute la chaleur qu'il avoit perdue : aussi ne commençames-nous à préparer le levain de *première* pour la farine bise, qu'à 3 heures $\frac{1}{4}$ du matin ; nous primes, comme nous avons déjà fait, dans de la pâte levée de l'école de boulangerie, les 5 livres de levain de *chef* dont nous avons besoin, on les délaya dans 4 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau, & on les mêla avec 15 livres de farine bise : on laissa à la pâte qui en résulta tout le temps de bien fermenter, & ce ne fut qu'à 8 heures $\frac{1}{4}$ que ce levain de *première* fut repris, qu'on le délaya dans 12 pintes d'eau, qu'on le pétrit avec 40 livres de la même farine bise, & qu'après avoir obtenu une pâte bien liée, on lui fit éprouver la fermentation ; elle se trouva portée au degré convenable à 10 heures $\frac{3}{4}$; alors, on délaya

ce second levain dans 17 pintes $\frac{1}{2}$ d'eau , & on le pétrit avec 55 livres de farine bise. Devenu levain *de tout point* par cette troisième opération ; il fut mis dans des corbeilles , & y reçut son apprêt jusqu'à 1 heure 10 minutes de l'après-midi , qu'on le délaya parfaitement dans 40 pintes d'eau , & que , pétri avec 110 livres de farine bise , on en composa une masse de pâte fortement travaillée , qui fut mise enfin dans le tour pour y rentrer dans l'état de fermentation que les pétrissages successifs avoient interrompue : l'effet avantageux de cette fermentation s'annonce quelquefois dans le tour même , mais plus souvent sur les levains par les gersures qu'on remarque à la surface de la pâte , & dont il est aisé de sentir la raison ; cette surface se dessèche un peu , & prend une certaine consistance , tandis que la masse de la pâte conserve en-dessous son humidité , & ne perd rien de sa mollesse ; cependant le mouvement intestin qu'excite la fermentation dans cette masse bien liée & élastique , l'oblige de se soulever ; elle se dilate peu-à-peu , se tuméfie , résiste doucement à la main qui la presse , & oblige enfin la surface , trop sèche , de se gercer de toutes parts pour se prêter à la forme convexe qu'elle prend la pâte en se soulevant.

L'Académie a remarqué sans doute , que dans la formation des trois levains relatifs à chacune des sortes de farine , nous avons employé successivement , & toujours en augmentant , une quantité déterminée de ces farines , de manière que lorsqu'il a été question de faire usage du troisième levain , ou levain *de tout point* , nous avons converti en pâte la moitié juste de chaque sorte de farine ; que l'autre moitié fut mêlée ensuite avec ce même levain *de tout point* , & que par-là chaque sorte de farine convertie en pâte , donna séparément la quantité de pain qu'elle devoit fournir : cette méthode que suivent les boulangers intelligens , est sagement établie ; on se contentoit autrefois de mêler une quantité médiocre de levain , avec une masse considérable de farine , & on laissoit ensuite la pâte dans le repos pour y prendre l'apprêt dont elle étoit susceptible , jusqu'au moment où les pains

pains seroient tournés & mis au four; mais on sent combien il étoit difficile que la fermentation s'établît parfaitement dans une quantité considérable de pâte, à la faveur d'un peu de levain, sur-tout en ne lui donnant que quelques heures pour produire tout son effet; au lieu qu'en suivant la méthode que nous avons employée, on fait passer d'abord à l'état de levain une petite portion de la farine qu'on se propose d'employer; bientôt après une portion plus forte de la même farine se convertit en levain à l'aide du premier: une autre portion de farine plus considérable que les premières, & qui complète la moitié de toute celle qu'on doit employer, passe à l'état de levain par son mélange avec la pâte précédente qui a déjà fermenté; enfin, l'autre moitié de farine qu'on avoit réservée, est pétrie avec celle qui a subi la fermentation, & ne tarde pas elle-même à l'éprouver par le secours puissant qu'elle trouve dans une grande quantité de levain: on juge par-là combien cette pratique des boulangers instruits est favorable pour rapprocher sur le champ une molécule de farine qui a fermenté, d'une autre qui n'a pas encore passé par cet état; pour établir en peu de temps un mouvement intestin dans toute la pâte, & quelque considérable qu'en soit la masse, pour l'obtenir bien levée avec beaucoup d'égalité.

On a vu plus haut que les 310 livres de farine de la première qualité, ayant été converties en pâte disposée à bien fermenter, à la faveur de trois levains qu'on y avoit introduits successivement, fut mise dans le tour pour y prendre un nouvel apprêt: lorsque le moment de l'employer fut venu on commença par en tirer les pains qui devoient composer la première fournée; ils étoient au nombre de 72, & pesoient chacun 4 livres, & en outre 10 onces d'excédant de pâte, pour suppléer à la perte que devoit occasionner la cuisson. Le bon de poids que l'on met ordinairement à Paris sur les pains encore en nature de pâte, est de 2 onces sur un pain d'une demi-livre, de 3 onces sur celui d'une livre, de 6 onces sur celui de 2 livres, de 10 onces sur

celui de 4 livres, de 14 onces sur celui de 6 livres, de 1 livre 4 onces sur celui de 8 livres, & enfin de 1 livre 8 onces sur le pain rond de 12 livres; cet excédant de pâte sur les différens pains, est un peu plus fort dans quelques villes de Provinces, & notamment à Rochefort. Après la pesée de ces 72 pains auxquels on ne donna en les tournant qu'une longueur médiocre, celle des pains de pâte ferme si fort en usage à Paris, afin qu'ils éprouvassent moins de déchets au four, on les mit chacun dans un panneton, on les rangea ensuite dans des tiroirs où ils prirent leur dernier apprêt en attendant que le four eût été garni de bois parfaitement desséché, & que le feu, mis sans trop de précipitation, y eût établi une chaleur égale.

Le reste de la pâte dépendante des 310 livres de farine de la première qualité fut subdivisé en 40 pains d'une livre, en 18 de 2 livres, en trois couronnes de 2 livres chacune, & en 16 pains ronds de 3 livres; ces pains plus petits que les premiers devoient faire partie de la seconde fournée & y être distingués; ils commencèrent à prendre leur apprêt, ou sur *couche*, ou dans des pannetons, pendant qu'on préparoit ceux que fournissoit la pâte de bis-blanc, & qui devoient compléter la fournée. On prit sur cette dernière pâte, comme plus ferme que la première, la quantité qu'il falloit pour former 2 pains de 12 livres chacun, 2 autres de 8 livres, 3 couronnes de 2 livres, & le reste de la pâte fut converti en pains ronds de 3 livres chacun.

Ces pains de bis-blanc éprouvèrent de leur côté une légère fermentation dans les pannetons où ils furent placés, & se trouvèrent prêts pour être associés aux autres en même temps dans le second four qui leur étoit destiné.

Les 72 pains de 4 livres ayant été préparés à dessein un peu plus tôt que les autres, afin que les opérations en se succédant ne donnassent lieu à aucune confusion, on mit vers midi le feu au premier four, & cinq quarts d'heure après ou environ il fut en état de recevoir les 72 pains; ils y restèrent à peu-près une heure, & cette fournée fut

faite ; le second four auquel on avoit mis le feu pendant que le pain cuisoit dans le premier , se trouva prêt lorsque la première opération eut été terminée & que les 72 pains, mis dans un grand panier eurent été placés à l'écart.

On ne tarda donc pas à s'occuper de la seconde fournée, en mettant quelqu'ordre dans la manière de placer les pains dans le four : les pains de bis-blanc , & sur-tout ceux de 8 & de 12 livres en occupèrent le fond, comme beaucoup plus forts que ceux qui devoient les accompagner ; les pains tirés de la farine de la première qualités furent placés à l'entrée du four, de manière cependant que ceux du poids de trois livres qui sortoient de cette même farine, étoient les plus voisins de ceux de bis-blanc , & que les petits pains comme plus prompts à cuire, formoient le premier rang vers la bouche du four. Il nous fut facile , par cette disposition , de séparer au sortir du four les pains de différentes qualités qu'il avoit contenus , & de conserver jusqu'à la fin de notre expérience l'ordre que nous y avions d'abord établi.

Le retard que nous mimes, à dessein, dans la formation des levains qui regardoient la farine bise, nous donna tout le temps nécessaire pour terminer tranquillement les deux premières opérations, & pour attendre que la pâte en laquelle toute cette farine avoit été convertie, eût pris son apprêt dans le tour : lorsqu'on jugea qu'elle y avoit suffisamment fermenté, on la subdivisa en pains ronds de différente pesanteur, on en fit cent un d'une livre & demie chacun, & trente de trois livres, comme destinés pour les prisons ou le dépôt des Mendiants, & le reste de la pâte fut employé à faire deux pains de douze livres chacun, & quatre autres de six livres : pendant qu'ils prenoient tous l'apprêt ordinaire dans des pannetons, on se disposa à chauffer le premier des deux fours, & lorsqu'il eut acquis la chaleur convenable, on y mit ces cent trente-sept pains, en observant de placer au fond ceux qui, comme les plus forts, demandoient à y séjourner un peu plus long-temps : lorsque ces pains parurent cuits

suffisamment aux boulangers qui assistoient à nos expériences, on les tira du four, on les mit dans des paniers séparés des autres, & vers les six heures du soir tout le travail de la boulangerie fut terminé: nous attendîmes jusqu'au lendemain pour constater le poids de tous les pains; nous sentîmes bien qu'il en résulteroit quelque déchet, mais il n'est point d'usage de livrer le pain au sortir du four, & il convenoit de n'en déterminer la pesanteur que dans l'état où il se trouve quand on l'expose en vente.

Lors donc que nous eumes reconnu le lendemain que nous avions la totalité des différens pains qui avoient composé les trois fournées, nous n'eumes plus qu'à constater leur poids: l'inégalité de pesanteur qu'il y a constamment dans les pains au sortir d'un même four, comme on l'a prouvé par expérience dans un Mémoire publié à ce sujet, quoique ces pains en nature de pâte eussent été d'un poids absolument pareil, cette inégalité ordinaire dans la pesanteur des pains, quoique semblables tous en apparence, ne nous permit pas de nous régler sur le poids d'un pain de quatre livres, par exemple, pour en conclure que d'autres qui avoient été faits sur ce pied-là, eussent tous réellement ce même poids, ou ne s'en écartassent pas sensiblement; nous primes donc le parti le plus simple & qui nous conduisit à l'exactitude, ce fut de peser les pains par masses dans de grandes balances, d'employer les paniers d'osier, après en avoir fait la tare, pour les petits pains difficiles à entasser sur le plateau des balances, & de mettre dans les différentes pesées que nous fîmes, toute la précision dont elles étoient susceptibles: il en résulta que les 310 livres de farine de la première qualité avoient donné 399 livres en pains de forme & de poids différens; que les 130 livres de farine de bis-blanc en avoient donné 171 livres; que nous avions tiré des 220 livres de farine bise, 291 livres de pain; & que le total des trois fournées étoit de 861 livres. Il est nécessaire cependant d'observer que nous avions employé pour les levains de *chef* dont nous avions besoin, 18 livres de pâte qui étoient étrangères à

notre opération, & que les pains qui en sont résultés ont produit une augmentation sur la totalité de ceux que nous avons obtenus de nos propres farines: ces 18 livres de pâte contenoient 11 livres $\frac{1}{4}$ de farine & 6 livres $\frac{3}{4}$ d'eau; converties en pains avec la masse entière, elles en ont dû produire 14 livres $\frac{3}{4}$ dont il faut tenir compte dans le produit total que nous venons d'annoncer.

On regarde une opération en boulangerie comme bien faite, lorsqu'en employant 320 livres de farine d'une bonne qualité, en préparant la pâte avec soin, en ne la divisant qu'en pains de quatre livres, ou ronds ou d'une médiocre longueur, & en veillant sur-tout à la conduite du four, on retire de cette quantité de farine 420 livres de pain. Les résultats de notre expérience se sont trouvés un peu au-dessous de cette proportion, tant à cause d'un assez grand nombre de pains d'une à deux livres, qui faisoient partie des fournées, que par la raison du séjour des pains de 4 livres dans la première, qui fut un peu plus long qu'il ne falloit. Si en effet la totalité de nos pains n'eussent perdu au four que la quantité d'eau convenable, les 660 livres de farine que nous avons employées auroient rendu, dans la proportion dont nous venons de parler, 866 livres $\frac{1}{4}$ de pain, & en y ajoutant les 14 livres $\frac{3}{4}$, produits par les 18 livres de levain, nous aurions eu en total 881 livres de pain; mais comme nous n'en avons obtenu réellement que 861, on voit que ce produit est de 20 livres au-dessous, proportion gardée, de celui de 420 livres de pain donné par un sac de farine qui est établi à Paris sur le pied de 320 livres; cette diminution de poids a été remarquable sur les pains de 4 livres qui composoient la première fournée, comme ayant une assez grande surface, quoique d'une longueur médiocre; mais elle a été encore plus marquée dans les pains d'une & de deux livres qui avoient fait partie de la deuxième fournée, & qui sortoient des 310 livres de farine de la première qualité; ces derniers petits pains, en effet, au nombre de 61, qui auroient dû

peier ensemble 82 livres ou à-peu-près, d'après le poids qu'on leur avoit donné en nature de pâte, ne se trouvèrent plus en total que du poids de 73 livres $\frac{1}{2}$, & avoient perdu par conséquent 8 livres $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire un dixième du poids qu'ils auroient pu conserver comme pains plus forts & réduits à une moindre qualité.

On a dû remarquer que nous avons employé 208 pintes ou 416 livres d'eau, pour convertir en pâte toutes nos farines, & que d'ailleurs les 18 livres de levain en contenoient 6 livres $\frac{3}{4}$: les trois sortes de ces farines n'ont point absorbé, toute proportion gardée, une égale quantité d'eau; pendant que les 310 livres de farine de la première qualité n'en ont reçu que 186 livres, les 130 livres de bis-blanc en ont exigé 82 livres, c'est-à-dire 4 livres de plus que n'en auroient demandé 130 livres de la première de ces farines; & d'un autre côté il est entré 148 livres d'eau dans les 220 livres de farine bise, tandis qu'il n'en auroit fallu pour une quantité égale de farine de la première qualité que 132 livres, & lorsque d'un autre côté 138 livres $\frac{5}{6}$ ou à-peu-près auroient été suffisantes pour 220 livres également de farine de bis-blanc. Comme le pain tiré de cette dernière farine & celui que nous avons obtenu de la farine bise ont beaucoup moins perdu au four que les pains composés de la farine de la première qualité, il paroît que les farines qui, à quantités égales, absorbent le plus d'eau en passant à l'état de pâte, en retiennent davantage & avec plus de ténacité lorsqu'elles ont été converties en pains; il est vraisemblable aussi que cette propriété qu'ont certaines farines d'éprouver une moindre perte dans le four, tient dans la farine de bis-blanc, par exemple, à la grande quantité de gruaux qui s'y trouvent mêlés; qu'elle tient aussi dans la farine bise sortie de la mouture à la grosse, non-seulement à une portion de ces mêmes gruaux qui y sont confondus, mais encore au son plus ou moins atténué que ces farines contiennent.

Nous avons employé dans notre expérience 671 livres $\frac{1}{4}$ de farine, en y comprenant celle qui appartenait aux levains.

de *chef*, & nous en avons retiré 861 livres de pain; il étoit entré 422 livres $\frac{3}{4}$ d'eau dans la formation de la pâte qui a produit cette quantité de pain; il s'étoit donc fait une combinaison de 189 livres $\frac{3}{4}$ d'eau avec la totalité des farines, & il s'en étoit évaporé dans le four 233 livres. Il paroît dès-lors que si nos pains n'eussent pas éprouvé une perte de 20 livres au-delà de celle qu'on remarque dans une opération de boulangerie bien conduite, sur-tout à l'égard du four, il seroit resté en combinaison dans ces mêmes pains 209 livres $\frac{3}{4}$ d'eau : c'est-à-dire la moitié ou à peu-près de toute celle que nous avons employée. Si à la rigueur, la moitié de l'eau que nous avons introduite dans nos farines y fût restée, après leur conversion en pains, elle auroit fait les cinq seizièmes de ces farines; & peut-être, suivant la proportion dont nous avons parlé plus haut, d'après même des expériences journalières, est-ce le point le plus avantageux auquel on pourroit s'arrêter afin que le pain eût toute la saveur qui lui est propre six à sept heures après qu'il est sorti du four, pour qu'il se maintînt le lendemain dans une certaine fraîcheur, & ne perdît pas en passant trop tôt à un état de sécheresse le goût agréable qu'on y avoit d'abord trouvé.

On sent bien qu'il ne s'agit ici que de pains composés des farines de la première qualité, qui, ou ronds ou d'une longueur médiocre, ne présentent pas trop de surface, & qui soient tous du poids de 3 à 4 livres. On espéreroit en vain l'avantage dont nous parlons d'une fournée où il ne seroit entré que des pains d'une à deux livres, sur-tout si la pâte étoit légère & bien battue; on perdrait bientôt au four beaucoup plus de la moitié de l'eau qu'on auroit employée; ces pains, sur-tout ceux d'une livre, ne seroient frais que le premier jour, ils n'auroient que peu de saveur le lendemain & se trouveroient insipides le troisième jour.

Quant aux farines bises, on a vu qu'en état de pâte elles conservoient mieux l'eau, par leur nature, que les farines blanches, puisque la fournée pour laquelle on a fait usage de

ces farines bises, n'étoit composée, en très-grande partie, que de pains d'une livre & demie, & qu'il ne s'y est évaporé cependant que la moitié ou à peu-près de l'eau qui étoit entrée dans la pâte; au surplus les 20 livres de déchets qu'on a remarquées sur la totalité de nos pains, se réduisent à une perte peu considérable sur chaque livre prise l'une dans l'autre: elles n'y opèrent pas à la rigueur une diminution de trois gros, & il seroit à souhaiter que dans le commerce immense de la boulangerie, dans les variations sur le poids du pain que la chaleur inégale du four peut occasionner, la diminution à l'égard du poids prescrit, n'allât pas en général au-delà de celle qui s'est trouvée dans notre expérience, & que les pains de pâte légère sur tout, à laquelle on auroit donné l'excédant de poids ordinaire, ne se trouvaient trop foibles, que de 3 gros par livre au sortir du four.

Quoique l'expérience sur la conversion d'une quantité déterminée de farine en pains de différentes qualités, dont nous venons d'exposer les détails, & les observations que nous y avons jointes eussent pu suffire, à plusieurs égards, pour les conséquences que nous avons à tirer relativement à l'objet de notre travail, cependant nous avons cru devoir faire un nouvel essai, en matière de boulangerie, soit pour confirmer les faits que nous avons d'abord reconnus, soit pour parvenir à une plus grande précision dans les résultats. Cette seconde épreuve a roulé sur les farines différentes tirées des fix setiers de froment médiocre de 1782, & obtenues par la mouture à la grosse.

Nous nous sommes bornés, comme dans la première expérience, à 660 livres de farine en total, & cette quantité étoit composée de 350 livres de fleur de farine, de 160 de bis-blanc & de 150 de farine bise. Nous commençâmes cette opération le 26 Janvier à huit heures & demie du soir; nous la continuâmes pendant toute la nuit pour la formation successive des levains relatifs à chaque sorte de farine, & en laissant les intervalles de temps nécessaires pour que la pâte renouvelée à quatre reprises reçût parfaitement son apprêt. Le

compte

compte exact que nous avons rendu de la première expérience, nous dispense d'en rendre un nouveau de celle-ci : quant aux précautions qu'il étoit nécessaire de prendre avant que le pain fût mis au four, elles ont été les mêmes pour cette deuxième opération que celles dont nous avons parlé en exposant la première ; & il nous suffira de dire ici que les 350 livres de fleur de farine absorbèrent, à quatre reprises, 209 livres $\frac{1}{2}$ d'eau ; qu'il en fallut 100 livres pour les 160 de bis-blanc & 99 livres pour les 150 livres de farine bise ; & que par conséquent la totalité de l'eau pour les 660 livres de farines différentes fut de 408 livres 8 onces ; il faut même ajouter à ce total 7 livres 2 onces d'eau que contenoient les 20 livres de levain de *chef* que nous primes à l'école de boulangerie pour commencer notre travail. La masse de pâte qui étoit résultée des 350 livres de fleur de farine, avoit reçu tout son apprêt vers les neuf heures du matin ; on en tira d'abord 74 pains longs, du poids de 4 livres, qui furent destinés pour la première fournée ; le surplus de cette pâte fut subdivisé en 132 pains d'une livre, en 20 autres de deux livres chacun, & enfin du peu qui resta de cette même pâte on fit 3 petits pains en forme de couronne, lesquels pesoient ensemble 5 livres $\frac{1}{2}$.

On s'occupa ensuite de la pâte de bis-blanc, dont l'apprêt ne tarda pas à s'annoncer dès que ce premier travail eut été fini ; il fut tiré de cette pâte, un peu plus ferme que la première, soixante-trois pains, dont deux étoient chacun de 12 livres, trois étoient de 8 livres, six pesoient chacun 4 livres, cinquante autres étoient chacun du poids de 3 livres, & deux autres, en forme de couronne, ne pesoient ensemble que 2 livres $\frac{1}{2}$.

Tous ces pains de bis-blanc & les petits pains que la pâte de fleur de farine avoit fournis, composèrent la deuxième fournée ; on réserva pour la troisième tout le produit de la farine bise ; il consista en cinquante-six pains, dont deux étoient chacun de 12 livres, trois de 8 livres, six de 4 livres, & quarante-cinq de 3 livres.

Nous veillâmes attentivement à la chaleur du four, sur-tout vers la fin de l'opération; on en tira même alors quelques pains pour bien juger de leur état, & ce ne fut que lorsqu'on regarda la totalité comme parvenue au degré de cuisson convenable, qu'on tira tous les pains du four, en commençant par les plus petits, comme plus exposés à souffrir du déchet par le moindre délai, que ceux de 4, de 8 & de 12 livres.

Les produits des trois fournées furent mis par ordre dans de vastes paniers d'osier, & y refroidirent lentement dans la boulangerie jusqu'au lendemain matin, où nous nous occupâmes du soin de les peser, en distinguant les pains de différentes qualités; tous ceux qui dépendoient de la première fournée se trouvèrent du poids de 292 livres.

Les pains d'une & de 2 livres, qui faisoient partie de la deuxième fournée, pesoient ensemble 163 livres 12 onces.

Et les pains de bis-blanc, qu'on avoit joints à ceux-là dans le même four, pesoient ensemble 222 livres 4 onces.

Enfin, les pains bis qui avoient été cuits séparément comme exigeant un séjour assez long au four, pesoient en total 203 livres.

Ces quatre quantités réunies formèrent celle de 881 livres.

On a vu que nous avons employé 660 livres de farine pour cette expérience, tant en fleur de farine, qu'en bis-blanc & en farine bise: il faut ajouter à cette quantité celle de 12 livres 14 onces de farine, ou à peu-près, que contenoient les 20 livres de levain de chef qui nous avoient été nécessaires pour commencer à établir la fermentation dans la pâte des trois sortes de farine que nous avions à convertir en pains.

Ces 672 livres 14 onces de farine auroient donné 883 livres 2 onces de pain dans la proportion favorable de 420 livres de pain tirées de 320 livres de farine: le total de nos produits en pain n'a donc été au-dessous de celui-là que de 2 livres 2 onces, & nous nous sommes peu écartés de cette proportion avantageuse que nous desirions de saisir.

Mais on doit faire attention que la première fournée

étoit composée , en très-grande partie , de pains longs de 4 livres , qui présentant plus de surface que les pains ronds du même poids , avoient donné lieu à une évaporation plus considérable de l'humidité de la pâte : il est encore plus essentiel d'observer qu'il y avoit dans la seconde fournée cent trente-deux pains d'une livre , vingt de 2 livres , & trois autres pains en forme de couronne , du poids chacun d'une livre 9 onces ou environ , & que cette multiplicité de pains a occasionné beaucoup de déchet au four ; il s'est trouvé tel , qu'il a fallu que les pains ronds de bis-blanc & ceux de farine bise , dont plusieurs étoient de 12 , de 8 & de 4 livres , ayant eu un excédant de poids au-delà de la proportion de 420 livres de pain tirées de 320 livres de farine , pour faire disparaître presque totalement le déchet que les pains longs de 4 livres & sur-tout les petits pains avoient éprouvé ; cet excédant étoit de 11 livres 10 onces , tandis que le déchet alloit à 13 livres 12 onces ; & comme la perte sur ces derniers pains étoit plus forte de 2 livres 2 onces que l'augmentation de poids sur les pains de bis-blanc & de farine bise , il est résulté que dans notre expérience nous n'avons pas obtenu tout-à-fait le produit favorable qu'indique la proportion de 320 livres de farine pour 420 livres de pain.

La quantité d'eau que nous avons employée pour cette seconde expérience , montoit à 415 livres 10 onces , en y comprenant 7 livres 2 onces que les 20 livres de levain de chef avoient absorbées ; la moitié de cette quantité d'eau est de 207 livres 13 onces ; le total des farines dont nous avons fait usage , y compris 12 livres 14 onces contenues dans les 20 livres de levain de chef , alloit à 672 livres 14 onces , lesquelles ont produit 881 livres de pain , c'est-à-dire , 208 livres 2 onces au-delà du poids total des farines ; cet excédant du produit en pain est , à cinq onces près , la moitié de l'eau qui est entrée dans toute la pâte : cette partie considérable d'eau , mêlée d'abord avec la farine , & combinée ensuite avec elle au four , lorsque celle-ci s'est convertie en pain , a passé au même état ; elle le conserve toujours ; &

si après un certain temps elle a plus éprouvé de diminution que les molécules propres de la farine, elle se soutient en très-grande partie dans l'état de combinaison auquel on l'a fait passer; & cette eau qui alors paroît avoir perdu son caractère distinctif, ne se dissipe enfin que par le dépérissement total du pain.

Si, comme nous l'avons insinué dans le détail de la première expérience de boulangerie, il y a un point à saisir dans la cuisson du pain, celui de ne lui laisser perdre au four que la moitié de l'eau que la pâte contenoit, nous aurons presque atteint à ce but dans la seconde expérience; mais nous n'y serons parvenus qu'après avoir été avertis par la première opération, des ménagemens qu'exige la conduite du four, & après y avoir éprouvé un déchet de 20 livres de pain, par un séjour trop long de quelques minutes que le pain fit dans le four, sur-tout à la première fournée où il y eut plus du double de perte sur les soixante-douze pains longs de quatre livres, que sur tous ceux des deux autres fournées.

Lorsque nous disons que la cuisson du pain est à un degré convenable quand elle ne lui a fait perdre que la moitié de l'eau ou environ que la pâte contenoit, nous supposons qu'on a employé des farines sèches, d'une bonne qualité, qui boivent l'eau promptement, & qui ne tardent pas à prendre de la consistance dès que la pâte devenue égale, a été battue par parties, & rassemblée ensuite en une seule masse: il seroit difficile en effet d'adopter cette règle pour les farines qui auroient contracté de l'humidité & seroient imparfaites à d'autres égards; elles pourroient même, par ces défauts, se rapprocher en quelque sorte de l'état des farines bisées qui, à cause d'une portion de son qui s'y trouve toujours mêlée, retiennent l'eau avec assez de ténacité lorsqu'elles sont converties en pâte, & demandent à rester assez long-temps dans le four pour y parvenir au degré de cuisson qu'exige le pain bis.

Après avoir rendu compte à l'Académie, dans la première

partie de ce Mémoire, de nos expériences sur la mouture des grains; après lui avoir exposé, dans la seconde, les détails relatifs aux opérations de la boulangerie, il ne nous reste, dans la troisième partie, qu'à établir le prix du pain, sans y comprendre d'abord les frais qu'il exige; à le fixer sur la valeur du blé & des produits de différentes qualités que nous avons obtenus; à y attacher ensuite ce qui est dû au boulanger, tant pour la dépense à laquelle il est tenu, que pour le bénéfice qu'il doit raisonnablement espérer; à rapprocher la valeur totale du pain, de celle qu'il a actuellement à Rochefort, en considérant le prix des grains que l'on consomme dans cette Ville, la mesure d'après laquelle on s'y règle, la valeur des farines qu'on est dans l'usage d'y vendre, la quantité de livres de pain qu'on y retire d'une quantité déterminée de farine, la taxe qui s'y trouve établie, la base du tarif qu'on paroît y suivre; & en faisant enfin quelques observations, tant sur le tarif particulier de la Rochelle, dont les boulangers de Rochefort demandent l'exécution, que sur celui de cette dernière ville, fait en 1709, contre lequel réclament ces mêmes boulangers.

TROISIÈME PARTIE.

ON a vu que les six setiers de beau froment de 1781, ont produit par la mouture à la grosse 1071 livres de farine de différentes qualités; on se rappelle que de cette quantité de farine nous en avons pris 660 livres pour la première opération de boulangerie, c'est-à-dire, 310 livres de fleur de farine, 130 livres de bis-lanc, & 220 livres de farine bise; elles n'ont rendu en total que 861 livres de pain, malgré l'excédant qu'on auroit dû y remarquer par l'addition des levains; d'après ces produits, les 1071 livres de farine, si nous les eussions employées entièrement, en y ajoutant une quantité de levain proportionnée à celle que les 660 livres de farine ont reçue, n'auroient donné que 1397 livres 3 onces de pain ou environ; mais afin de nous moins éloigner

du produit plus avantageux que nous avons tiré, toute proportion gardée, de la seconde opération en boulangerie, on peut porter celui-ci à 1400 livres de pain, & on verra bientôt quelle est la raison qui nous engage, dans ce moment-ci, à nous arrêter à cette quantité précise de pain que nous supposons tirée des 1071 livres de farine.

Il seroit résulté de l'emploi total de ces farines que nous aurions obtenu

des 701 livres 8 onces de fleur de farine..	916	$\frac{1064}{1071}$	de pain.
des 136.... 8.... de bis-blanc.....	178	$\frac{462}{1071}$	
des 233.... ".... de farine bise.....	304	$\frac{616}{1071}$	
<u>1071.... "</u>	<u>1400.</u>		

Le froment de 1781, qui a fait la matière d'une de nos expériences, a été acheté à Essonne, bourg situé près Corbeil, & à six lieues de distance de Paris; nous l'avons payé sur les lieux 24^l 5^f par setier pesant 242 livres; nous nous contenterons de supposer que le setier de ce blé, rendu à Paris, ne seroit revenu qu'à 24^l 10^f, parce qu'il est à présumer qu'un boulanger de Paris qui auroit fait l'achat de ce même blé pour son commerce, l'auroit obtenu à un prix un peu au-dessous de celui que nous en avons donné, & auroit trouvé dans les 24^l 10^f par setier, le montant des frais de transport auxquels il auroit été tenu.

Dès-lors les six setiers de froment de la première qualité, qui ont donné 1071 livres de farine, ont coûté en total 147^l, & les 1400 livres de pain que nous en avons retirées sont revenues chacune à 2^f 1^d $\frac{1}{5}$, sans y comprendre encore les frais de main-d'œuvre & le bénéfice du boulanger, de manière que sans avoir égard pour ce moment-ci à ces frais & à la qualité du pain,

Les 917 livres de pain blanc ont coûté..	96 ^l	5 ^f	8 ^d $\frac{2}{5}$.
Les 178.... de bis-blanc.....	18.	13.	9 $\frac{3}{5}$.
Et les 305.... de pain bis.....	32.	"	6.
<u>1400.</u>	<u>147.</u>	<u>"</u>	<u>"</u>

Les boulangers de Rochefort achètent communément leurs blés à Marans, ville qui en est éloignée de huit à neuf lieues, & où il se fait un commerce considérable en grains & en farines. Le prix du froment, suivant les certificats en forme qui ont été tirés de Marans, est aujourd'hui de 5^l par boisseau de cette même ville; il contient en froment d'une bonne qualité, 51 à 53 livres; nous supposons qu'il en contient 51 livres $\frac{7}{8}$, & dans ce cas, nous verrons que 28 boisseaux de Marans répondent à 6 setiers de Paris.

La charge de farine nommée *fin minot*, & qui est composée de deux sacs du poids chacun de 230 livres, vaut à Marans, suivant les mêmes certificats, 38 à 39^l, & par un prix moyen, 38^l 10^s.

Les boulangers de Rochefort assurent qu'il leur en coûte 1^l 13^s, tant pour quelques frais indispensables que pour le transport d'une charge de farine de Marans à Rochefort, ce qui fait monter le prix de ces 260 livres de farine, avant que d'être employées, à 40^l 3^s.

Il y a également des frais proportionnels à faire pour le transport des blés qu'ils achètent à Marans; ces frais, en les supposant de 5^s par boisseau, iroient à 7^l pour les 28 boisseaux, & seroient à peu-près pareils à ceux qu'occasionne le transport de quatre charges un huitième ou environ de farine, lesquelles répondent en total au produit en farine qu'on peut tirer de 28 boisseaux de froment.

Ces 28 boisseaux de froment, d'une bonne qualité, valant chacun 5^l 5^s, y compris les frais de transport, auront donc coûté, rendus à Rochefort, 147^l; ils produiront 1071 livres de farine, dont on tirera, en corrigeant le Tarif de 1700, 1400 livres de pain, comme des 6 setiers de Paris, & la livre de pain coûtera intrinséquement 2^s 1^d $\frac{1}{5}$.

Quatre charges de farine prises à Marans, & auxquelles on ajoutera 31 livres de farine de la même qualité, pour établir une comparaison exacte, coûteront, sur le pied de 40^l 3^s la charge, la somme de 165^l 7^s 7^d: elles contiendront, comme les 6 setiers de Paris & les 28 boisseaux de Marans,

1071 livres de farine, & donneront 1400 livres de pain, si on abandonne sur ce point particulier le Tarif de 1700. Mais la livre de pain sortie de ces farines de *fin minot*, sera intrinséquement plus chère que celle dont on vient de déterminer le prix, comme sortie des farines blanches & bisés: cette livre de pain tirée indistinctement du *fin minot*, ira à 28 deniers $\frac{1}{3}$.

Il est essentiel d'observer que le prix de la livre de pain tirée du *fin minot*, ayant été une fois fixé, ce prix sera toujours le même pour toutes les livres de pain que fournira le *fin minot*, comme farine de la première qualité, & absolument égale dans le produit en pain que rendra la totalité de deux ou de plusieurs sacs.

Mais il n'en sera pas ainsi du prix de la livre de pain qu'on établira d'après la valeur du froment en nature, & duquel il sort des farines de différentes qualités.

Nous avons commencé d'abord, il est vrai, par fixer le prix de la livre de pain, relativement à une quantité déterminée de farine, & en la regardant pour un moment comme parfaitement égale en qualité, & donnant une certaine quantité de livres de pain de la même valeur.

Mais nous la considérerons bientôt comme pouvant être partagée en trois classes pour la qualité, & comme propre par là à fournir trois sortes de pain d'un prix inégal. On verra par cette distribution de la valeur du pain, la quantité de deniers par livre dont on décharge le pain de la seconde qualité, & celui qu'on nomme *bis*, pour rejeter sur le pain blanc l'excédant de valeur qu'avoient les deux autres, & que les gens aisés ne seront pas surpris de supporter, au soulagement du bas peuple, sur la valeur plus forte, mais toujours juste, du pain plus délicat qu'ils consommeront.

C'est cette valeur plus forte qui se trouve attachée à tout le pain tiré de la farine de *fin minot*, & qu'on vient de voir portée à $2^f 4^d \frac{1}{3}$ par livre de pain, sans y comprendre encore les frais de manutention.

Nous avons dit qu'il y avoit un point particulier sur lequel
il

il paroïssoit convenable de s'écarter du tarif de la Rochelle fait en 1700, & de celui de 1703, établi sur le même principe à Rochefort: voici sur quoi porte notre observation. Le tarif de 1700 suppose qu'on ne tire des 260 livres de farine contenues dans la charge ou les deux sacs, que 320 livres de pain, & accorde aux boulangers pour leurs frais 6^l par charge de farine de *fin minot*, & même de *gros minot*, c'est-à-dire $4^{\text{d}}\frac{1}{2}$ par livre de pain, quel que soit le prix des deux sacs de farine; on voit en effet à l'article de ce tarif qui concerne le *fin minot*, que lorsque les deux sacs de cette farine de la première qualité ne coûteront que 10^l, & qu'on aura joint à cette somme celle de 6^l pour les frais de cuisson, la livre de pain sera fixée à 1^l, & qu'elle sera réglée sur le pied de 3^l lorsque le prix des deux sacs sera monté à 48^l, y compris les 6^l pour les frais de main-d'œuvre: il est évident que 320^l sont équivalens aux 10^l, prix des deux sacs de farine, jointes aux 6^l pour frais & bénéfice, comme trois cents vingt fois trois sous représentent les 48^l dont il vient d'être question.

Et comme d'un autre côté 6 livres contiennent 1440^d, il en résulte que cette dernière quantité divisée par 320 livres de pain, donne aux boulangers quatre deniers & demi par livre de pain: cette explication devenoit nécessaire pour développer le tarif de 1700, & séparer, dans la valeur d'une seule livre de pain, ce qui dépend du prix de la farine d'avec ce qui appartient uniquement aux frais de manipulation.

On tireroit aujourd'hui, d'après le travail courant des boulangers, 340 livres de pain des deux sacs de minot pesant 260 livres, tandis que 320 livres de pain seulement, comme tirées aussi de 260 livres de farine, forment, ainsi qu'on l'a vu, une des bases principales du tarif de 1700, & y servent de point fixe d'où partent tous les calculs: mais on pourroit présumer que ceux qui ont présidé à la confection de ce tarif n'ont compté, en connoissance de cause, que sur le débit de 320 livres de pain, en veillant au poids de

ce même pain, & en laissant une once de plus sur chaque livre, afin que le peuple n'eût pas lieu de se plaindre à l'égard du poids, & que les boulangers n'eussent aucun prétexte pour ne pas tenir le pain dans le poids prescrit : on voit effectivement que 320 onces composent les 20 livres de plus sur lesquelles les boulangers de Paris compteroient, ou à peu-près. On ne sauroit assurer que les auteurs du tarif de 1700 aient eu les vues que nous leur supposons ici, mais il est assez singulier que l'excédant dont nous parlons, établisse une répartition juste d'une once sur chaque livre de pain ; s'il s'agissoit de la mouture des blés, nous ne serions pas surpris que les produits en farine eussent été, en 1700, inférieurs à ceux qu'on retire aujourd'hui, & qu'on obtient en mettant dans cette opération une intelligence dont il paroît qu'on ne se piquoit pas autrefois ; mais il est question de l'emploi des farines de la première qualité, sur lequel il ne doit y avoir que peu de variation, encore dépend-elle moins de la quantité d'eau introduite dans la pâte, & dont le pain doit retenir les $\frac{2}{3}$, que de la conduite du four & de la cuisson de ce même pain.

Si, comme nous sommes fondés à le croire, les boulangers de Rochefort tirent aujourd'hui 340 livres de pain des 260 livres de farine, tant de fin que de gros minot, alors, d'après le tarif de 1700 qui leur accorde six livres de frais de main-d'œuvre pour l'emploi de cette quantité de farine, ils n'auroient que quatre deniers $\frac{4}{17}$ pour chaque livre de pain, au lieu de quatre deniers $\frac{1}{2}$, puisque les six livres ou quatorze cents quarante deniers seroient répartis sur 340 livres de pain, au lieu de 320 livres.

Nous n'avons insisté sur le tarif de la Rochelle, fait en 1700, lequel cadre avec celui de Rochefort adopté en 1703, & auquel on a dérogé en 1709 dans cette dernière ville, que parce qu'il en est question particulièrement dans la contestation soumise à la décision du Parlement ; parce qu'il est comme le pivot sur lequel roule la difficulté ; &

aussi par la raison essentielle que ce tarif présente une base fixe pour asseoir la taxe du pain.

On jugera même de l'utilité dont il étoit de le bien connaître & de s'en écarter sur un des points essentiels, en voyant que d'après ce tarif nous n'aurions compté que sur 1318 livres $\frac{2}{3}$ de pain, pour les 1071 livres de farine que les 1452 de blé ont rendues, au lieu de 1400 livres de pain que nous admettons comme sorties de cette même quantité de farine, & donnant par conséquent 81 livres $\frac{1}{3}$ de pain au-delà de la quantité qui auroit été indiquée par ce tarif, suivant la proportion de 260 livres de farine pour 320 livres de pain : & on sent d'ailleurs que par cette augmentation sur le produit en pain, la valeur intrinsèque de chaque livre ne se trouve que de deux sous un denier $\frac{1}{5}$, tandis qu'elle seroit de près de vingt-sept deniers s'il ne falloit compter pour 1071 livres de farine, que sur 1318 de pain.

Nous avons dit que la valeur intrinsèque des 1400 livres de pain étoit de 147^l 11^s 10^d

Si on ajoute à cette somme le montant entier

des frais sur le pied de 4^d $\frac{1}{4}$ par livre, il

sera de 24. 15. 10.

& on aura pour le total de la valeur du pain. . 171. 15. 10.

Chaque livre de pain considérée sans aucune distinction pour la qualité, reviendra donc à 2^l 5^d $\frac{2}{50}$.

Mais il faut avoir égard actuellement aux trois sortes de pain qui doivent résulter des farines de trois qualités différentes que nous avons obtenues des six setiers de froment, mesure de Paris, ou qu'on peut retirer de 28 boisseaux de blé pareil, à la mesure de Marans.

On peut se rappeler que des 1400 livres de pain tirées des 1071 livres de farine, il y en avoit 917 livres de la première qualité, 178 livres de la seconde, que nous avons désignées sous le nom de *bis-blanc*, & 305 livres qui sont de la dernière qualité, connue sous le nom de *pain bis*. Suivant

les affiches publiques de Rochefort que nous avons sous les yeux, & où la livre des trois sortes de pain qu'on est dans l'usage d'y débiter, se trouve taxée régulièrement, on y voit qu'elle roule sur les trois prix que voici: la livre de pain de la première qualité ou de *fin minot* est portée à $2^f 7^d$; celle de la seconde qualité ou de *froment à sa fleur* est fixée à $2^f 2^d$, & enfin celle de pain bis ou de *meture* n'est mise qu'à $1^f 5^d$. La contestation qui s'est élevée à Rochefort étant principalement l'objet de notre travail, nous conserverons, dans la détermination du prix de la livre des trois sortes de pain, la taxe qui s'y trouve établie dans ce moment-ci pour le prix du pain des deux dernières qualités, sauf à rejeter sur la valeur du pain de la première ce qui sera retranché sur celle du pain des deux qualités inférieures.

Les 305 livres de pain bis qui font partie des 1400 livres, & dont nous venons de parler, avoient été considérées dans le premier moment & par un calcul fait sans aucune distinction pour la qualité du pain, comme valant chacune $2^f 5^d \frac{9}{20}$: mais il faut actuellement que chaque livre de ce pain bis soit réduite à $1^f 5^d$, & déchargée en conséquence de $1^f \frac{9}{20}$; dès-lors les 305 livres de pain bis ne vaudront plus en total que $21^l 12^f 1^d$

Les 178 livres de bis-blanc portées d'abord comme toutes les autres à $2^f 5^d \frac{9}{20}$ chacune, étant réduites à $2^f 2^d$, se trouveront déchargées chacune par conséquent de $3^d \frac{9}{20}$, & leur prix total ne sera plus que de $19. 5. 8.$

Le prix entier de 1400 livres de pain, en y comprenant les frais de main-d'œuvre, a été porté, comme on a vu, à $171^l 15^f 10^d$; il faut donc que les 917 livres de pain de la première qualité, qui n'avoient été estimées d'abord que sur le pied de $2^f 5^d \frac{9}{20}$, le soient sur le pied de $2^f 10^d \frac{1}{4}$ ou environ, pour couvrir les diminutions qui ont été faites sur le pain des deux qualités inférieures,

 $40. 17. 9.$

<i>ci-contre</i>	40 ^l 17 ^f 9 ^d	
& valient en total	130. 18. 1.	
	<u>171^l 15^f 10^d</u>	

Nous aurons lieu de revenir sur ce prix de 2^f 10^d $\frac{1}{4}$ pour la livre de pain de la première qualité, qui se trouve ainsi déterminée par l'augmentation qu'elle supporte en conséquence du plus ou moins de diminution que l'on fait sur la valeur du pain d'une qualité inférieure.

Les 673 livres de farines différentes, y compris celle des levains que nous avons employées dans le second essai en boulangerie, ont donné, comme on a vu, 881 livres de pain : d'après ce produit assez avantageux, nous en aurions obtenu 1305 livres si nous eussions fait usage des 997 livres de farines différentes qui sont sorties des 6 setiers de blé de 1782 par la mouture à la grosse, & que nous avons distinguées par leur qualité :

Les 685 livres de fleur de farine auroient

donné en effet 897 livres de pain.

Les 162 de bis-blanc en auroient rendu 212.

Et des 150 de farine bise, on en auroit tiré 196.

997.

1305.

La valeur de ces 6 setiers de blé rendus à Paris, seroit de 135^l, sur le pied de 22^l 10^f le setier, & le prix de chaque livre de pain, non compris les frais de main-d'œuvre, iroit à 24^d $\frac{4}{5}$, ou environ : si on joint 23^l 2^f 2^d, qui forment la totalité des frais de cuisson pour ces 1305 livres de pain, au prix des six setiers de froment, la somme de 135^l se trouvera portée à 158^l 2^f 2^d, & le prix de la livre de pain, sans distinction de qualité, montera à 2^f 5^d $\frac{1}{20}$, & un peu plus : le calcul que nous faisons ici peut être appliqué sur le champ à 28 boisseaux de froment médiocre, tel que celui de 1782 qu'on auroit pris à Marans, sur le pied de 4^l 11^f 5^d $\frac{1}{2}$ le boisseau, & qu'on seroit transporter à Rochefort, en payant pour ces frais 5^f par boisseau ; alors ces 28 boisseaux reviendroient à 135^l comme les 6 setiers de Paris, &

coûteroient 12^l de moins sur la totalité, que 28 autres boisseaux de froment d'une bonne qualité, comme les 6 setiers de froment médiocre, ont coûté 12^l de moins que 6 autres setiers de beau froment, tel que celui de 1781 ; ainsi ce qui nous reste de calculs à exposer pour la taxe des 1305 livres de pain obtenues des 6 setiers de blé médiocre, sera entièrement applicable aux 28 boisseaux de blé pareil pris à Marans, & conduira à un résultat commun.

On a vu plus haut que dans ces 1305 livres de pain, il y en avoit 897 livres qui provenoient de la fleur de farine, 212 livres de la farine de bis-blanc, & 196 livres de la farine bisé : on a observé encore que chacune de ces livres de pain prise en général & sans aucun égard à sa qualité, valoit 2^f 5^d $\frac{1}{20}$. Il n'est donc plus question que de suivre la marche que nous avons déjà tenue, de décharger les deux dernières sortes de pain de l'excédant de valeur qu'on y remarque, pour le faire retomber sur la totalité des pains de la première qualité, de réduire la livre de bis-blanc à 2^f 2^d, & celle de pain bis à 1^f 5^d ; alors les 212 livres de bis-blanc à 2^f 2^d, ne vaudront plus que 22^l 19^f 4^d
& les 196 livres de pain bis à 1^f 5^d, ne vaudront plus que 13. 17. 8.

36. 17. "

Si du prix du blé joint aux frais de main-d'œuvre, lequel monte à 158^l 2^f 2^d, on déduit ces 36^l 17^f, il restera 121. 5. 2.

158. 2. 2.

Et on verra que les 897 livres de pain de la première qualité vaudront réellement cette somme de 121^l 5^f 2^d, sur le pied de 2^f 8^d $\frac{9}{20}$, ou à très-peu de chose près, la livre. La quantité de deniers en effet dont on aura déchargé le prix des pains des deux dernières qualités, est de 3008^d $\frac{8}{20}$. cette quantité de deniers étant répartie sur les 897 livres de

pain de la première qualité, forme une augmentation sur chacune d'elles, de 3 deniers $\frac{8}{20}$ ou environ, & fait monter par conséquent, comme nous venons de le dire, le prix de la livre du plus beau pain, tous frais faits, à 2^f 8^d $\frac{2}{20}$.

On peut se rappeler que dans le compte que nous avons rendu de la première expérience en boulangerie, pour alléger la taxe du pain, nous avons dit que quatre charges de farine de *fin minot*, auxquelles on ajouteroit 31 livres de farine de la même qualité, qui seroient achetées à Marans & transportées à Rochefort, reviendroient au prix de 165^l 7^f 7^d; que leur poids total seroit de 1071 livres, & qu'elles donneroient 1400 livres de pain, toutes de la première qualité, dont le prix intrinsèque, pour chaque livre seroit de 28^d $\frac{1}{3}$; si on ajoute actuellement 4^d $\frac{1}{4}$ pour les frais de main-d'œuvre à ce prix de la livre de pain tirée du *fin minot*, elle montera à 32^d $\frac{7}{12}$, c'est-à-dire qu'elle se trouvera au même prix à peu-près que la livre de pain de la première qualité que nous venons de voir portée à 32^d $\frac{2}{20}$, comme sortie des 897 livres de pain dont le prix a reçu une augmentation par un rejet de 3^d $\frac{8}{20}$ sur chacune de ces 897 livres; augmentation qui n'a eu lieu, comme on l'a observé, que parce qu'on a réduit le pain bis-blanc à 2^f 2^d la livre, & le pain bis à 1^f 5^d.

On voit donc ici que la livre de pain que nous avons tirée des plus belles farines du blé de 1782, par le moyen de la mouture à la grosse, & qui se trouve portée à un prix assez haut à la décharge des deux sortes de pain d'une qualité inférieure, on voit qu'elle peut être assimilée, & pour le prix & pour la qualité, à une autre livre de pain tirée de la farine de *fin minot*, telle qu'on l'achette en sacs à Marans; qu'on n'a pas besoin, à la rigueur, de prendre pour base de la taxe du pain, comme on fait à Rochefort, la valeur de cette farine de *fin minot*; qu'il ne s'agit, comme dans nos expériences, que de connoître le prix du blé, la quantité de livres qu'en contient la mesure dont on se sert, le produit en farines différentes qu'on obtient

de ce blé, la quantité de pain qu'elles rendent, les frais de main-d'œuvre que les lieux & la vente plus ou moins considérable peuvent exiger, les sortes de pain dont le débit est en usage; qu'il n'est question enfin, avec ces connoissances préliminaires, que de régler le prix du pain avec toute l'équité qu'exigent les avances du boulanger & le bénéfice honnête qui lui est dû, en faisant retomber sur le pain le plus délicat ce qu'on retranche au prix de celui que le peuple consomme.

Qu'on suppose, par exemple, que le boisseau de quelque ville de Province contienne 40 livres de froment d'une bonne qualité, & vaille $4^1 3^s 4^d$; si on fait un essai sur 14 de ces boisseaux qui pèleront en total 560 livres, & auront coûté $58^1 6^s 8^d$, on pourra en tirer, par une mouture bien conduite, 420 livres de farines différentes, & 551 livres de pain ou environ, par une opération de boulangerie où aucun des soins qu'elle demande n'aura été négligé.

Dans cette quantité de pain il y en aura d'abord 420 livres de la première qualité, & 131 livres de la seconde, si on se borne à ne faire du pain que de deux sortes, afin que celui-ci qui sera bien inférieur au premier, soit au moins meilleur que le pain bis; ou si l'usage du pays est de faire du pain de trois qualités différentes, on aura toujours les 420 livres de pain blanc, on pourra en supposer 61 livres de bis-blanc & 70 livres en bis proprement dit.

Le montant des frais de main-d'œuvre pour ces 551 livres de pain ira, sur le pied de $4^d \frac{1}{4}$, à $9^1 15^s 2^d$, cette somme jointe à celle de $58^1 6^s 8^d$, qui est le prix des 14 boisseaux de blé, donnera un total de $68^1 1^s 10^d$, & chacune des 551¹ de pain estimée sans aucun égard à sa qualité, reviendra à $2^s 5^d \frac{363}{551}$.

Mais il faut faire rentrer les parties différentes de cette quantité de pain dans les prix qui leur conviennent, & décharger les unes de l'excédant de valeur qui s'y trouvoit attaché par un premier calcul, pour l'appliquer à une autre partie qui étoit au-dessous de son juste prix.

Nous

Nous commencerons par supposer qu'on tirera trois sortes de pain des 420 livres de farine obtenues des 14 boisseaux de blé; qu'il y en aura 61 livres en pain nommé *bis-blanc*, 70 livres en pain bis, & le reste en pain de la première qualité: les 61 livres mises à 2^r 2^d la livre, comme nous l'avons déjà fait pour du pain de cette même qualité, vaudront en total & en y comprenant les frais, 6^l 12^s 2^d. Et les 70 livres de pain bis réglées sur le pied de 1^r 6^d la livre, vaudront..... 5. 5. "

11. 17. 2.

Il faudra donc que les 420 livres de pain blanc dont il reste à établir le prix, vailent, 56. 4 8.

Pour compléter le total du prix du blé & des frais de main-d'œuvre montant à..... 68. 1. 10.

Et on verra qu'en portant chacune des 420 livres de pain blanc à 2^r 8^d $\frac{1}{8}$, ou à très-peu-près, on composera cette somme de 56^l 4^s 8^d; on aura fixé pour les trois sortes de pain des valeurs convenables & proportionnées, autant qu'il est possible, à la qualité des farines qu'on aura employées.

Dans le cas où l'on se borneroit à ne tirer de ces 420 livres de farine que deux sortes de pain, alors les 131 livres tant de pain bis-blanc que de pain bis, n'en composeroient, en même quantité, que d'une seule sorte; & chaque livre de ce pain, qui, pour la qualité, tiendrait le milieu entre le bis-blanc & le bis proprement dit, vaudroit 1^r 9^d $\frac{3}{4}$.

On a observé sans doute que par le calcul que nous venons de présenter, nous avons soustrait du prix de chacune des 61 livres de pain bis-blanc 3^d $\frac{363}{551}$, & 11^d $\frac{363}{551}$ des 70^l de pain bis; d'où il est résulté un total de 1040 deniers ou à peu-près, qui, repartis sur les 420 livres de pain blanc, ont produit sur chacune d'elles une augmentation de 2^d $\frac{1}{2}$ ou environ.

C'est ainsi qu'après avoir établi la valeur totale d'une

quantité déterminée de livres de pain, après en avoir fait sur chaque livre une répartition exacte, on réduit ensuite à un prix très-juste & favorable au peuple, le pain dont il se nourrit, & on réserve toujours la totalité du pain le plus délicat pour y accumuler jusqu'à un certain point, & suivant les circonstances, l'excédant de valeur dont les deux sortes de pain d'une qualité inférieure ont été déchargées, & l'ont été par une estimation bien exacte du prix des farines, ou au moins par des vues louables auxquelles un citoyen dans l'aisance, & sensible aux besoins du peuple, ne refusera jamais de se prêter.

Il semble qu'en suivant une pareille marche pour asséoir la taxe du pain, il seroit possible de la régler d'une manière assez constante, d'écarter tout arbitraire dans cette opération essentielle, & d'en rendre les principes si évidens, que ni le public qui se plaint quelquefois parce qu'il n'est pas assez instruit à ce sujet, ni les boulangers toujours instruits, mais toujours enclins à demander quelque augmentation, ne pourroient pas ignorer les bases sur lesquelles on auroit établi la taxe, & ne réclameraient tout au plus que contre quelqu'une de ces bases, telle, par exemple, que la valeur du blé pour le moment, mais qui bientôt, à l'inspection du prix des grains inscrit avec soin les jours de marchés, ou seroient écoutés favorablement dans leurs représentations, ou verroient avec évidence qu'ils les ont faites sans fondement.

On a sans doute remarqué dans le détail de la première expérience en boulangerie, que chacune des 917 livres de pain de la première qualité, qui faisoient partie des 1400 livres relatives à cette même expérience, revenoit, tous frais faits, à $2^f 10^d \frac{4}{20}$. Pendant que chacune des 897 livres de pain d'une qualité pareille, & qui faisoient partie aussi des 1305 livres relatives à la seconde expérience, ne valoit que 2. 8. $\frac{2}{10}$, & que par conséquent il se trouvoit une différence de $1^d \frac{15}{20}$ dans le prix de ces deux livres de pain, quoique pareille pour la qualité.

// 1. $\frac{15}{20}$.

Mais il faut faire attention d'abord que le produit en pain, dans la première expérience, a été moins avantageux, toute proportion gardée, par un peu trop de cuisson, que dans la seconde.

Il faut se rappeler ensuite que le prix intrinsèque de chacune des 1400 livres de pain de différente qualité, relatives à la première expérience, est monté à 2^l 1^d $\frac{4}{20}$, au lieu que la valeur intrinsèque de chacune des livres de pain qui sortoient des 1305 livres obtenues dans la deuxième expérience, n'a été qu'à 2. " $\frac{16}{20}$, c'est-à-dire, à $\frac{8}{20}$ de denier de moins. " " $\frac{8}{20}$.

Il est encore nécessaire d'observer qu'il y a eu plus de pain bis, toute proportion gardée, dans les 1400 livres relatives à la première expérience, qu'il ne s'en est trouvé dans les 1305 livres du second essai; que cette plus grande quantité de pain inférieur, & réduit à un bas prix, a occasionné un rejet sur le pain blanc de la première expérience de 1^d $\frac{7}{20}$ plus fort par livre qu'il ne l'a été sur le pain blanc du second essai, & que cet excédant de 1^d $\frac{7}{20}$, joint aux $\frac{8}{20}$ établis plus haut, ont formé les 1^d $\frac{15}{20}$ dont la livre de pain blanc de la première expérience se trouve plus chargée que celle du pain absolument pareil que nous avons obtenue dans le second essai: cette explication nous a paru d'autant plus nécessaire qu'on ne faisoit pas d'abord la raison d'une différence sur le prix du pain blanc sorti de nos essais, qui est le même absolument quant à la qualité qui appartient aux farines du même ordre, & auquel il sembleroit dès-lors qu'on auroit dû attacher une valeur égale.

Il résulte de tous les détails que nous venons d'exposer, 1.^o que les 6 setiers de beau froment de 1781, pesant ensemble 1452 livres, ont donné en toutes farines par la mouture économique, 1096 livres, c'est-à-dire 7 livres au-delà des trois quarts de la quantité de blé employée; les trois quarts, en effet, n'auroient été qu'à 1089 livres; chaque

setier a donc rendu $1\frac{1}{6}$ de plus en farine qu'il n'y en auroit eu sur le pied des trois quarts.

Il résulte en second lieu que les six setiers de blé médiocre de 1782, pesant ensemble 1375 livres 12 onces, n'ont donné par la même mouture que 1014 livres de farine, c'est-à-dire 17 livres 13 onces de moins qu'on n'en auroit tiré, sur le pied des trois quarts du blé employé, puisque ces trois quarts de produit en toutes farines auroient été à 1031 livres 13 onces.

Troisièmement, que par la mouture à la grosse, six autres setiers du même blé de 1781, pesant également 1452 livres, n'ont donné en toutes farines que 1071 livres, c'est-à-dire 18 livres de moins qu'on n'en auroit retiré sur le pied des trois quarts de la quantité de blé employée, puisqu'on vient de voir que ces trois quarts alloient à 1089 livres.

Quatrièmement, que six setiers de blé médiocre de 1782, pesant ensemble 1375 livres 12 onces, n'ont rendu par la même mouture à la grosse que 997 livres en toutes farines, c'est-à-dire 34 livres 13 onces de moins qu'on n'en auroit retiré, sur le pied des trois quarts de la quantité de blé employée, puisque ces trois quarts auroient été, comme on a vu plus haut, de 1031 livres 13 onces.

Dès-lors on remarque d'abord que la mouture économique a un avantage sensible & soutenu sur la mouture à la grosse, tant pour le produit en farines, que pour la distinction de leurs qualités différentes, & une séparation plus exacte du son, dans la fleur de farine & dans le premier gruau; & cet avantage auroit été plus marqué sans doute, si nous n'eussions pas été attentifs à tirer de la mouture à la grosse tout le parti qu'il est possible d'en espérer, en conservant toujours aux trois sortes de farine qu'elle peut donner, leurs qualités particulières & le degré de blancheur qui les distingue.

On voit ensuite qu'une quantité déterminée de livres de blé médiocre & imparfait à quelques égards, n'offre pas la même ressource pour le produit en farine, qu'une quantité pareille de livres de blé d'élite & bien nourri, tel que celui

de 1781 que nous avons employé: on a observé en effet, que les 1375 livres 12 onces de blé médiocre de 1782, n'ont donné, en toutes farines, par la mouture économique, que 1014 livres, tandis qu'une même quantité de blé d'une bonne qualité, tel que celui de 1781, en auroit rendu par la même mouture, & sur le pied des trois quarts en farine, la quantité de 1031 livres 13 onces, & même cinq ou six livres au-delà, par proportion à la quantité de 1096 livres de farine que nous avons obtenues par la même mouture économique, des 1452 livres de blé choisi de 1781.

L'observation que nous venons de faire a lieu encore sur les produits de la mouture à la grosse; il est vrai que par cette mouture les 1452 livres de beau blé n'ont rendu que 1071 livres de farine, c'est-à-dire 18 livres de moins qu'elles n'en auroient rendu sur le pied des trois quarts en farine de cette quantité de blé; mais les 1375 livres 12 onces de blé médiocre n'ont donné par cette même mouture, que 997 livres de farine, c'est-à-dire 34 livres 13 onces de moins qu'on n'en auroit tiré sur le pied également des trois quarts en farine, de la quantité des grains employés.

On voit par cette observation à laquelle les deux méthodes de moudre les grains ont donné lieu, que le moins de pesanteur qu'on remarque dans une mesure quelconque de blé, tombe plutôt sur les parties farineuses du grain que sur son écorce qui peut se trouver à peu-près la même dans du froment médiocre que dans d'autre de la meilleure qualité; qui doit même être plus multipliée, à raison d'une plus grande quantité de grains dans 240 livres du premier, par exemple, que dans 240 livres du second; tandis qu'il est certain que celui-ci, le blé de la meilleure qualité, tire son augmentation de poids d'une plus grande abondance en parties farineuses, & semble devoir rendre moins de son dans la mouture que celui où la farine est en moindre quantité; & cela prouve par des faits, comme nous l'avons déjà dit, qu'en général dans l'achat des grains, ceux qui sont de la meilleure qualité, & par conséquent plus chers,

dédommagent communément, par leur produit en belles farines, du prix plus fort qu'on en a donné, & procurent plus de bénéfice par la qualité du pain & sa quantité, qu'il n'en seroit résulté de grains médiocres & achetés moins cher.

Si on veut avoir le produit réuni, tant des six setiers du blé de 1781, que des six autres de 1782, on verra que ces deux quantités montent ensemble à 2827 livres 12 onces de blé d'une qualité moyenne; qu'elles n'ont donné que 2110 livres de farine par la mouture économique, c'est-à-dire, 10 livres 13 onces au-dessous des trois quarts de la quantité de blé employée. On observera encore que d'une même quantité de blé pareil, il n'est résulté, par la mouture à la grosse, que 2068 livres de farine, c'est-à-dire, 52 livres 13 onces de moins qu'il n'y en auroit eu par le produit des trois quarts du blé mis en expérience.

On remarquera en même-temps que si on eût converti en pain les 2110 livres de farine obtenues par la mouture économique, & que l'augmentation de poids se fût trouvée au sortir du four qu'on auroit bien conduit, de $\frac{5}{16}$ au-delà de la quantité de farine, on auroit eu 2769 livres 6 onces de pain; au lieu que les 2068 livres de farine sortie de la mouture à la grosse, n'auroient donné en pain, d'après nos deux expériences, que 2705 livres; c'est-à-dire, 9 livres 4 onces au-dessous de la quantité qu'on en auroit tirée sur le pied de l'augmentation de $\frac{5}{16}$ sur la farine employée.

Tous ces détails nous ont paru nécessaires pour juger à peu-près des produits auxquels on doit s'attendre dans un travail courant, soit relativement à la qualité des blés qu'on emploie, à la méthode de moudre les grains qu'on adopte, & à la quantité de farines différentes qu'on en retire; soit à l'égard du produit en pain qu'on peut espérer de l'emploi de ces farines, des variations qu'on remarque dans ce produit, par des causes qu'il est difficile d'écarter; soit enfin à l'égard du prix qu'on doit assigner au pain, en considérant tous ces points réunis, & en adoptant une base pour la taxe qui ne soit prise, ni dans des opérations parfaites dans les

deux arts de la Meunerie & de la Boulangerie, ni dans des opérations défectueuses jusqu'à un certain point, & qui s'éloignent un peu trop du degré de perfection dont ces deux Arts sont susceptibles.

L'application du résultat de nos expériences, & des observations qui en sont la suite, devant être faite au fond de la contestation qui s'est élevée à Rochefort sur la taxe du pain, & notamment sur l'essai qu'on y a fait en vertu d'un arrêt du Parlement, il convient que nous rapellions ici les tarifs connus depuis long-temps dans cette Ville, & que nous rapprochions les produits de nos expériences, de ceux qu'on a obtenus dans l'essai que le Parlement avoit ordonné.

Nous avons déjà eu occasion de parler du tarif de la Rochelle établi en 1700, qui, sur deux sacs de farine de fin ou gros minot, accorde 6^l aux boulangers pour les frais de main-d'œuvre, c'est-à-dire, 4 deniers $\frac{1}{2}$ par livre de pain, parce qu'il est supposé par ce tarif, qu'on ne tire des 260 livres de farine que 320 livres de pain, au lieu de 340 livres qu'il est possible d'en obtenir; c'est ce tarif dont les boulangers de Rochefort demandent l'exécution, & à laquelle paroissent se refuser les Officiers de Police de cette Ville.

Le tarif de 1703, adopté à Rochefort est au fond le même que celui de 1700, établi à la Rochelle, & ne demande aucune observation essentielle qui ne soit commune à tous les deux.

Mais il n'en est pas ainsi du tarif du 5 Avril 1709, qui fut réformé à Rochefort, & qui le fut par le Lieutenant général de Police même qui l'avoit rédigé en 1703.

La sentence de Police où est la clause qui déroge au tarif de 1703, avoit pour objet d'arrêter les abus que commettoient les boulangers dans un temps de disette, soit relativement aux farines d'une mauvaise qualité dont ils faisoient usage, soit à l'égard du poids du pain & de la forme inusitée qu'ils lui donnoient: ce n'est qu'à la suite de ce premier

motif de la sentence qu'il est question de la réforme du tarif du 18 Avril 1703, & que le Magistrat qui l'a rendue, s'exprime dans les termes que voici :

« Et sur les remontrances qui nous ont été faites que le
 » tarif pour la livre de pain de chaque espèce, relativement
 » à celui des farines, étoit trop fort, nous en avons fait faire
 » un calcul nouveau en notre présence, & calculé nous-mêmes
 » à combien elle doit revenir, par lequel on nous a fait re-
 » marquer, & nous avons reconnu par nous-mêmes qu'il y avoit
 » eu de l'erreur de deux deniers par chaque livre qui ont
 » été fixées à trop haut prix, la peine, la dépense & la façon
 » du boulanger préalablement déduites & précomptées ; ainsi
 » en rendant à chacun la justice qui lui est due, & pour l'intérêt
 » public, corrigeant ledit tarif du 18 Avril 1703, Nous
 » ordonnons que la livre de pain de chaque espèce demeurera
 » réduite & modérée à deux deniers au-dessous de ce qui est
 » porté par ledit tarif : faisons défenses aux boulangers & pan-
 » netiers de la vendre au-delà de la présente réduction, sous
 les mêmes peines, &c. »

Nous aurions désiré que le Lieutenant général de Police de Rochefort, qui se crut obligé de réformer, en 1709, son travail de 1703, eût dit un mot sur ce qui avoit occasionné son erreur, & l'avoit conduit à un faux calcul ; l'aveu simple qu'il s'étoit trompé en 1703, quoiqu'il eût donné alors des bases fixes, paroïssoit demander qu'il revînt sur ces bases mêmes, & montrât en quoi elles se trouvoient mal établies : il semble, s'il est permis d'interpréter ici la manière dont ce Magistrat s'exprime, qu'il revient plutôt, dans la sentence de 1709, sur le prix des farines que sur les frais de main-d'œuvre accordés aux boulangers par le tarif de 1703 ; il n'est pas à présumer en effet que par une diminution de 2 deniers par livre de pain, il eût voulu enlever à ces boulangers les $\frac{4}{9}$ des frais de cuisson fixés par ce dernier tarif ; & il y a toute apparence que ce retranchement tomboit sur la valeur intrinsèque du pain qu'il regardoit comme portée trop haut par proportion à celle des grains : mais dans ce cas-là

cas-là même le tarif de 1703 qu'il abandonnoit sans y faire assez d'attention, pouvoit lui servir de base pour afféoir avec équité la taxe du pain, puisque le prix des deux sacs de farine pesant ensemble 260 livres, s'y trouve établi depuis 10¹ jusqu'à 42¹, & la valeur de la livre de pain depuis 1⁶ jusqu'à 3⁶; puisqu'il lui étoit facile, dans la circonstance où il se trouvoit, d'appliquer un des différens prix des farines portés dans ce tarif, à la valeur courante de ces mêmes farines; de donner par-là un appui certain à son règlement sur cet objet de police, quels que fussent les changemens momentanés dont ce règlement pouvoit devenir susceptible par la variation du prix des grains; puisqu'enfin il avoit dans sa main une règle fondée évidemment sur l'équité, & faite autant pour éclairer le public sur la juste valeur du pain, que pour prévenir ou au moins arrêter bientôt, par la plus légère discussion, les plaintes des boulangers.

Quel que soit le motif qui ait déterminé le Magistrat de Rochefort à insérer dans sa sentence du 15 Avril 1709, la disposition par laquelle il affoiblit le tarif raisonné de 1703, il nous paroît naturel de conclure, d'après ses expressions, qu'en estimant les farines sur le pied courant qu'elles ont, & en conservant aux boulangers le prix des frais qu'on a jugé convenable, on peut fixer avec équité la valeur du pain, & rentrer dans les principes même du tarif auquel ce Magistrat avoit dérogé.

La contestation qui s'est élevée à Rochefort au sujet de l'essai que les Juges d'Angoulême ont fait, en vertu d'un arrêt du Parlement, sur le produit tant en farine qu'en pain d'une quantité déterminée de blé, cette contestation a donné lieu à la publication de plusieurs Mémoires, où la matière est discutée amplement & mise à peu-près dans tout son jour. Sur la requête que les Officiers de Police de Rochefort ont présentée pour que l'essai dont il s'agit fût homologué au Parlement, les boulangers de cette Ville y ont formé une opposition; les résultats tirés de cet essai ont été vivement attaqués de leur part; toute l'opération a

été analysée, rapprochée même de celles qui, dans ce genre, sont regardées par les gens de l'Art comme faites avec soin, & donnant tous les avantages auxquels il convient qu'on se borne pour ne pas augmenter les produits aux dépens de leur qualité.

L'Académie nous dispensera sans doute de remettre sous ses yeux des détails qui pouvoient être nécessaires dans le cours de ce procès, à la décision duquel on est attentif dans les Provinces, mais qui deviennent superflus aujourd'hui après les éclaircissémens qui sont sortis du choc de la discussion, qu'on a multipliés à mesure qu'on a produit de part & d'autre des moyens de défense, & qui se sont étendus jusqu'aux erreurs de calcul, lesquelles, il est vrai, ont pu échapper aux intentions les plus droites, mais que les circonstances & le fond même de la contestation, obligeoient de relever.

Nous nous bornerons donc à rappeler ici la quantité de froment qu'on a employée à Rochefort dans l'essai que le Parlement avoit ordonné qu'il y fût fait par les Juges d'Angoulême; la quantité de farine de différentes qualités qu'on a tirée de ce froment, celle du son qui est restée après l'opération de la bluterie, celle des déchets que la mouture des grains a occasionnée, la quantité enfin de livres de pain de qualités différentes qu'on a obtenues de cette expérience, & qui en forment le résultat essentiel.

On comprend sous le nom de *pochée*, tant à la Rochelle qu'à Rochefort, trois boisseaux de blé, mesure de Marans: il a été employé pour l'essai dont il s'agit, neuf pochées de froment ou 27 boisseaux; savoir, 13 boisseaux & demi de blé de 1780, lesquels pesoient ensemble 709 livres 4 onces; & le même nombre de mesures en blé de 1781, dont le poids total étoit de 702 livres; ainsi l'expérience a roulé sur 1411 livres 4 onces de froment d'une très-bonne qualité, puisque le boisseau de Marans qui ne contient ordinairement que 50 à 51 livres de blé, s'est trouvé, dans

cette circonstance-ci, en contenir 52 livres 4 onces 2 gros 26 grains.

Les 13 boisseaux $\frac{1}{2}$ du blé de 1780, ont donné, par la mouture à la grosse, 603 livres 14 onces 4 gros de farines de différentes qualités,

	livres.	onces.	gros.
ci.....	603.	14.	4.
Et les 13 boisseaux $\frac{1}{2}$ de 1781 ont rendu, par la même mouture,.....	598.	"	"
	<hr/>		
	1201.	14.	4.
La quantité de son que le blé de 1780 a produite, étoit de.....	94 ^{liv.}	3 ^{onc.}	} 189. 13. "
celle du son tiré du blé de 1781,			
étoit de.....	95.	10.	
Les déchets n'ont été en total que de.....	19.	8.	4.
	<hr/>		
	1411.	4.	"

Les 1201 livres 14 onces 4 gros de farine ont produit en pain,

	livres.	onces.	gros.
de la première qualité.....	845.	12.	4.
de la seconde.....	441.	10.	"
de la troisième.....	350.	13.	4.
	<hr/>		
	1638.	4.	"

On est étonné sans doute d'un produit si considérable, tant en farines qu'en pain, & on sent tout d'un coup qu'il n'a pu être obtenu, quant aux farines, que parce qu'on y a laissé introduire une grande quantité de menu son; & il paroît, quant au pain, qu'on ne lui a pas laissé prendre au four le degré de cuisson nécessaire, ou que le son qu'il contenoit en abondance, & qui, par sa nature, retient l'eau avec ténacité, a été la cause de l'augmentation de poids sur le pain.

Le travail ordinaire des meilleurs meuniers de Paris, des environs, & même de tout le Royaume; le résultat de nos expériences, soit par la mouture économique, soit par la mouture à la grosse, doivent rendre encore plus frappant le produit qu'on a tiré à Rochefort de 1411 livres 4 onces de froment, quelque supérieur à tout autre en qualité qu'on le suppose, & quoiqu'il n'ait éprouvé qu'une perte médiocre dans l'opération du moulin & dans celle de la bluterie.

On n'auroit tiré à Paris de ces 1411 livres 4 onces de froment, par la mouture économique qui est la plus avantageuse, en farines de différentes qualités, que. 1058^{liv.} 7^{onc.} 4^{gros},
 on auroit eu en gros & menu son... 322. 2. 4.
 & en déchet, d'après ceux de notre
 expérience..... 30. 10. "

1411. 4. "

Si de la quantité de farine obtenue à Rochefort, & qui est de 1201. 14. 4.
 on déduit les 1058. 7. 4.

de farines que la mouture économique auroit donnée à Paris, on aura en excédant de farine, ou plutôt de menu son qu'on y a confondu..... 143. 7. "

Aussi pendant qu'à Paris on auroit eu en gros & menu son, la quantité de.. 322. 2. 4.
 on n'en a trouvé à Rochefort que.... 189. 13. "
 c'est-à-dire la quantité en moins de... 132. 5. 4.

On vient de voir que les déchets par la mouture économique, sur les 1411 livres 4 onces de froment, auroient été à Paris de 30 livres 10 onces, pendant qu'ils n'ont été à Rochefort, comme on l'a observé précédemment, que de 19 livres 8 onces 4 gros : si à la quantité

Ci-contre..... 132^{liv.} 5^{onc.} 4^{gros}

de 132 livres 5 onces 4 gros qu'on
auroit eue à Paris, en excédant de son,
on ajoute les.....

11. 1. 4.

qu'on a eues de moins à Rochefort sur
les déchets par comparaison avec ceux
qu'on auroit éprouvés à Paris, lesquelles
11 livres 1 once 4 gros ont passé en
nature de menu son dans les 1201 livres
14 onces 4 gros portées plus haut,

alors on aura les..... 143. 7. "

d'excédant en farine qui résultent de l'essai fait à Rochefort,
& on reconnoîtra que ce surcroît de produit si éloigné de
celui que tireroient, en pareille circonstance, des meuniers
intelligens, auroit dû rester dans la classe des issues, loin
d'entrer dans l'ordre des dernières farines qu'il n'a pu rendre
plus abondantes qu'en altérant leur qualité.

De ce premier vice qui a eu son origine dans la bluterie ;
il en est résulté nécessairement un second, celui d'une aug-
mentation sur le produit en pain, qui s'est trouvée telle que
non-seulement ce produit a été fort au-delà du poids de la
quantité de froment qu'on a employée dans l'essai, mais même
que ce produit a été beaucoup plus loin que celui sur lequel
les boulangers les plus attentifs pourroient tout au plus
compter en convertissant en pain les 1201 livres 14 onces
4 gros de farine qu'on a obtenues à Rochefort.

On y a tiré des 1201 livres 14 onces 4 gros de farines,
produites par les 1411 livres 4 onces de froment, la quantité
de..... 1638^{liv.} 4^{onc.} de pain.

Les 1058 livres 7 onces 4 gros
de farine seulement qu'on auroit ob-
tenues à Paris de ces mêmes 1411
livres 4 onces de froment, n'auroient
donné en pain sur le pied le plus
favorable, qui est une augmentation
des $\frac{1}{16}$ par l'addition de l'eau, que la

<i>De l'autre part</i>	1638 ^{livres}	4 ^{onces}
quantité de	1389.	4.
la différence est donc de	249.	11

En supposant qu'on eût obtenu à Paris des 1411 livres 4 onces de froment, la quantité considérable de farine que présente l'essai de Rochefort, on n'en auroit tiré en pain, sur le pied également des $\frac{5}{16}$ d'augmentation, fourni par la combinaison de l'eau avec la farine, au lieu de 1638. 4.
que 1577. 8.

Voilà donc au-delà de ces $\frac{5}{16}$ de plus qu'on doit regarder comme le point de perfection pour les boulangers, un surcroît de produit en pain obtenu à Rochefort, qui se trouve de 60. 12.

On aura une nouvelle preuve de ce dernier excédant de produit en pain comme porté au-delà du terme le plus avantageux en fait de boulangerie, lorsqu'on reviendra sur les 143 livres 7 onces de menu son que nous avons dit être passées dans les farines de Rochefort, & qui ont été converties en pain. Ces 143 livres 7 onces de farine grossière & très-bise, n'auroient dû produire une augmentation sur la masse totale du pain & sur le pied des $\frac{5}{16}$ au-delà du poids de la farine, que 188. 4.

Cependant on a remarqué qu'il y a une différence de 249 livres entre le produit plus fort en pain obtenu à Rochefort, & celui qu'on auroit tiré à Paris de la même quantité de froment; il faut donc qu'on ait porté, dans l'essai fait à Rochefort, la quantité de pain à 60. 12.

249. 11.

au-delà des $\frac{5}{16}$ d'augmentation sur la masse totale de la farine, puisque les 1201 livres 14 onces 4 gros adoptées pour un moment comme propres à être totalement converties en pain, n'auroient donné, ainsi que nous l'avons dit, sur le même pied & à la rigueur que 1577 livres 8 onces, c'est-à-dire 60 livres 12 onces de moins qu'on n'en a obtenu à Rochefort.

Quelque frappé que l'on soit de la quantité de farine & de pain que présente l'essai de Rochefort, & de la comparaison que nous en avons faite avec la quantité de produits du même ordre qu'on obtient communément par la mouture économique, on sera encore un peu plus étonné de l'abondance des produits qui sont résultés de l'opération de Rochefort, lorsqu'on se remettra sous les yeux celle de nos expériences pour laquelle nous avons eu recours à la mouture à la grosse, comme cette mouture a eu lieu pour l'essai fait à Rochefort; & lorsqu'on verra que s'il a été employé par les Juges d'Angoulême du froment de la meilleure qualité, nous avons eu la même attention, puisque le blé de 1781 qui a servi pour cette expérience avoit été choisi dans ce dessein, & pesoit 242 livres par setier de Paris.

On se rappelle sans doute que les 6 setiers de froment de 1781, que nous employâmes, en les soumettant à la mouture à la grosse, pesoient ensemble 1452 livres, & ont donné 1071 livres en farines de trois qualités différentes : nous n'avons porté qu'à 1400 livres le produit en pain sur lequel on pouvoit compter couramment dans l'emploi de ces 1071 livres de farine, & nous nous sommes bornés à ce produit, à cause des variations qu'il y a dans la cuisson du pain, & de la difficulté qu'on éprouve à régler parfaitement la chaleur du four; mais on peut supposer ici que les 1071 livres de farine ont rendu 1405 livres 11 onces de pain sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation dûe à l'eau qui s'y est combinée.

D'après cette expérience par la mouture à la grosse, sur du blé de la meilleure qualité, mouture qu'on a employée à Rochefort, 1411 livres 4 onces de froment, quantité mise en expérience dans l'essai qu'on y a fait, n'auroient produit

en farines de trois qualités différentes que 1041 livres, ou à peu-près, & n'auroient rendu en pain sur le pied le plus favorable, que 1366 livres 5 onces.

Voilà donc, d'après les résultats bien précis de nos propres expériences, ce qu'auroient produit sous nos yeux 1411 livres 4 onces de froment par la mouture à la grosse employée aussi à Rochefort; 1041 livres de farine, au lieu de 1201 livres 14 onces 4 gros; & 1366 livres 5 onces de pain, au lieu de 1638 livres 4 onces : voilà donc un excédant de poids sur la farine de 160 liv. 14 onces 4 gros dans l'essai fait à Rochefort; & sur la quantité de pain qu'on y a obtenue, un excédant de poids encore plus surprenant, celui de 271 livres 15 onces.

Les Officiers de Police de Rochefort desirant de nous mettre à portée de bien connoître les trois sortes de pain que les boulangers de cette ville font dans l'usage d'y faire, la forme de ces pains, leur poids & leur qualité différente, ces Officiers ont fait prendre d'une manière légale & authentique, tant à la halle que dans la boutique de deux boulangers, une certaine quantité de ces différens pains, & nous les ont envoyés renfermés dans une caisse par la voiture publique, après nous avoir prévenus sur cet envoi, & nous avoir adressé le procès-verbal fait à ce sujet par M. Goulard, Conseiller du Roi, & Commissaire de Police à Rochefort.

Ces pains sont ou d'une livre, ou de 6 livres, ou de 12, ou de 20.

Ceux qui ne pèsent qu'une livre ou 6 livres, & qui ont une forme médiocrement longue, sont de la première qualité, & connus sous le nom de pain de *fin minot*; ceux dont le poids est de 12 livres, sont de la seconde qualité, d'une forme ronde, & portent le nom de *pain de froment*; on donne enfin à ceux qui pèsent 20 livres & qui sont ronds également, le nom de *pain de méture*, c'est celui qu'on regarde, à juste titre, comme du pain de la dernière qualité.

Nous sommes obligés de convenir que ces trois sortes de pain sont très-inférieures à celles qu'on fait, nous ne disons pas à Paris, mais dans plusieurs endroits du Royaume. Le pain

pain de fin minot n'a ni la blancheur, ni la légèreté à laquelle on devoit s'attendre en le supposant tiré des farines de la première qualité. Le pain de la seconde & du poids de 12 livres, n'a pas également la nuance de blancheur que des farines du second ordre auroient dû lui laisser; & il est aisé de voir, au premier coup-d'œil, qu'il est passé beaucoup de menu son dans la farine dont il est composé. Quant au pain de *méture*, il est visiblement d'une mauvaise qualité, le son y est très-apparent, & il y a lieu de présumer que ce n'est qu'à la faveur du sel qui entre toujours dans le pain à Rochefort, que les différentes sortes de pain qu'on y fait ont une saveur qui supplée à ce qui leur manque d'un autre côté, & que le peuple y est moins attentif à la blancheur du pain, qu'il ne le seroit dans tout autre endroit où cette denrée de première nécessité n'auroit que sa saveur naturelle.

On sera moins étonné sans doute, que les Commissaires chargés par le Parlement de veiller à l'essai fait à Rochefort, aient laissé introduire une si grande quantité de menu son dans les farines qui ont été blutées sous leurs yeux, lorsqu'ils ont vu la qualité médiocre du pain de fine fleur de minot, comme nous en avons jugé nous-mêmes; lorsqu'ils ont considéré l'imperfection de celui qui est désigné sous le nom de *pain de froment*; lorsqu'ils ont été frappés sur-tout de l'état grossier du pain de *méture* dont le poids est de 20 livres, où le son domine, qui contient beaucoup de mie, & qui, par ces deux raisons, retient l'eau avec tant de ténacité, malgré un séjour assez long au four, qu'il reste dans un état pâteux & se moisit assez promptement. On peut donc présumer que ces Commissaires, à l'inspection de ces trois sortes de pain, & principalement de celle qu'on tire des farines les plus bises, ont cru pouvoir suivre une route qui leur étoit indiquée par l'état de la boulangerie à Rochefort, & ont été plus attentifs à l'abondance des produits qu'à leur qualité qui n'entroit pas, à proprement parler, dans l'objet de leur commission.

Mais combien ne devenoit-il pas essentiel cependant que les trois sortes de farines destinées dans leur essai à être

converties en pain, fussent d'une qualité convenable à leur destination ? & qu'en même temps qu'on auroit réservé la fleur de froment pour le pain le plus délicat, & la farine un peu inférieure pour celui qu'on connoît à Paris sous la dénomination de *bis-blanc*, ou ailleurs sous le nom de *pain bourgeois*, on ne réduisît pas celui de la troisième qualité à n'être qu'un mélange d'un peu de farine avec beaucoup de menu son, & à ne devenir par-là qu'une nourriture aussi grossière que mal-saine pour le peuple qui, par une économie forcée, est souvent contraint de s'y borner.

On ne sauroit trop s'occuper, nous en convenons, du soin de maintenir au prix le plus modique le pain que mangent le bas peuple, l'ouvrier chargé de famille, l'homme dénué de secours ; mais si on ne tend à ce but qu'en les réduisant à vivre de pain qui n'en a proprement que le nom, & dont la valeur est réglée sur la mauvaise qualité, alors l'homme indigent achette le pain fort cher, quelque bas qu'en soit le prix ; il le paye aux dépens de sa santé, des forces dont il a besoin, & en consomme davantage, sans y trouver un véritable aliment. A quelque prix que puissent monter les grains, il seroit à souhaiter que le pain de la troisième qualité, dont les pauvres subsistent, fût aussi bon en lui-même qu'il est possible de l'obtenir d'une mouture bien conduite, & d'une bluterie qui ne rend en toute farine que les trois quarts ou environ de la quantité de blé employée ; que ce pain fût maintenu dans un prix modique, dans quelques circonstances que ce fût, sauf à faire supporter à l'homme qui vit dans l'aïssance, l'augmentation de prix que le pain du peuple auroit dû éprouver, dans la proportion exacte de la valeur des farines.

Lorsque nous disons qu'en écartant des farines bises, la trop grande quantité de menu son qu'une bluterie mal montée peut y laisser introduire, on a l'avantage d'en composer un pain assez substantiel, & qu'on mange quelquefois par goût ; nous en avons la preuve dans les résultats de nos expériences en fait de boulangerie : les farines de la première

qualité que nous avons obtenues par la mouture à la grosse, nous ont donné un pain excellent ; celui que nous avons tiré des farines de bis-blanc , quoiqu'inférieur au premier pour la blancheur & la légèreté , avoit un peu plus de saveur , comme plus ferme & composé en partie de gruaux blancs ; celui enfin , que nous avoient rendu les farines bises , étoit d'une bonne qualité , & telle qu'on pouvoit l'attendre d'un pain de cette espèce : sa couleur n'étoit pas trop bise , le son n'y dominoit pas , & il étoit absolument semblable à celui qu'on fait tous les jours à l'école de boulangerie , tant pour les prisonniers , que pour les pauvres mendiants renfermés à Saint-Denys : ce dernier pain est composé de farines de la troisième & quatrième qualités qu'on obtient par la mouture économique , & auxquelles on joint une certaine quantité de farines blanches lorsque celles-là sont un peu trop bises , & feroient perdre au pain qui en résulteroit le ton de couleur , la nuance de bis qu'on a déterminée pour le pain des prisonniers : aussi celui que nous tirames de nos farines bises fut-il envoyé aux pauvres de Saint-Denys , & reçu dans ce dépôt comme aussi bon que celui qu'on est dans l'usage d'y distribuer.

En considérant les trois sortes de pain que nos expériences nous ont données , en les rapprochant de celles qui nous ont été envoyées de Rochefort pour nous faire juger de l'état de la boulangerie dans cette ville , combien ne sent-on pas la nécessité d'une mouture bien conduite , & d'une bluterie dans l'emploi de laquelle on soit plus occupé de la qualité des farines , & sur-tout des dernières qui sont la ressource du peuple , que de l'abondance des produits ? Combien n'est-il pas évident que cette réserve dans l'usage de la bluterie , se trouve indiquée & prescrite , en quelque sorte par les rougeurs foncées des derniers produits ? qu'elle tient , nous osons le dire , à un principe d'humanité , & ne tire presque à aucune conséquence pour le prix du pain le plus délicat que consomme la classe des gens aisés ; tandis au contraire , que le soin de veiller à la bonne qualité des farines bises , dont le pain du peuple est composé , devient très-essentiel pour lui , & plus important

encore, que l'attention de maintenir à un bas prix l'aliment qui lui est destiné?

On ne sauroit trop louer sans doute le zèle des Officiers de Police qui veillent avec un esprit d'équité à la taxe du pain, & qui savent ménager les intérêts du peuple sans blesser ceux des boulangers; mais nous l'avouons, quand on a vu le pain qui se fait à Rochefort, on sent vivement que cette vigilance doit s'étendre plus loin, & que la mauvaise qualité du pain, de celui sur-tout dont le peuple subsiste, doit autant exciter le zèle d'un Magistrat, que le prix trop haut auquel on tenteroit de porter le pain. L'homme opulent, le citoyen à son aise qui consomment le pain blanc, peuvent s'en plaindre quelquefois; mais ils ont toujours la ressource, en le payant un peu plus cher, d'exiger qu'il soit meilleur: au lieu que le bas peuple forcé de prendre celui auquel il se trouve réduit par état, l'achette tel qu'il est; s'en plaint aussi quelquefois; mais faute d'une nourriture plus saine, il le consomme, aux dépens peut-être de la santé dont il est peu occupé pour l'ordinaire, parce qu'il l'est trop de ses besoins.

C'est donc sur le pain destiné à cette classe d'hommes livrée au travail, & dont la vigueur fait la seule richesse, que doivent tomber les regards des Officiers de police; la plus belle de leurs fonctions est de concourir à la conservation des hommes qui portent le fardeau le plus pesant de la société: en remplissant un devoir si honorable, ils auront droit & à la reconnoissance du peuple dont ils auront pris les intérêts, & à l'estime des citoyens dans l'aisance, qui sauront qu'en payant leur pain un peu plus cher, ils ont contribué à rendre meilleur celui du peuple, sans que ce pain d'une meilleure qualité ait reçu la moindre augmentation sur le prix modique qu'on y avoit d'abord attaché.

Après tous les détails dans lesquels nous a obligés de descendre l'importance de la matière dont nous sommes ici occupés, & le desir de répondre par un compte fidèle de notre travail, à la confiance dont le Parlement honore l'Académie, il ne nous reste plus qu'à rappeler, dans un exposé

sommaire, les produits en farine que nous avons obtenus des blés mis en expérience, & traités tant par la mouture économique que par la mouture à la grosse; qu'à remettre aussi sous les yeux les produits en pain que nous avons tirés des farines sorties de cette même mouture à la grosse; qu'à supposer un mélange du beau blé de 1781 avec celui de 1782 qui étoit d'une qualité inférieure, afin d'en faire résulter un produit commun, & tel qu'on pourroit l'obtenir de 12 ou de 24 setiers de blé médiocre, ou qui au moins ne seroit pas regardé comme appartenant à *la tête des blés*; qu'à établir la valeur du pain de différentes qualités, d'après la quantité de livres qu'en rend pour l'ordinaire une quantité déterminée de blé; à rapprocher enfin les tarifs dont il a été déjà question, des valeurs que nous aurons établies comme propres à conduire à une base de taxe qui n'aura rien d'arbitraire, dans laquelle le prix intrinsèque des grains sera distingué de celui de la main-d'œuvre, & où la valeur de la livre du pain de trois qualités différentes sera toujours annoncée par celle des farines tirées des endroits dans lesquels ce commerce utile est établi, ou par celle des grains vendus dans les marchés publics.

Nous avons dit qu'on tire communément par la mouture économique, d'une quantité déterminée de livres de blé, les trois quarts ou à peu-près en farines de différentes qualités; mais qu'on n'obtient pas tout-à-fait le même avantage par la mouture à la grosse, quand on desire avoir des farines bien distinctes pour leurs qualités, & de ne pas surcharger les dernières par une trop grande quantité de menu son.

Nous avons fait observer également que le point de perfection reconnu jusqu'ici dans l'art de la Boulangerie, étoit d'obtenir en pain blanc de 4 livres ou environ, les cinq seizièmes au-delà de la quantité de farine employée; car on s'attendroit en vain à cette augmentation sur une fournée de pains d'une ou de deux livres, à moins que l'excédant de pâte toujours nécessaire & relatif, tant à la forme qu'au poids du pain qu'on veut faire, n'eût été proportionné à la grande

perte que des pains de deux & sur-tout d'une livre éprouvent constamment au four.

Les 6 setiers de blé de 1781, que nous avons employés dans nos expériences, comme étant de la meilleure qualité, pesoient ensemble 1452 livres, & ont rendu par la mouture économique 1096 livres de farines différentes, c'est-à-dire 7 livres au-delà des trois quarts de la quantité de blé fournie à cette mouture.

Les six setiers de blé médiocre de 1782, pesant ensemble 1375 livres 12 onces, traités par la même mouture, n'ont produit en farines différentes que 1014 livres, c'est-à-dire 17 livres 13 onces au-dessous des trois quarts du poids de ces six setiers de blé inférieur.

Les produits n'ont plus été les mêmes dans la mouture à la grosse, quoique sortis de blés pareils, & d'un poids égal; 1452 livres de blé de 1781, n'ont rendu en farines que 1071 livres, & par conséquent 25 livres de moins que nous n'en avons tiré d'une quantité égale de blé pareil, à la faveur de la mouture économique, & par conséquent encore 18 livres au-dessous des trois quarts de cette même quantité.

Nous n'avons obtenu par cette même mouture, des 1375 livres 12 onces de blé médiocre, que 997 livres de farine, c'est-à-dire 34 livres 13 onces au-dessous des $\frac{3}{4}$ de cette dernière quantité de blé, & 17 livres de moins que 1375 livres 12 onces, également de blé médiocre, n'en ont rendues par la mouture économique.

Il est bien constant d'abord, d'après cet exposé, que la mouture économique a des avantages sur la mouture à la grosse: ils auroient été plus sensibles, si nous n'eussions pas tâché dans nos expériences de tirer le parti le plus utile de cette dernière mouture, & de la rapprocher de la première, en conservant aux farines bises la meilleure qualité qu'elles puissent avoir.

L'emploi que nous avons fait d'une grande partie des 1071 livres de farines sorties des 1452 livres du blé de 1781, & les produits en pain que nous en avons obtenus,

nous ont conduits à établir des résultats proportionnels, en admettant l'emploi de toutes ces farines : nous avons vu, en conséquence, que prises en total, elles auroient donné 1400 livres de pain ou environ, en supposant néanmoins que la chaleur du four auroit été mieux ménagée qu'elle ne l'a été dans la première expérience ; qu'on auroit saisi à peu près le degré de cuisson qui convient au pain, comme on l'a fait dans la seconde expérience : & encore avec une telle attention n'auroit-on pas eu dans cette dernière quantité de pain toute celle qu'on auroit pu espérer, puisque ces 1071 livres de farine auroient donné jusqu'à 1405 livres 11 onces de pain, sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation.

L'emploi que nous avons fait également d'une grande partie des 1014 livres de farine, tirées des 1375 livres 12 onces du blé médiocre de 1782, nous fait juger aussi par une comparaison exacte de la quantité de pain que la totalité de ces farines auroit donnée ; cette quantité n'auroit pas été loin du produit le plus avantageux ; elle auroit été de 1305 livres de pain, c'est-à-dire, de 3 livres 9 onces seulement au-dessous du produit de ces farines, sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation.

Si on veut supposer le mélange des six setiers de blé de la meilleure qualité, avec les six autres d'une qualité inférieure, pour avoir les produits d'un blé moyen, alors le poids des douze setiers sera de 2827 livres 12 onces, ils rendront suivant nos expériences par la mouture économique, 2110 livres de farines différentes, & pourront donner sur le pied des $\frac{5}{16}$ d'augmentation 2769 livres 6 onces de pain, tandis que d'après ces mêmes expériences & par la mouture à la grosse 12 setiers de blé d'un poids égal & d'une qualité pareille, ne rendront que 2068 livres de farine & 2705 livres de pain, c'est-à-dire 64 livres 6 onces de moins en pain qu'il n'en auroit été obtenu par la mouture économique des 2827 livres 12 onces de blé moyen.

La différence auroit été encore plus marquée, si, par l'avantage attaché à la mouture économique, on eût tiré, comme on le fait communément, les trois quarts en farine

de cette quantité de blé moyen , ils auroient été à 2120 livres 13 onces , & il en seroit sorti , par une opération bien faite de boulangerie 2783 livres 9 onces de pain ; au lieu que dans la mouture à la grosse , nous n'avons annoncé le produit en pain que de 2705 livres , & qu'il n'auroit été tout au plus que de 2714 livres 4 onces par une opération de boulangerie faite avec soin également , & dans laquelle on eût obtenu le plus grand produit qu'il est possible d'espérer.

De l'exposé fidèle de toutes nos opérations dont il convenoit que la chaîne ne fût pas interrompue , ou ne le fût que par les observations que la circonstance pouvoit exiger , nous nous trouvons conduits à l'application des faits principaux que nous avons à constater , que nous avons reconnus , & qui doivent nous servir de règle pour bien déterminer la valeur du pain en la faisant sortir , & de celle du blé ou des farines , & de celle des frais de main-d'œuvre considérés séparément.

Il est constant d'abord , par le résultat de nos expériences qui cadre avec tout ce qui est connu sur les opérations de la meunerie , que la mouture économique a un avantage réel sur la mouture à la grosse pour la quantité du produit en farines de différentes qualités ; qu'elle en a un également pour la distinction plus exacte de ces farines , & la meilleure qualité des dernières ; que d'une quantité déterminée de blé on tire plus de parties farineuses par la première de ces moutures , & qu'on les obtient mieux séparées du son , qu'on ne le fait par la seconde ; & que dans la supposition où d'une certaine quantité de froment on obtiendrait par l'une & l'autre moutures un produit égal en poids , l'égalité ne régneroit pas dans les farines pour la qualité ; de manière que le son resté de la mouture à la grosse recelerait plus de parties farineuses & vraiment nutritives , que celui qui auroit été retiré de la mouture économique ; & que le produit en farine de la première de ces moutures ne deviendrait égal en poids à celui de la deuxième , qu'à la faveur du son atténué
qui

qui s'y feroit introduit , en laissant dans les issues plus grossières, les parties farineuses, les portions de gruaux blancs que ce menu son représenteroit , pour le poids , dans la masse de farine que le blé auroit rendue.

On a déjà observé dans le courant de ce Mémoire, que le produit en farine sur lequel les meuniers comptent pour l'ordinaire, & qui est assez constant dans la mouture économique, va aux $\frac{3}{4}$ ou à peu-près du poids du blé mis en expérience; mais que ce produit est plus foible (toutes choses égales d'ailleurs) & plus sujet à varier dans la mouture à la grosse.

Il est certain, en second lieu, qu'il y a beaucoup de précautions à prendre dans les opérations de boulangerie, pour que le pain soit fait d'une manière convenable à celui qui l'achette, & utile en même-temps à celui qui le débite; que le plus grand produit à cet égard, & en supposant le boulanger fidèle, dépend de plusieurs choses dont la pratique seule peut bien instruire, & sur lesquelles l'ouvrier le plus intelligent se trouve quelquefois en défaut; que ce produit plus ou moins abondant tient à la nature des farines, à l'état plus ou moins sec dans lequel on les emploie, à la propriété qu'elles ont d'absorber plus ou moins d'eau, aux farines de la première qualité qui donnent le pain le plus délicat, & borné communément à un poids assez foible; qu'il tient encore à l'état des farines plus ou moins bises, à la forme des pains, à leur poids, au degré de cuisson que chaque sorte exige, à la perte qu'il font constamment au four, & qui est inégale, malgré tout ce qu'on peut faire en subdivisant avec exactitude une masse de pâte bien préparée, pour obtenir l'égalité dans le poids d'une certaine quantité de pain; ce produit tient enfin, on l'a remarqué dans une de nos expériences, au séjour du pain dans le four, de quelques minutes trop long; & c'est sans doute ici le point le plus délicat pour un boulanger qui peut perdre, nous le savons, par une distraction légère 15. ou 20 livres de pain sur une fournée de 300 livres ou environ, à laquelle il s'attendoit; cette perte ne se trouve déterminée que d'une manière relative,

Mém. 1783.

H h

c'est-à-dire, qu'après avoir reconnu par l'expérience & par une suite d'opérations bien faites, qu'une certaine quantité de farine d'une bonne qualité, convertie en pâte & subdivisée en pains de 4 livres qui portent un excédant de pâte que l'usage a fixé, après avoir vu, disons-nous, qu'on tiroit en pains de cette quantité de farine les $\frac{5}{16}$ au-delà de son poids, on a regardé cette augmentation de produit comme un point de perfection dans le travail auquel un boulanger intelligent pouvoit atteindre, ou dont au moins il devoit peu s'écarter.

Si on rapproche actuellement les résultats de l'essai qu'on a fait à Rochefort, de ceux sur lesquels seulement on peut compter, en adoptant les bases que nous venons d'établir, combien ne différeront-ils pas de nos produits ordinaires, & ne feront-ils pas sentir les abus qui naîtroient du mélange d'une grande quantité de menu son dans les dernières farines, & l'inconvénient qu'il y auroit à tirer de ces farines le pain du bas peuple qui l'achetteroit toujours trop cher, quelque modique qu'en fût le prix? On se rappelle sans doute ce qui a été dit plus haut sur les résultats de l'essai de Rochefort: on y a obtenu de 1411 livres 4 onces de blé, par la mouture à la grosse, 160 livres 14 onces 4 gros de farine de plus que nous n'en aurions tiré par la même mouture, & 271 livres 15 onces de pain au-delà de la quantité que nous en aurions retirée, sur le pied le plus favorable, de 1411 livres 4 onces également de blé choisi comme l'avoit été celui de Rochefort.

On voit donc, au premier coup-d'œil, qu'un essai où l'on s'éloigne autant des produits connus, ne sauroit servir de règle pour asséoir la taxe du pain, & qu'il faut en chercher la base dans des résultats de mouture & de boulangerie sur lesquels on est par-tout assez d'accord. Le tarif de la Rochelle établi en 1700, & celui de 1703 adopté à Rochefort, présentent cette base, ils peuvent être remis en vigueur avec quelque changement qu'exige la mouture perfectionnée; & sortis il y a plus de quatre-vingts ans de ces deux villes, ils peuvent encore y servir de règle aujourd'hui, & aplanir les difficultés qui s'y sont élevées.

Si la mouture économique ne faisoit pas autant de progrès qu'on le remarque tous les jours, & ne donnoit pas lieu de présumer qu'elle s'étendra bientôt par-tout, peut-être seroit-il nécessaire d'avoir égard, dans la confection d'un tarif, au moindre produit que donne la mouture à la grosse, & à l'augmentation légère qui en résulte sur le prix du pain; mais cette dernière mouture, on le sait, ne donne pas des produits en farine aussi constans qu'ils le sont dans la mouture économique, & cependant il s'agit d'établir une règle qui doit être fixe, au moins pendant long-temps, à laquelle il est presque toujours dangereux de porter atteinte, & qui demande la plus grande réserve, dans la nécessité même d'y faire quelque changement. Nous croyons donc qu'il convient de prévoir des résultats meilleurs & plus constans dans la mouture, que ceux qu'on obtient dans plusieurs provinces; de supposer avec fondement qu'on parviendra dans la suite avec des attentions & par le moyen de bluteries bien montées, à tirer en farines les $\frac{3}{4}$ du poids du blé qu'on aura fait moudre: nous y sommes parvenus nous-mêmes dans un essai sur une petite quantité de froment qui n'a été soumise qu'à une seule opération du moulin, mais pour laquelle les meules ont été rapprochées & mises au point que l'exige la manière de moudre les grains, qui est connue des gens de l'Art, sous le nom de *mouture en boulange*: il est vrai que le degré de blancheur des trois sortes de farines n'y étoit pas tranché aussi-bien qu'on l'auroit remarqué dans des farines sorties de la mouture économique; mais il s'agissoit plus dans cette expérience de la quantité des produits dans de certaines bornes, que d'une distinction bien exacte pour la qualité de chacun de ces produits.

Il y a lieu de présumer encore qu'un tarif, dans lequel on supposera le produit en farines dont nous parlons, rendra les boulangers plus vigilans sur le poids & la qualité des farines qui leur seront rendues par les meuniers, & que l'industrie qui fera desirer l'établissement de la mouture économique, réveillée de deux côtés, justifiera bientôt le tarif sur le produit à cet égard d'une quantité de froment d'un poids déterminé.

D'ailleurs nous pouvons assurer que dans un essai fait depuis peu à Rochefort, sur 3 pochées de froment ou 9 boisseaux ; mesure d'Aligre, essai dont on nous a envoyé le détail, & dans lequel on auroit pu avoir quelque intérêt à nous déguiser la vérité en diminuant les produits, on annonce pour celui des farines les $\frac{3}{4}$ ou environ, du froment employé, & pour le produit en pain, les $\frac{5}{16}$ ou à peu-près, au-delà du poids de ces farines.

Il paroît donc que nous pouvons proposer comme bases principales d'un tarif, les produits tant en farines qu'en pain que nous venons de déterminer, & sur lesquels les boulangers de Paris se trouvent d'accord : il est une autre base indépendante des deux premières qu'il faut établir en la considérant à part & sans aucune relation au prix des grains, c'est celle qui concerne le prix de la main-d'œuvre & le juste bénéfice que le boulanger doit recueillir : il lui est accordé 6^l par le tarif de la Rochelle, pour la conversion en pain de 260 livres de farine achetées à la halle en cet état, ou tirées du blé que ce boulanger aura fait moudre, & dont la farine brute aura été blutée chez lui.

Ce même tarif suppose qu'on ne retire de ces 260 livres de farine que 320 livres de pain, puisqu'il en fixe le prix à 2^l, par exemple, & tous frais faits, quand cette quantité de farine vaut 32^l.

Mais nous avons fait observer qu'elle peut donner 340 livres de pain ; les $\frac{5}{16}$ d'augmentation sur le poids de la farine porteront même, dans la rigueur, le produit en pain à 341 livres $\frac{1}{4}$: on peut se borner à la première de ces quantités sur laquelle même on ne pourroit pas compter, si on convertissoit une grande partie de la farine en petits pains : les 6^l accordées aux boulangers par le tarif de 1700, pour l'emploi de 260 livres de farine, étant réparties sur les 340 livres de pain, établiront les frais de main-d'œuvre pour chaque livre de pain sur le pied de 4^d $\frac{4}{17}$, ou à très-peu-près de 4^d $\frac{1}{4}$.

La charge de farine nommée *fin minot*, vaut, dans le moment où nous rédigeons ce rapport, à la halle de Marans

où les boulangers de Rochefort font dans l'usage de faire leur provision, $40^l 3^f$, en y comprenant quelques frais auxquels ils sont tenus avant que leurs farines soient rendues à Rochefort ; cette charge de farine est composée de deux sacs qui en contiennent chacun 130 livres.

Qu'on suppose actuellement qu'un boulanger de cette Ville veuille employer 4 charges & $\frac{1}{6}$ de fin minot, ou à peu près 1084 livres de farine, elles lui coûteront en total $167^l 5^f 10^d$, sur le pied de $40^l 3^f$ la charge; il en tirera 1417, livres de pain, dans le rapport de 260 livres de farine à 340 de pain: la valeur intrinsèque de chaque livre de pain de la première qualité, sera d'abord par conséquent de $2^f 4^d \frac{1}{12}$, & quand on y aura joint $4^d \frac{3}{12}$ pour les frais de main-d'œuvre, elle montera à $2^f 8^d \frac{7}{12}$; voilà le prix de la livre de pain tirée des farines de la première qualité, prix égal pour chaque livre, comme sorties toutes de fin minot; tandis que celles dont nous allons parler sortiront des produits différens de la mouture, & auront une valeur proportionnée à leur qualité.

28 boisseaux, mesure de Marans, & pris dans cette Ville, contiendront 1452 livres de beau blé, sur le pied de 51 livres $\frac{7}{8}$ le boisseau, & coûteront 147^l , en les supposant chacun du prix de $5^l 5^f$, avec les menus frais qu'exige le transport; on pourroit en tirer, à la rigueur & sur le pied des $\frac{3}{4}$ du poids du blé 1089 livres de farine; mais on bornera ici ce produit à 1084 livres; pour le faire marcher de pair, quant au poids, avec celui de 4 charges $\frac{1}{6}$ de fin minot dont il vient d'être question: cette quantité de farine donnera également, dans le rapport de 260 à 340 livres, 1417 livres de pain, dont la valeur intrinsèque pour chaque livre sera de $2^f \frac{10}{12}$, & montera à $2^f 5^d \frac{1}{12}$, en y réunissant les $4^d \frac{3}{12}$ dont on est convenu pour les frais de main-d'œuvre; mais ce prix de la livre de pain, qui est trop fort pour une partie d'elles, ne l'est pas assez pour une partie d'autres; il faut donc, en conservant la valeur totale du pain, retrancher d'un côté, dans des vues de justice & d'intérêt pour le peuple, ce qui doit être porté en augmentation sur un autre, par des

vues également justes, & auxquelles ceux qui consomment le pain le plus délicat ne sauroient se refuser.

Dans les 1417 livres de pain dont il s'agit ici, on peut, par une estimation générale seulement, & qu'il seroit difficile de faire avec quelque précision pour les produits que donne la mouture à la grosse, on peut supposer 945 livres de pain comme tirées des farines de la première qualité, 272 livres comme obtenues de celles de la seconde, & 200 livres dans lesquelles il n'est entré que des farines bisées.

Suivant un grand nombre d'ordonnances de police pour la taxe du pain, qu'on a rendues depuis quelque temps à Rochefort, & dont plusieurs sont sous nos yeux, la livre de pain de la seconde qualité, qu'on y nomme *pain de froment à sa fleur*, est taxée à 2^f 2^d; & celui de la troisième, connu sous le nom de *pain de meture*, y est fixé à un sou 5^d la livre: nous conserverons ces deux prix pour le pain de la seconde & sur-tout de la troisième qualité, dans le calcul qui va suivre, afin de nous écarter le moins qu'il sera possible des principes de la taxe favorable au peuple, qu'on adopte à Rochefort.

On a vu que chacune des 1417 livres de pain dont nous venons de parler, revenoit, tous frais faits & sans aucune distinction pour la qualité, à 2^f 5^d $\frac{1}{12}$; dès-lors il faut que les 272 livres de pain de la seconde qualité, qui font partie des 1417 livres, descendent chacune au prix de 2^f 2^d, & perdent 3^d $\frac{1}{12}$; & que chacune des 200 livres de la troisième qualité soit déchargée d'un sou $\frac{1}{12}$: la totalité des deniers qu'on aura ainsi soustraite de la valeur des pains de la seconde & de la troisième qualité, ira à 3255 deniers, lesquels, répartis sur les 945 livres de pain de la première qualité, dont le prix primitif étoit de 2^f 5^d $\frac{1}{12}$ par livre, y produiront une augmentation de 3^d $\frac{6}{12}$ ou à peu-près, & feront monter la valeur de cette livre de pain de la première qualité à 2^f 8^d $\frac{7}{12}$.

Ce dernier prix est pareil, comme on le voit, à celui de toutes les livres de pain obtenues plus haut des charges de

farine de fin minot, par la raison que les 945 livres de pain dont il s'agit dans ce moment sortent de farines de la première qualité, & doivent avoir chacune un prix égal à celui de la livre de pain tirée des farines de la plus belle qualité, & désignées à Rochefort, sous le nom de *fin minot*.

Le tarif de la Rochelle établi en 1700, & pris à la lettre, feroit monter la livre de pain de la première qualité à 1^d $\frac{1}{2}$ de plus que nous ne venons de la fixer; sur le pied en effet du prix de 40^s pour 260 livres de fin minot, auquel on doit ajouter 6 livres pour les frais de main-d'œuvre; on voit dans ce tarif que la livre de pain iroit à 2^f 10^d, elle devrait même aller à 2^f 10^d $\frac{1}{2}$ justes, d'après les bases de ce tarif, si on n'y eût pas négligé la fraction; & alors on remarquera que le prix plus haut de la livre de pain que nous avons déterminé, est plus foible de deux deniers que celui qui résulteroit strictement des principes de ce tarif.

Tels sont les résultats qui, conformes à ceux qu'on a obtenus jusqu'ici, naissent de nos expériences particulières & des observations dont elles sont accompagnées: ces résultats s'éloignent peu de ceux qu'on tireroit d'après le tarif de 1700 que les boulangers de Rochefort desireroient qu'on adoptât, mais que leur Art, ainsi que celui du meunier, mieux conduits aujourd'hui qu'ils ne l'étoient à la naissance de ce tarif, nous ont donné lieu d'interpréter avec raison sur le produit en pain qui s'y trouve déterminé: ils s'éloignent peu aussi, en général, de la règle que les Officiers de police ont suivie jusqu'ici à Rochefort, pour la taxe du pain, sans qu'on voie qu'ils aient déduit cette règle des principes fixes d'un tarif, de la valeur intrinsèque du pain, & de celle des frais de main-d'œuvre prise séparément & toujours constante, quelles que soient les variations de la valeur des grains.

Si le travail que nous venons d'exposer, si l'usage sur-tout que nous y faisons avec modération du tarif de la Rochelle, méritent que le Parlement y ait égard, & qu'il ordonne,

en conséquence, l'exécution de ce tarif, dont les bases trop favorables peut-être aux boulangers dans le temps où il a été fait, ne paroissent aujourd'hui que bien établies par l'augmentation de prix que tout a éprouvé depuis plus de quatre-vingts ans, cette décision produira sans doute quelques avantages, celui en premier lieu d'aplanir les difficultés qui se sont élevées à Rochefort au sujet de la taxe du pain, & y substituent au milieu de trois tarifs, dont il semble qu'il ne s'agissoit que d'appliquer les dispositions aux circonstances où l'on se trouvoit : l'utilité qui pourra résulter en second lieu, de la décision du Parlement, sera l'établissement d'une base pour la taxe du pain, qui n'aura rien d'arbitraire, sur-tout à l'égard des frais de main-d'œuvre, si susceptibles de discussion, mais qui réglés une fois avec équité n'exigeront pas sitôt de changement ; & distingués avec soin dans ce tarif, ils seront toujours un objet isolé dans la taxe du pain.

Dans la plupart des contestations qui naissent en Province au sujet du prix de la livre de pain, & qui deviennent plus générales dans ce moment-ci à l'occasion de celle qui a éclaté à Rochefort, on ne s'accorde point sur le produit en farine qu'on peut obtenir d'une quantité déterminée de blé, sur celui qu'on peut tirer en pain d'une quantité fixe de farine, & encore moins, tant sur la dépense à laquelle un boulanger est tenu, que sur le bénéfice convenable qu'il est en droit d'attendre de son travail.

On a remarqué dans les calculs établis plus haut, qu'on pouvoit compter à peu-près sur 1084 livres de farine, comme tirées de 1452 livres de blé, & sur 1417 livres de pain, comme produites par cette quantité de farine. Nous ne parlons point ici de mesures quelles qu'elles puissent être, & qui, constantes en elles-mêmes, offrent des variations fréquentes pour le poids du blé qu'elles contiennent, relativement à la qualité dont il est ; nos calculs partent toujours du poids déterminé d'une certaine quantité de grains ; & quoiqu'il soit possible que 100 livres d'une sorte de blé donnent

donnent un peu plus de farine qu'une autre sorte de blé d'un poids pareil n'en rendroit ; cependant il convient, dans un calcul général, de prendre pour point fixe le poids du grain , parce que les différences légères disparaissent dans des opérations de la nature de celle-ci , où les produits ne sont jamais rigoureux. Ainsi, en supposant qu'on peut obtenir une certaine quantité de farine d'une quantité déterminée de blé , on se trouve conduit à admettre avec assez de fondement le même produit d'une quantité de blé parfaitement égale , & il n'y a point d'erreur essentielle à craindre dans les conséquences qu'on peut tirer à cet égard.

Il n'en est pas de même absolument du produit en pain qu'il est possible d'obtenir d'une certaine quantité de farine ; il tient à l'état de sécheresse ou d'humidité des farines avant qu'on les emploie , & à l'attention du boulanger dans la conduite du four ; mais en supposant , comme nous l'avons fait , que 260 livres de farine donnent 340 livres de pain de 4 livres , & que c'est une des bases du tarif , nous supposons aussi un boulanger attentif , ou , pour ses propres intérêts , nous l'obligeons à le devenir.

Les boulangers de Rochefort représenteront peut-être qu'ils sont dans l'usage de faire une grande quantité de pains d'une livre & de la première qualité ; que la pâte ainsi subdivisée & plus légère que celle des pains inférieurs , perd beaucoup de son poids au four ; qu'elle y diminue en raison des surfaces multipliées qu'elle y présente , & qu'alors il ne leur est pas possible de retirer de 260 livres de farine la quantité de livres de pain que nous annonçons.

Mais on peut leur répondre, que s'il leur est onéreux de faire des pains d'une livre, ils ont l'avantage d'en pouvoir débiter qui pèsent 6 livres & qui sortent des farines de la première qualité ; qu'ils emploient en pains de 12 livres les farines d'une qualité inférieure ; qu'ils réservent les farines bises pour des pains de 20 livres ; & que par-là il se fait une sorte de compensation dans le poids des différens pains , si même il n'y a pas moins de perte sur le pain de la première qualité,

qu'il n'y a d'excédant de poids sur celui de la seconde, ou au moins sur le pain bis de 20 livres, comme plus compacte que les deux autres, & plus capable de se maintenir dans une certaine humidité après avoir souffert toute la chaleur du four.

Dans la distinction des trois sortes de farines que nous avons considérées comme sorties des 1452 livres de blé, nous n'avons porté qu'aux deux tiers de 1084 livres, total de ces farines, celles de la première qualité; & en partageant l'autre tiers en deux parties, nous avons établi le poids de l'une qui regardoit les farines de la seconde qualité, comme devant être plus fort que celui de l'autre partie du tiers qui regardoit les farines bises ou de la troisième qualité.

Si nous nous fussions réglés pour ce partage sur les produits de la mouture économique, nous aurions porté jusqu'aux trois quarts du total des farines, & même un peu au-delà, celles qu'on auroit pu ranger dans l'ordre des farines de la première qualité; le quart qui seroit resté en farines inférieures, auroit été divisé aussi en deux parties, & l'auroit été de manière que le poids de l'une, relative aux farines qu'on désigne sous le nom de *bis-blanc*, se seroit trouvé aussi un peu plus fort que celui de la dernière partie composée également des seules farines bises. Suivant ce dernier partage des farines, où celles de la première qualité sont plus abondantes qu'on ne les a vues d'abord, mais auquel ne se prête point la mouture à la grosse, le prix de la livre de pain blanc auroit été inférieur à celui qui est résulté de nos calculs; dans ce dernier cas en effet, il se seroit trouvé moins de pain de la deuxième & sur-tout de la troisième qualité; il y auroit eu moins de deniers à rejeter sur le prix du pain le plus délicat, & la quantité que nous en avons eu à répartir sur 945 livres du pain le plus cher, l'auroit été sur 1063 livres de pain de la même qualité.

Il ne faut pas croire cependant que ce produit plus considérable en farines de la première qualité, qui seroit dû à la mouture économique, n'auroit lieu absolument qu'aux

dépens, pour ainsi dire, des farines inférieures, & parce qu'on auroit enlevé à celles-ci les portions les plus précieuses de gruaux blancs, dont le produit assez fort en belles farines se seroit encore enrichi. Si la mouture économique donne des produits un peu plus abondans qu'on ne les obtient de la mouture à la grosse, c'est en parties vraiment farineuses qu'elle les donne, en farines mieux dépouillées de son; & dès-lors il peut se trouver une augmentation sur celles de la première qualité, sans que les farines qui sont au-dessous aient beaucoup perdu du degré de blancheur qui sert à les caractériser, à les ranger par ordre, & qui présente un moyen naturel d'en régler le prix.

Déterminer la quantité de farines différentes qu'on peut tirer d'une quantité fixe de livres de blé; établir ce résultat, d'après la mouture à la grosse, pour se conformer aux intentions du Parlement; mais rapprocher en même temps de cette mouture les opérations mieux entendues, de la mouture économique, pour donner lieu à leur comparaison; exposer le travail des boulangers pour faire juger de la vigilance qu'il exige, & des variations dans les produits en pain, comme dans le poids de ces mêmes pains auxquels il est sujet; annoncer à peu-près la quantité de pains qu'il est ordinaire de tirer d'une certaine quantité de farine; distinguer le prix intrinsèque de la livre de pain, quelle qu'en soit la qualité, de celui des frais de main-d'œuvre, & fixer, en les réunissant, la valeur totale de la livre de pain, d'après celle du blé dont on aura fait l'emploi; du prix général d'une certaine quantité de livres de pain, de ce prix établi d'abord avec égalité pour chacune d'elles, faire sortir celui qu'il faut leur assigner en particulier & relativement à la qualité du pain; comparer les résultats de nos expériences & des opérations en grand du même genre qui se font continuellement à Paris, avec ceux qui ont été obtenus de l'essai fait à Rochefort; examiner si dans le tarif ancien de cette ville, adopté en 1703, & sur-tout dans celui de la Rochelle, qui lui avoit servi de modèle en 1700,

on ne trouveroit pas une base convenable pour assésir la taxe du pain ; tirer ainsi du pays même où la contestation s'est élevée, un des principaux moyens de l'y faire cesser ; rendre applicables enfin au commerce de boulangerie, dans tout autre pays , les principes vrais en eux-mêmes que nous aurions établis, sauf la différence pour le prix de la main-d'œuvre que les lieux différens pourroient demander, mais au sujet duquel il y auroit une règle essentielle à suivre, celle d'avoir plus d'égard, en fixant ce prix, aux boulangers qui ne subsistent que par un travail médiocre, qu'à ceux qui ont beaucoup de débit ; tels sont les objets que nous avons eu en vue dans notre travail pour répondre à la confiance dont le Parlement a honoré l'Académie , & pour remplir nous-mêmes, avec toute l'exactitude dont nous serions capables, la commission importante dont la Compagnie nous a chargés. Quelque application qu'ait demandé de nous ce travail soumis aux lumières de l'Académie, nous serons bien dédommagés des soins que nous nous sommes fait un devoir d'y apporter, si le Parlement y trouve les bases principales sur lesquelles le prix du pain doit porter ; les moyens d'aplanir les difficultés qui se sont élevées à Rochefort, & qui sont les mêmes à la Rochelle dans ce moment-ci ; d'écarter celles qui sont à la veille de naître, nous le savons, dans plusieurs villes du Royaume ; d'établir en un mot la tranquillité sur un point de Police moins délicat peut-être à régler pour le fond, qu'il ne l'est quelquefois à l'égard des circonstances & des mouvemens dangereux dont il peut devenir l'occasion.

R É S U M É.

APRÈS les détails dans lesquels nous venons d'entrer, & qu'exigeoit l'exposé fidèle de nos expériences ; après les observations que nous avons cru qu'il nous seroit permis d'y joindre, afin qu'il fût plus facile de tirer quelque avantage de notre travail, nous allons réduire à trois articles principaux, conformément au prononcé de l'arrêt du Parlement du 6 Septembre 1783, le résultat de nos opérations différentes, &

les conséquences qui paroissent en naître pour l'objet de discussion dont l'Académie nous a chargés de nous occuper.

ARTICLE PREMIER.

UN boulanger peut retirer d'une quantité déterminée de farine, quelle qu'en soit la qualité, de 240 livres, par exemple, 315 livres de pain, c'est-à-dire, les $\frac{5}{16}$ au-delà du poids de la farine employée; il en retirera un peu plus si la farine est bise & a été convertie en pains de 6, de 8 ou de 12 livres, comme d'un autre côté il en obtiendra moins, si les pains ne sont que d'une & de 2 livres; il faut supposer d'ailleurs une grande vigilance de la part du boulanger dans la conduite du four, où une chaleur trop forte peut faire perdre au pain une partie de son poids, où le même inconvénient peut naître d'un séjour trop long du pain dans le four: le boulanger, en tâchant d'éviter cette perte, doit cependant donner au pain le degré de cuisson convenable, & la régler suivant la qualité & le poids dont est le pain. Ce sont ces précautions indispensables dans l'Art du boulanger, ces variétés dans le poids & la qualité du pain, qui arrêteront toujours pour la détermination précise de la quantité de livres de pain qu'on peut tirer d'une certaine quantité de farine; mais nous croyons qu'on peut compter en général sur le produit de 315 livres de pain, comme sorti de 240 livres de farine, & en supposant encore que ces pains ne seront pas au-dessous de 4 livres, sur-tout ceux de la première qualité, puisqu'il est constaté par nos propres expériences qu'il est assez difficile d'obtenir l'avantage des $\frac{5}{16}$ d'augmentation sur une quantité de farine d'un poids déterminé.

On retire à Paris de 560 livres de froment; 420 livres de pain de la première qualité, & 131 livres, dont la moitié peut être en pain un peu inférieur, nommé *bis-blanc*, & l'autre moitié en pain proprement bis.

La mouture à la grosse ne donne pas le même avantage, tant pour la quantité des farines que pour leurs qualités bien distinguées; on peut compter sur les $\frac{2}{3}$ ou environ de la

farine qu'on retire de cette mouture pour le pain de *fine fleur* ou *minot* ; sur $\frac{1}{6}$ de cette farine pour le pain de la seconde qualité ou de *froment à sa fleur* ; & sur $\frac{1}{6}$ également pour le pain bis ou de *meture*, c'est-à-dire, qu'en supposant qu'on ne tirât par la mouture à la grosse, de 560 livres de froment que 534 livres de pain, il y en auroit 356 livres de la première qualité, 89 de la seconde, & une quantité égale de la troisième. Nous ne pouvons donner sur le partage des farines, pour les convertir en pains de différentes qualités, qu'une idée générale, parce qu'il y a des provinces où les boulangers ne font qu'une quantité médiocre de pain blanc, où une grande partie des plus belles farines passe dans le pain de la seconde qualité, tandis que les farines bisées qu'on en a séparées entrent dans le pain à bas prix que le peuple consomme.

I I.

DANS les discussions qui s'élèvent tous les jours entre les Officiers de Police & les boulangers d'une ville, au sujet de la taxe du pain, il n'y a presque jamais d'accord sur les dépenses auxquelles les boulangers sont tenus par état & relativement au prix des denrées dans le pays où ils font leur commerce : pendant en effet que le zèle des Magistrats les porte à limiter ces dépenses le mieux qu'ils peuvent pour parvenir à la valeur exacte du pain, les boulangers sont enclins de leur côté à étendre ces dépenses, & il est rare qu'ils en fournissent des états où il n'y ait pas quelques articles à réformer. Il paroît donc plus simple, suivant l'usage établi dans plusieurs villes du Royaume, d'accorder une somme fixe aux boulangers par quantité déterminée de farine ou de pain, de ne point entrer avec eux dans le détail des frais de mouture, de boulangerie, &c. & après avoir réglé la valeur intrinsèque de la livre de pain sur celle du blé, à mesure qu'elle varie, d'y ajouter le prix constant de main-d'œuvre qu'on aura fixé. Nous supposons ici, pour présenter un exemple, que le setier d'une ville de province contient 200 livres de froment bien net & d'une bonne qualité ; 2 setiers & $\frac{4}{7}$ de cette mesure

contiendront les 560 livres de grains dont il a été question dans le premier article; on en retirera par une mouture bien entendue 420 livres de farines différentes & 551 livres de pain. Nous supposerons en second lieu que chaque setier de froment a coûté $21^1 10^s$, & par conséquent que les 2 setiers $\frac{4}{5}$ ont été payés $60^1 4^s$; dès-lors le prix intrinsèque de chaque livre de pain, indépendamment de sa qualité, sera de $2^s 2^d \frac{1}{4}$; mais il faut y réunir les frais constans de main-d'œuvre, & en repartir le prix sur chaque livre de pain; nous supposerons donc encore qu'on ajoutera $3^1 5^s 7^d \frac{2}{14}$ à la valeur de chaque setier de blé du poids de 200 livres, ou 7^1 par sac de farine du poids de 320 livres, ou 4^d par livre de pain, tant pour les dépenses auxquelles les boulangers sont astreints, que pour le bénéfice qu'il convient de leur accorder: chaque livre de pain, sans distinction de qualité, ira donc d'abord, tous frais faits, à $2^s 6^d \frac{1}{4}$. Mais il restera une dernière opération à faire, celle de décharger la livre de pain, inférieure en qualité, de l'excédant de prix qu'elle a reçu par un premier calcul, & de le faire retomber sur la livre de pain d'une meilleure qualité: s'il est d'usage dans cette même ville de faire une petite quantité de pain blanc, un peu moins encore de pain bis, mais une quantité considérable de pain de la seconde qualité dans lequel entre la plus grande partie des plus belles farines, alors on pourra supposer que dans les 551 livres de pain tirées des 2 setiers $\frac{4}{5}$, il y en a 88 de pain blanc qu'on portera à $2^s 9^d$ la livre, 420 livres de la seconde qualité qu'on laissera à $2^s 6^d$, & 43 livres de pain bis, dont chaque livre ne vaudra que 2^s ; la totalité du pain, à ces différens prix, montera, tous frais faits, à $68^1 18^s$; elle auroit été à $69^1 7^s 8^d$, si on n'eût pas négligé la fraction de $\frac{1}{4}$ de denier ou environ qu'exigeoit chacune des 551 livres de pain pour représenter l'une dans l'autre, sur le pied de $2^s 6^d \frac{1}{4}$ la livre, le prix du blé de $60^1 4^s$, avec celui de $9^1 3^s 8^d$ pour les frais de main-d'œuvre.

Si on suppose au contraire que les plus belles farines sont employées à composer le pain blanc, & qu'on en tire 420

livres sur le pied de 2^l 9^d chacune, alors le total de leur prix sera de 57^l 15^s; on aura encore 88 livres de pain de la seconde qualité, qui, sur le pied chacune de 1^l 11^d, vaudront en total 8^l 8^s 8^d; on aura enfin 43 livres de pain bis, dont le prix total, sur le pied d'un sou 6^d la livre, sera de 3^l 4^s 6^d: & ces trois sommes principales étant réunies formeront celle de 69^l 8^s 2^d, qui représentent, à 6 deniers près, le prix des 2 setiers $\frac{4}{7}$ de froment, & celui de la main-d'œuvre portés plus haut.

Telle est la marche qu'il nous paroît qu'on peut suivre pour régler le prix du pain, suivant la qualité qu'on jugera à propos d'y attacher, mais en ayant toujours égard, soit au poids de chacun des pains, soit à la forme qu'on leur donnera, puisqu'il est constant que les pains d'une livre, d'une demi-livre, & sur-tout de 4 onces, perdent beaucoup de leur poids au four, principalement si on leur donne une forme plate ou allongée; qu'ils exigent des frais extraordinaires, & sortent par-là du prix commun qui se trouve attaché aux pains de la même qualité, mais d'un poids très-supérieur: il seroit difficile de présenter une règle fixe sur ce point particulier; il faut l'abandonner à la prudence des Magistrats, & se borner à leur offrir des bases générales qui leur deviendront toujours avantageuses dans les circonstances même où l'esprit de justice les forcera de s'en écarter.

I I I.

IL est ordinaire à Paris de tirer, par la mouture économique, les trois quarts en farines différentes, d'une quantité de blé déterminée; on y compte sur un quarantième ou environ de déchet; ce qui reste de la quantité de blé qu'on a employée, compose les issues, c'est-à-dire, le gros & le menu son: on voit par-là que des 560 livres de froment net & d'une bonne qualité que nous avons prises pour exemple dans les deux articles précédens, on peut obtenir 420 livres de farine, dont 320 seront de la première qualité, 54 de la

la seconde, 26 de la troisième, & 20 livres seront les dernières farines bisées; il résultera 126 livres d'issues de ces 560 livres de froment, & 14 livres de déchet.

Quoique les déchets de mouture & de bluterie soient moins considérables dans la mouture à la grosse que dans celle qui est faite par économie, par la raison qu'on ne repasse pas les gruaux dans la première de ces moutures, tandis qu'il est de principe dans la seconde de faire passer à plusieurs reprises ces gruaux sous les meules, cependant le produit en farine est plus avantageux, plus constant dans la mouture économique que dans la mouture à la grosse, & la distinction des farines y est mieux établie: nous en avons fait l'observation dans l'*article premier*; & le tableau de nos expériences, auquel nous prions qu'on ait recours, en offre d'ailleurs les preuves détaillées.

Cette mouture économique plus utile que l'autre, fait des progrès rapides tous les jours; on la voit s'étendre d'une manière si marquée par le bénéfice qu'elle procure en favorisant le commerce des farines, que nous croyons qu'on peut commencer à la prendre pour base générale, tant des produits du blé en farine & des trois qualités de pain qu'il est assez d'usage d'en tirer, que de la taxe du pain, puisqu'on ne sauroit asséoir avec équité cette taxe que sur des produits à peu-près constans, tels qu'on les obtient de la mouture économique, & sur des farines assez bien distinguées pour que la valeur des différens pains qui en seront composés, se trouve toujours proportionnée, autant qu'il est possible, à la qualité de ces pains.

Ni le gros ni le menu son qui composent les issues, & qu'on a séparés des farines, ne doivent servir à faire du pain; outre qu'il n'en pourroit résulter qu'un aliment qui n'en auroit proprement que le nom, qui seroit mal-sain & indigeste, il ne vaudroit pas souvent le prix de la main-d'œuvre, & ne deviendrait utile qu'au boulanger qui parviendrait à le débiter.

Il seroit fort difficile de déterminer le déchet qui résulte

de l'opération du crible, du van, & de tout autre moyen de nettoyer les grains, puisque ce déchet dépend de l'état si différent quelquefois dans lequel est le blé avant qu'on le prépare pour l'exposer en vente. Il n'en est pas ainsi de la perte que le blé éprouve au moulin, on peut l'estimer comme nous l'avons déterminée avec assez de précision, parce qu'il est d'usage de ne faire passer le blé sous les meules, qu'après qu'il a subi l'opération du crible; parce que dans les moulins montés pour la mouture économique, les grains ne sont versés dans la trémie, pour passer sous les meules, qu'au sortir de ce même crible, lequel pour cet effet plus prompt, est placé fort près de l'ouverture qui communique à cette trémie, & fournit du blé net, à mesure que celui qui l'a précédé est converti en farine, & s'introduit dans les bluteaux.

L'avis que le Parlement veut bien demander à l'Académie sur l'essai fait à Rochefort, & sur le procès-verbal qui en a été la suite, en exécution de l'arrêt de la Cour du 17 Juin 1781, cet avis sort, pour ainsi dire, du résultat de nos expériences & du précis que nous venons de présenter. On a employé dans cet essai 1411 livres 4 onces de blé dont on a tiré 1201 livres 14 onces 4 gros de farines différentes, par la mouture à la grosse, & 1638 livres 4 onces de pain; on n'auroit obtenu à Paris de cette même quantité de blé, par la mouture la plus avantageuse, que 1058 livres 7 onces de farines différentes, & 1389 livres 4 onces ou à peu-près de pain, par une opération de boulangerie qu'on eût le mieux conduite. Dès-lors on a retiré à Rochefort 143 livres 7 onces 4 gros de plus en farine, qu'on n'en auroit eu à Paris, & 249 livres de plus en pain qu'on n'y en auroit obtenu; il est vrai que les déchets de mouture auroient été plus forts à Paris qu'on ne les a éprouvés à Rochefort, & qu'il a dû se trouver, dans l'essai qu'on y a fait, 15 à 16 livres de plus en pain de différentes qualités, qu'on n'en auroit obtenu à Paris, en supposant les choses parfaitement égales d'ailleurs; mais il s'agit, dans

l'essai de Rochefort, d'un excédant en pain de 249 livres, ou, à la rigueur, de 233 livres qui ont été prises sur le menu son ; qui, à Paris, ne seroient jamais sorties des opérations de boulangerie, eût-il fallu faire du pain bis ; & qui n'ont pu produire une augmentation si considérable sur le pain obtenu à Rochefort, qu'aux dépens de sa qualité, qu'autant que l'écorce atténuée du grain a passé confondue avec les farines à travers les soies des bluteaux ; & c'est sans doute une des causes de la quantité extraordinaire de pain qu'on a tirée à Rochefort des 1201 livres 14 onces 4 gros de farine dont il est fait mention dans le procès-verbal.

Qu'on suppose pour un moment que les 1411 livres 4 onces de blé employées à Rochefort, eussent rendu aussi à Paris 1201 livres 14 onces 4 gros de farine dans les qualités différentes qu'on y admet, pour convertir la farine en pain ; on n'auroit pu y tirer de cette même quantité de farine que 1577 livres 8 onces de pain tout au plus, c'est-à-dire 60 livres 12 onces de moins qu'on n'en a obtenu à Rochefort. On sent dès-lors que les farines très-bises, retenant l'eau avec beaucoup de ténacité, il est possible qu'une partie des pains faits à Rochefort, n'ait pas perdu au four tout l'excédant en eau qui auroit dû s'en évaporer, & que cette humidité surabondante dans le pain y ait été une des causes de la quantité surprenante qu'on en a obtenue dans l'essai de Rochefort.

Il y a long-temps que par une estimation générale qui approche assez de la vérité, mais sur laquelle le boulanger le plus habile est presque toujours en défaut, on regarde la livre de blé comme pouvant donner une livre de pain, déduction faite du son & des déchets. Il est aisé de voir sur le champ combien, dans l'expérience faite à Rochefort, le résultat est porté au-delà de cette estimation si favorable pour le produit en pain d'une quantité déterminée de blé ; on y a obtenu de 1411 livres 4 onces de froment, 1638 livres 4 onces de pain, c'est-à-dire 227 livres de

plus que la totalité des grains n'en auroit donné dans la supposition avantageuse d'une quantité de pain égale à celle du froment employé.

Si, après avoir remarqué la quantité considérable de pain qui est résultée de l'essai de Rochefort, on jette les yeux sur le tarif de cette ville fait en 1703, & qui avoit eu pour base celui de 1700 établi à la Rochelle, on verra au contraire qu'on n'y suppose qu'un produit de 320 livres de pain, comme tiré de 260 livres de farine, tandis qu'on obtiendrait aujourd'hui 340 livres de pain d'une quantité pareille de farine, ou qu'au moins on s'en écarteroit peu, en veillant à la chaleur du four. Malgré cette différence à laquelle on a vu que nous avons eu égard précédemment, en établissant avec raison nos calculs sur le plus fort des produits en pain dont il est question ici, nous croyons que ces deux tarifs peuvent-être employés utilement, quant au prix de la main-d'œuvre; qu'il ne s'agira que de répartir ce prix sur 340 livres de pain, au lieu de 320 livres auxquelles est borné dans ces tarifs le produit sur la quantité de 260 livres de farine qu'on y a déterminée.

Dans le temps où l'on a rédigé ces tarifs ils pouvoient être trop favorables aux boulangers; on y accordoit 6^t pour l'emploi d'une charge de 260 livres de farine de la première ou de la seconde qualité, à quelque prix qu'elle se trouvât; c'est-à-dire, qu'on donnoit aux boulangers 4 deniers $\frac{1}{2}$ par livre de pain, pour toutes leurs dépenses de quelque nature qu'elles fussent, & pour le bénéfice qu'ils étoient en droit d'attendre de leur travail; ce prix de main-d'œuvre descend à 4^d $\frac{4}{17}$ par la répartition des 6^t sur les 340 livres de pain, & rentre par-là dans les limites ordinaires de ce qui est accordé aux boulangers dans plusieurs Villes, au-delà de la valeur intrinsèque de la livre de pain. On remarque d'ailleurs que ces tarifs présentent la distinction utile des deux bases dont on a besoin pour bien taxer le pain, celle du prix intrinsèque, mais variable, mais toujours juste dans ses variations, de la livre de pain,

& celle du prix fixe, au moins pendant long-temps, des frais de main-d'œuvre qui sont dûs au boulanger. On observe enfin, avec une sorte de surprise, que ces tarifs, malgré l'augmentation assez considérable de la valeur de toutes les denrées, depuis plus de quatre-vingts ans, pourroient être adoptés aujourd'hui, en supposant le produit en pain sur 260 livres de farine, plus fort de 20 livres que ces tarifs ne l'ont déterminé; & en faisant descendre par-là, comme nous l'avons dit, le prix de la main-d'œuvre à $4^d \frac{4}{17}$ par livre de pain, au lieu de $4^d \frac{1}{2}$ auxquels ces mêmes tarifs l'ont fixé.

Mais c'est aux lumières & à la sagesse du Parlement que doit être réservée la décision de ce point important, sur lequel nous ne nous sommes expliqués que par une suite naturelle de notre travail & de la discussion qui l'a occasionné; il doit nous suffire d'avoir établi par voie d'expériences, suivant l'intention du Parlement, la première des bases sur lesquelles il est nécessaire d'asseoir la taxe du pain; & d'avoir préparé, à tout ce qui concerne la seconde base, par des exemples, des calculs rigoureux & des observations qui pourront en faciliter l'établissement.

S'il nous étoit permis cependant de nous expliquer d'une manière plus précise sur le moyen simple de régler actuellement le prix du pain à Rochefort, nous croirions qu'il conviendrait d'employer pour cette Ville le tarif qui a été fait pour la Rochelle en 1700, de l'y établir avec les changemens que nous avons déjà proposés, auxquels on ne sauroit se refuser, en considérant le produit en pain qu'il est ordinaire de tirer à Paris d'une quantité déterminée de farine, & qui ne peuvent que tourner à l'avantage du Public, par le prix un peu plus foible de la livre de pain auquel ils conduisent: il résulteroit de ces changemens fondés sur de justes raisons, qu'en même temps que le produit en pain, à quantités égales de farine, seroit proportionné à celui qu'obtiennent aujourd'hui les boulangers intelligens, il se trouveroit plus fort d'un seizième qu'on ne l'a supposé dans le tarif de 1700.

Nous jugerions également que le prix de 6^l accordé dans ce tarif pour la conversion en pain de 260 livres de farine, quelle qu'en soit la qualité, devroit être maintenu, puisqu'en supposant, d'après l'expérience, qu'il est possible de tirer 340 livres de pain de 260 livres de farine, le prix de la main-d'œuvre fixé dans ce tarif à 4^d $\frac{1}{2}$ par livre de pain, se trouvera réduit à 4^d $\frac{4}{17}$ par la répartition des 6^l sur 340 livres de pain, au lieu de 320 livres auxquelles on a borné, en 1700, le produit réel en pain de 260 livres de farine.

C'est sur ce tarif qu'a été rédigé à Rochefort celui de 1703 ; & il semble que ce tarif plus ancien, fait sur de bons principes à plusieurs égards dans la capitale du pays d'Aunis, soit destiné en quelque sorte à servir de règle commune dans les villes que ce pays comprend.

Si ce tarif, ou celui de 1703, rapproché ainsi de l'état actuel de la boulangerie, étoit adopté, les discussions qui se sont élevées souvent sur le montant réel des frais de main-d'œuvre, n'auroient plus lieu ; un prix fixe à cet égard, ou qui le seroit au moins pendant long-temps, feroit le repos du Magistrat, & tranquilliserait le boulanger ; il ne resteroit d'attention à donner qu'aux prix courans du blé & des farines dont on auroit toujours une connoissance exacte par les états qu'il est d'usage d'en tenir dans les halles chaque jour de marché ; & en conservant avec soin les deux bases de la taxe du pain qu'on auroit une fois posées, sauf les variations de la valeur du blé, qui sont toujours prévues dans les tarifs, on écarteroit les contestations, ou au moins on les réduiroit à une seule aisée à terminer, celle qui regarderoit le prix moyen du blé & des farines dans les villes où le tarif seroit établi.

Nota. La contestation qui a donné lieu aux Expériences dont on vient de rendre compte, & aux conséquences qu'il a paru juste d'en tirer, a été terminée le 2 Juillet 1785, par un arrêt du Parlement, qui entérine le Rapport des Commissaires de l'Académie des Sciences, dont il s'agit, & ordonne que le tarif de 1703 sera suivi à l'avenir dans la ville de Rochefort.



T A B L E A U.

C O N O M I Q U E.

	TOTAL des Farines données par les deux sortes de Blés.	TOTAL des I S S U E S.	TOTAL des D É C H E T S.	RÉCAPITULATIONS.
11 ^{onc} .	1096 ^l			Farines... 2110 ^l 11 ^{onc} Issues..... 646. 8. Déchets.. 71. 4.
				2827. 12.
8.	324 ^l 8 ^{onc}		
8.	31 ^l 8 ^{onc}	
11				
11	1014.			
	2110.			
11	322. //		
		646. 8.		
12.	39. 12.	
12.			71. 4.	

PREMIER TABLEAU.

MOUTURE ÉCONOMIQUE.

	PRODUITS EN FARINES.		TOTAL des Farines données par les deux fortes de BLÉS.	TOTAL des ISSUES.	TOTAL des DÉCHETS.	RÉCAPITULATIONS.
1. ^{re} EXPÉRIENCE sur 6 setiers de Blé de 1781, criblé, & pesant 1452 livres.	Farine de blé de la première qualité.....	583 ^l 8 ^{ne} .	1096 ^l 8 ^{ne} .	1096 ^l		Farines... 2110 ^l 8 ^{ne} .
	1. ^{re} Farine de gruau.....	286. 8.				Issues.... 646. 8.
	2. ^e de gruau.....	122. 8.				Déchets.. 71. 4.
	3. ^e	57. "				
	4. ^e	47. "				2827. 12.
	PRODUITS EN ISSUES.					
	Remoulage de gruau....	43. "	324. 8.	324 ^l 8 ^{ne}	31 ^l 8 ^{ne}	
	Remoulage bis.....	94. 8.				
	Recoupes.....	119. "				
	Gros son.....	68. "				
	Déchets.....	31. 8.				
2. ^e EXPÉRIENCE, 6 setiers de Blé de 1782, criblé, & pesant 1375 ^l 12 ^{ne} .		1452. "				
	Farine de la 1. ^{re} qualité..	454. "	1014. "	1014.	2110.	
	Farine de 1. ^{er} gruau....	280. "				
	Farine de 2. ^e gruau....	151. 8.				
	De 3. ^e	64. "				
	De 4. ^e	64. 8.				
	PRODUITS EN ISSUES.					
	Remoulage de gruau....	44. "	322. "	322. "	646. 8.	
	Remoulage bis.....	106. 8.				
	Recoupes.....	65. 8.				
	Gros son.....	106. "				
	Déchets.....	39. 12.				30. 12.
TOTAL DU BLÉ. 1452 ^l 8 ^{ne} . 1375. 12. 2827. 12.			1375. 12.			71. 4.

TABLEAU.

LA GROSSE.

	TOTAL des Farines données par les deux sortes de BLÉS.	TOTAL des ISSUES.	TOTAL des DÉCHETS.	RÉCAPITULATIONS.
nc.	1071'			Farines... 2068. "
				Issues.... 721. "
				Déchets.. 38. 12.
				2827. 12.
8.	364' 8 ^{onc}		
8.	16' 8 ^{onc}	
"				
"	997.			
	2068.			
8.	356. 8.		
		721. "		
4.	22. 4.	
2.			38. 12.	

DEUXIÈME TABLEAU.

MOUTURE À LA GROSSE.							
	PRODUITS EN FARINES.		TOTAL des Farines données par les deux foires de BLES.	TOTAL des ISSUES.	TOTAL des DÉCHETS.	RÉCAPITULATIONS.	
3. ^e EXPÉRIENCE sur 6 setiers de Blé de 1781, criblé, & pesant 1452 livres.	Farine de la 1. ^{re} qualité. 701 ^l 8 ^{onc} .	1071 ^l 11 ^{onc} .	1071 ^l			Farines . . . 2068. "	
	De la 2. ^e qualité. 136. 8.					Issues. . . 721. "	
	De la troisième farine bise. 233. "					Déchets . . . 38. 12.	
	PRODUITS EN ISSUES.						2827. 12.
4. ^e EXPÉRIENCE sur 6 setiers de Blé de 1782, criblé, & pesant 1375 ^l 12 ^{onc} .	Gros son. 117. "	364. 8.	364 ^l 8 ^{onc}	16 ^l 8 ^{onc}			
	Recoupes. 99. "						
	Recoupettes. 148. 8.						
	Déchets.	16. 8.					
		1452. "					
	Farine de la 1. ^{re} qualité. 685. "	997. "	997.	2068.			
	De la 2. ^e qualité, ou bis-blanc. 162. "						
	De la 3. ^e qualité, ou farine bise. 150. "						
	PRODUITS EN ISSUES.						
	Gros son. 120. 8.	356. 8.	356. 8.	721. "	22. 4.		
	Recoupes. 122. 8.						
	Recoupettes. 113. 8.						
TOTAL DU BLÉ.	Déchets.	22. 4.					
		1375. 12.			38. 12.		

aux qui sont établis dans les Tableaux précédens.

		<i>MOUTURE À LA GROSSE.</i>	
		liv.	onc.
Un setier de Blé de 1781, pesant 242 livres.	Farines différentes.....	178.	8
	Issues.....	60.	12
	Déchet.....	2.	12
		242.	"
Autre setier de Blé de 1782, pesant 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$.	Farines différentes.....	166.	2 $\frac{2}{3}$
	Issues.....	59.	6 $\frac{2}{3}$
	Déchet.....	3.	11 $\frac{1}{3}$
		229.	4 $\frac{2}{3}$
		liv.	onc.
Blé de 1781....		242.	"
Blé de 1782....		229.	4 $\frac{2}{3}$
Différ. sur le poids du Blé.....		12.	11 $\frac{1}{3}$
Farines de 1781..		178.	8
Farines de 1782..		166.	2 $\frac{2}{3}$
Différ. sur le poids des Farines.....		12.	5 $\frac{1}{3}$

E S.

	liv.	onc.
du Blé de 1781.....	54.	1 $\frac{1}{3}$
du Blé de 1782.....	53.	10 $\frac{2}{3}$
sur le Blé de 1781.....	"	6 $\frac{2}{3}$
du Blé de 1781.....	60.	12
du Blé de 1782.....	59.	6 $\frac{2}{3}$
sur le Blé de 1781.....	1.	5 $\frac{1}{3}$

E T S.

	liv.	onc.
Blé de 1781.....	5.	4
Blé de 1782.....	6	10
sur le Blé de 1782.....	1.	6
Blé de 1781.....	2.	12
Blé de 1782.....	3.	11 $\frac{1}{3}$
sur le Blé de 1782.....	"	15 $\frac{1}{3}$

PRODUITS DIFFÉRENS d'un setier de Blé, d'après ceux qui sont établis dans les Tableaux précédens.

<i>MOUTURE ÉCONOMIQUE.</i>		<i>MOUTURE À LA GROSSE.</i>	
Un setier de Blé de 1781, pesant 242 livres.	<div> <div>liv. enc.</div> <div>182. 10 $\frac{1}{2}$</div> <div>54. 1 $\frac{1}{2}$</div> <div>5. 4</div> <div>242. "</div> </div>	Un setier de Blé de 1781, pesant 242 livres.	<div> <div>liv. enc.</div> <div>178. 8</div> <div>60. 12</div> <div>2. 12</div> <div>242. "</div> </div>
Autre setier de Blé de 1782, pesant 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$.	<div> <div>liv. enc.</div> <div>169. "</div> <div>53. 10 $\frac{2}{3}$</div> <div>6 10</div> <div>229. 4 $\frac{1}{3}$</div> </div>	Autre setier de Blé de 1782, pesant 229 livres 4 onces $\frac{2}{3}$.	<div> <div>liv. enc.</div> <div>166. 2 $\frac{2}{3}$</div> <div>59. 6 $\frac{2}{3}$</div> <div>3. 11 $\frac{2}{3}$</div> <div>229. 4 $\frac{1}{3}$</div> </div>
	<div> <div>liv. enc.</div> <div>242. "</div> <div>229. 4 $\frac{1}{3}$</div> </div>		
	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Blé de 1781... 242. "</div> <div>Blé de 1782... 229. 4 $\frac{1}{3}$</div> </div>		<div> <div>liv. enc.</div> <div>Blé de 1781... 242. "</div> <div>Blé de 1782... 229. 4 $\frac{1}{3}$</div> </div>
	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Différ. sur le poids du Blé... 12. 11 $\frac{1}{2}$</div> </div>		<div> <div>liv. enc.</div> <div>Différ. sur le poids du Blé... 12. 11 $\frac{1}{2}$</div> </div>
	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Farines de 1781... 182. 10 $\frac{1}{2}$</div> <div>Farines de 1782... 169. "</div> </div>		<div> <div>liv. enc.</div> <div>Farines de 1781... 178. 8</div> <div>Farines de 1782... 166. 2 $\frac{2}{3}$</div> </div>
	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Différ. sur le poids des Farines... 13. 10 $\frac{2}{3}$</div> </div>		<div> <div>liv. enc.</div> <div>Différ. sur le poids des Farines... 12. 5 $\frac{1}{3}$</div> </div>

ISSUES.

<i>MOUTURE ÉCONOMIQUE...</i>	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Celles du Blé de 1781... 54. 1 $\frac{1}{2}$</div> <div>Celles du Blé de 1782... 53. 10 $\frac{2}{3}$</div> <div>En plus sur le Blé de 1781... " 6 $\frac{2}{3}$</div> </div>
<i>MOUTURE À LA GROSSE...</i>	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Celles du Blé de 1781... 60. 12</div> <div>Celles du Blé de 1782... 59. 6 $\frac{2}{3}$</div> <div>En plus sur le Blé de 1781... " 1. 5 $\frac{1}{3}$</div> </div>

DÉCHETS.

<i>MOUTURE ÉCONOMIQUE...</i>	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Ceux du Blé de 1781... 5. 4</div> <div>Ceux du Blé de 1782... 6 10</div> <div>En plus sur le Blé de 1782... " 1. 6</div> </div>
<i>MOUTURE À LA GROSSE...</i>	<div> <div>liv. enc.</div> <div>Ceux du Blé de 1781... 2. 12</div> <div>Ceux du Blé de 1782... 3. 11 $\frac{1}{3}$</div> <div>En plus sur le Blé de 1782... " 15 $\frac{1}{3}$</div> </div>

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES
POUR RÉSOUDRE
DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.

DIX-HUITIÈME MÉMOIRE,

*Dans lequel on applique à la détermination de la
parallaxe de Mars , les Formules analytiques
démontrées dans les Mémoires précédens.*

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

Exposition du Sujet.

(1.) **D**ANS mon seizième Mémoire, j'ai calculé avec la plus grande généralité les observations des passages de Vénus des 6 Juin 1761 & 3 Juin 1769, afin d'en conclure la parallaxe moyenne du Soleil. Je me propose dans ce Mémoire, d'appliquer des méthodes également générales, au calcul des observations de Mars faites en 1751, pour déterminer pareillement la parallaxe moyenne du Soleil. Les Astronomes verront sans doute avec plaisir la comparaison des résultats donnés par ces deux méthodes; je ferai usage des formules qui m'ont déjà servi à déterminer la constante de la parallaxe horizontale polaire de la Lune (*Mémoires de l'Académie, année 1782*).

(2.) Je n'entreprendrai point de calculer toutes les Observations faites en 1751, pour déterminer la parallaxe de Mars; je me contenterai de discuter celles qui ont eu des correspondantes dans les principaux Observatoires de l'Europe. Je commencerai par les Observations faites à l'Observatoire royal de Paris & à Gréenwich. Voici le détail de ces Observations, tel qu'il m'a été donné par M. Cassini de Thury, & que j'ai comparé à la notice que l'on en trouve

264 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
dans les Mémoires de l'Académie, pour les années 1748,
1752 & 1760.

*Notice des Observations correspondantes, faites en 1751
au cap de Bonne-espérance, par M. l'abbé de la Caille ;
à l'Observatoire royal de Paris, par M.^{rs} Cassini de Thury
& le Gentil ; & à Gréenwich, par M. Bradley.*

Observation du 31 Août 1751.

(3.) Le 31 Août 1751, la distance de Mars au zénith,
lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de l'étoile
33.^e des Poissons au zénith, ont été observées au Cap & à
Gréenwich.

Cap.

Distance au zénith de l'étoile 33.^e des Poissons... 26^d 49' 5".7.

Distance au zénith du limbe boréal de Mars.... 26. 38. 47,3.

Limbe boréal de Mars, plus austral que l'Étoile. 0. 10. 18,4.

Gréenwich.

Distance au zénith de l'étoile 33.^e des Poissons... 58. 32. 58,0.

Distance au zénith du centre de Mars..... 58. 44. 16,0.

Centre de Mars plus austral que l'Étoile..... 0. 12. 21,0.

Dans l'intervalle de l'Observation du Cap à celle de
Gréenwich, Mars avoit éprouvé une augmentation de 14",8
dans sa déclinaison australe.

Observation du 13 Septembre 1751.

(4.) Le 13 Septembre 1751, la distance de Mars au
Zénith, lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur
de Rigel, ont été observées au Cap, à Paris & à Gréenwich.

Cap.

Distance au zénith du bord boréal de Mars..... 25. 33. 14,9.

Distance de Rigel au zénith..... 25. 24. 23,4.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel. 0. 8. 51,5.

Paris.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.....	32 ^d 50' 0",0.
Hauteur de Rigel.....	32. 41. 46,8.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel. 0. 18. 13,2.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 11 secondes dans sa déclinaison australe.

M. Cassini pense que la distance du limbe boréal de Mars à Rigel, observée à Paris, doit être diminuée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Gréénwich.

Distance du centre de Mars au zénith.....	59. 49. 46,5.
Distance de Rigel au zénith.....	59. 57. 37,0.

Centre de Mars plus boréal que Rigel. 0. 7. 50,5.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Gréénwich, Mars avoit éprouvé une augmentation de 13 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 14 Septembre 1751.

(5.) Le 14 Septembre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de Rigel au zénith, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith....	25. 29. 5,2.
Distance de Rigel au zénith.....	25. 24. 22,0.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel. ... 0. 4. 43,2.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.....	32. 45. 50,2.
Hauteur de Rigel.....	32. 41. 46,8.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel. ... 0. 4. 3,4.

Mém. 1783.

L1

M. Cassini pense que cette dernière quantité doit être diminuée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du limbe boréal de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 11 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 24 Septembre 1751.

(6.) Le 24 Septembre 1751, la distance de Mars au zénith, lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur de λ du Verseau, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith.....	24 ^d 59' 43".7.
Distance de λ du Verseau au zénith.....	25. 1. 23,2.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau.....	0. 1. 39,5.
---	-------------

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars.....	32. 16. 32,7.
Hauteur de λ du Verseau.....	32. 18. 51,0.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau.....	0. 2. 18,3.
---	-------------

Suivant M. Cassini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 25 Septembre 1751.

(7) Le 25 Septembre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur de λ du Verseau, ont été observées au Cap & à Paris.

*Cap.*Distance du limbe boréal de Mars au zénith... 24^d 58' 11",7.Distance de λ du Verseau au zénith... 25. 1. 26,3.Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau... 0. 3. 14,6.*Paris.*

Hauteur du limbe boréal de Mars... 32. 15. 16,0.

Hauteur de λ du Verseau... 32. 18. 51,0.Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau... 0. 3. 35,0.

Suivant M. Cassini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui a fait paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'Observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 26 Septembre 1751.

(8.) Le 26 Septembre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la hauteur de λ du Verseau, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith... 24. 56. 56,6.

Distance de λ du Verseau au zénith... 25. 1. 26,3.Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau... 0. 4. 29,7.*Paris.*

Hauteur du limbe boréal de Mars... 32. 14. 1,0.

Hauteur de λ du Verseau... 32. 18. 55,0.Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau... 0. 4. 54,0.

Suivant M. Cassini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui faisoit paroître la hauteur du limbe boréal de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 secondes dans sa déclinaison australe.

Observation du 3 Octobre 1751.

(9.) Le 3 Octobre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap, à Paris & à Gréénwich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith . . . 24^d 57' 4",6.

Distance de λ du Verseau au zénith 25. 1. 19,7.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . 0. 4. 15,1.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars 32. 14. 14,0.

Hauteur de λ du Verseau 32. 18. 50,0.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . 0. 4. 36,0.

D'après M. Caffini, cette dernière quantité doit être augmentée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui faisoit paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une diminution de 3 secondes dans sa déclinaison australe.

Gréénwich.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith . . 60. 25. 16,5.

Distance de λ du Verseau au zénith 60. 20. 34,0.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . 0. 4. 42,5.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Gréénwich, Mars avoit éprouvé une diminution de 3",2 dans sa déclinaison australe,

Observation du 4 Octobre 1751.

(10.) Le 4 Octobre 1751, la distance de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Greenwich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith... $24^d \ 58' \ 16'',3$.

Distance de λ du Verseau au zénith..... $25. \ 1. \ 14,5$.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau... $0. \ 2. \ 58,2$.

Greenwich.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith... $60. \ 23. \ 59,0$.

Distance de λ du Verseau au zénith..... $60. \ 20. \ 33,0$.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau... $0. \ 3. \ 26,0$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Greenwich, Mars avoit éprouvé une diminution de $3'',2$ dans sa déclinaison australe.

Observation du 7 Octobre 1751.

(11.) Le 7 Octobre 1751, la distance du limbe boréal de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Greenwich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith... $25. \ 3. \ 57,8$.

Distance de λ du Verseau au zénith..... $25. \ 1. \ 21,2$.

Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau... $0. \ 2. \ 36,6$.

Greenwich.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith... $60. \ 18. \ 16,5$.

Distance de λ du Verseau au zénith..... $60. \ 20. \ 32,5$.

Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau... $0. \ 2. \ 16,0$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de

Gréenvich, Mars avoit éprouvé une diminution de 7",4 dans la déclinaison australe.

Observation du 8 Octobre 1751.

(12.) Le 8 Octobre 1751, la distance du limbe boréal de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Paris.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith.. 25^d 6' 29",1.

Distance de λ du Verseau au zénith..... 25. 1. 20,6.

Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau.. 0. 5. 8,5.

Paris.

Hauteur du limbe boréal de Mars..... 32. 23. 45,3.

Hauteur de λ du Verseau..... 32. 18. 55,0.

Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau.. 0. 4. 50,3.

M. Cassini pense que cette dernière quantité doit être diminuée de 3 secondes, pour avoir égard à l'épaisseur du fil du micromètre qui faisoit paroître la hauteur du bord supérieur de Mars trop grande de 3 secondes.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Paris, Mars avoit éprouvé une diminution de 7 secondes dans la déclinaison australe.

Observation du 9 Octobre 1751.

(13.) Le 9 Octobre 1751, la distance du limbe boréal de Mars au zénith lors du passage au Méridien, ainsi que la distance de λ du Verseau au zénith, ont été observées au Cap & à Gréenvich.

Cap.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith.. 25. 9. 18,6.

Distance de λ du Verseau au zénith..... 25. 1. 21,2.

Limbe boréal de Mars moins aust. que λ du Verseau.. 0. 7. 57,4.

Gréénwich.

Distance du limbe boréal de Mars au zénith... $60^{\text{d}} 13' 0'',0$.

Distance de λ du Verseau au zénith..... $60. 20. 35,0$.

Limbe boréal de Mars moins aut. que λ du Verseau... $0. 7. 35,0$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Gréénwich, Mars avoit éprouvé une diminution de 10 secondes dans sa déclinaison australe.

Équations dont nous avons fait usage dans ce Mémoire.

(14.) Soit

r le demi-petit axe de la Terre ;

ρ le demi-grand axe ;

δ la déclinaison apparente de Mars.

Observation du Cap.

l la latitude corrigée du Cap ;

$R = \cos. \delta \sin. l - \rho \sin. \delta \cos. l$.

Observation correspondante faite en Europe.

l' la latitude corrigée du lieu ;

$R' = \cos. \delta \sin. l' - \rho \sin. \delta \cos. l'$;

soit de plus

distance de Mars à la Terre $= \sqrt{[\text{distance}^2 \text{ de Mars au Soleil} + \text{distance}^2 \text{ de la Terre au Soleil} - 2 \times \text{distance de la Terre} \times \text{distance de Mars} \times \cos. (\text{angle au Soleil})]}$.

Les distances de Mars & de la Terre au Soleil, doivent être évaluées en parties telles que la moyenne distance du Soleil à la Terre $= 1$; l'on a d'ailleurs

$\cos. (\text{angle au Soleil}) = \cos. (\text{latitude héliocentrique de Mars})$

$\cos. (\text{différence de longitude hélioc. de la Terre & de Mars})$;

γ = le nombre de secondes dont le limbe boréal de Mars est plus boréal que l'Étoile à laquelle il a été comparé au Cap

— le nombre de secondes dont le limbe boréal de Mars est plus boréal que l'Étoile à laquelle il a été comparé en Europe

+ le nombre de secondes dont Mars s'est approché du Pôle boréal de l'Équateur dans l'intervalle des deux Observations ;

- $d\gamma = d$ (nombre de secondes dont le limbe boréal de Mars est plus boréal qu'on ne l'a supposé lors de l'observation du Cap)
 $- d$ (nombre de secondes dont le limbe boréal de Mars est plus boréal qu'on ne l'a supposé lors de l'observation faite en Europe)
 $+ d$ (nombre de secondes dont Mars s'est approché du Pôle boréal de l'équateur dans l'intervalle des deux Observations);

J'ai fait usage des équations suivantes, démontrées dans mes précédens Mémoires.

$$(1) \text{ Parallaxe du Soleil dans sa moyenne distance } = \frac{\gamma}{R' - R}$$

$$\text{distance de Mars à la Terre} + \frac{1}{R' - R} \text{ distance de Mars à}$$

$$\text{la Terre } d\gamma + \frac{\gamma}{R' - R} d \text{ distance de Mars à la Terre.}$$

Évaluation des quantités γ , correspondantes aux observations précédentes.

(15.) Au moyen des formules précédentes, on parviendra aux résultats suivans.

Observation du 31 Août 1751.

Cap & Gréenwich.

$$\gamma = 47'',8 - \text{demi-diamètre de Mars;}$$

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation ,

$$\text{déclinaison de Mars} = 7^{\circ} 24' 1'' \text{ australe;}$$

$$\text{distance de Mars à la Terre} = 0,38810.$$

Observation du 13 Septembre 1751.

Cap & Paris.

Cap & Gréenwich.

$$\gamma = 30'',3;$$

$$\gamma = 48'',0 - \text{demi-diamètre de Mars;}$$

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation ,

$$\text{déclinaison de Mars.} = 8^{\circ} 25' 18'' \text{ australe;}$$

$$\text{distance de Mars à la Terre} = 0,38331.$$

Observation du 14 Septembre 1751.

Cap & Paris.

$$\gamma = 31'',9;$$

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation,

Déclinaison de Mars = $8^{\text{d}} 29' 30''$ australe;

Distance de Mars à la Terre = $0,38410$.

Observation du 24 Septembre 1751.

Cap & Paris.

$\gamma = 37'',8$;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation,

Déclinaison de Mars = $8^{\text{d}} 58' 45''$ australe;

Distance de Mars à la Terre = $0,39824$.

Observation du 25 Septembre 1751.

Cap & Paris.

$\gamma = 19'',6$;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation,

Déclinaison de Mars = $9^{\text{d}} 0' 18''$ australe;

Distance de Mars à la Terre = $0,40106$.

Observation du 26 Septembre 1751.

$\gamma = 23'',3$;

on avoit d'ailleurs relativement à cette Observation,

Déclinaison de Mars = $9^{\text{d}} 1' 30''$ australe;

Distance de Mars à la Terre = $0,40369$.

Observation du 3 Octobre 1751.

Cap & Paris.

$\gamma = 26'',9$.

Cap & Greenwich.

$\gamma = 30'',6$;

on avoit d'ailleurs pour cette Observation,

Déclinaison de Mars = $9^{\text{d}} 1' 51''$ australe;

Distance de Mars à la Terre = $0,42409$.

Observation du 4 Octobre 1751.

Cap & Greenwich.

$\gamma = 31'',0$;

Mém. 1783.

M m

on avoit d'ailleurs pour cette Observation ,

Déclinaison de Mars = $9^{\text{d}} 0' 27''$ australe ;

Distance de Mars à la Terre = 0,42731.

Observation du 7 Octobre 1751.

Cap & Gréénwich.

$$\gamma = 27'',6;$$

on avoit d'ailleurs pour cette Observation ,

Déclinaison de Mars = $8^{\text{d}} 54' 37''$ australe ;

Distance de Mars à la Terre = 0,43817.

Observation du 8 Octobre 1751.

Cap & Paris.

$$\gamma = 28'',2;$$

on avoit d'ailleurs pour cette Observation ,

Déclinaison de Mars = $8^{\text{d}} 52' 8''$ australe ;

Distance de Mars à la Terre = 0,44233.

Observation du 9 Octobre 1751.

Cap & Gréénwich.

$$\gamma = 32'',4;$$

on avoit d'ailleurs pour cette Observation ,

Déclinaison de Mars = $8^{\text{d}} 49' 22''$ australe ,

Distance de Mars à la Terre = 0,44673.

Équations relatives aux Observations faites à l'Observatoire Royal de Paris.

(16.) Si l'on applique des nombres aux équations du §. 14, & que l'on nomme pour chaque observation particulière

$d\gamma$ la différence entre la véritable valeur de γ & celle employée dans le calcul ;

d distance de Mars à la Terre , la différence entre la véritable distance de Mars à la Terre & celle employée dans le calcul ,

l'on aura relativement aux observations faites à l'Observatoire Royal de Paris.

Observation du 13 Septembre 1751.

- (1) Parallaxe moyenne du Soleil = $9'',151 + 0,302 d \gamma$
 $+ 23'',9 d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 14 Septembre 1751.

- (2) Parallaxe moyenne du Soleil = $9'',666 + 0,303 d \gamma$
 $+ 24'',0 d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 24 Septembre 1751.

- (3) Parallaxe moyenne du Soleil = $11'',908 + 0,315 d \gamma$
 $+ 31'',0 d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 25 Septembre 1751.

- (4) Parallaxe moyenne du Soleil = $6'',213 + 0,317 d \gamma$
 $+ 15'',5 d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 26 Septembre 1751.

- (5) Parallaxe moyenne du Soleil = $7'',437 + 0,319 d \gamma$
 $+ 18'',4 d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 3 Octobre 1751.

- (6) Parallaxe moyenne du Soleil = $9'',011 + 0,335 d \gamma$
 $+ 21'',2 d$ distance de Mars à la Terre.

Observation du 8 Octobre 1751.

- (7) Parallaxe moyenne du Soleil = $9'',840 + 0,349 d \gamma$
 $+ 22'',3 d$ distance de Mars à la Terre.

(17.) Si dans les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7).
 du paragraphe précédent, l'on suppose

$$d\gamma = 0; d \text{ distance de Mars à la Terre} = 0,$$

& que l'on additionne toutes ces équations, l'on aura pour
 valeur moyenne de la parallaxe moyenne du Soleil,

- (1) Parallaxe moyenne du Soleil = $9'',032.$

M m ij

Si l'on rejette les équations (3) & (4) qui s'éloignent le plus du résultat moyen, mais en sens contraire, l'on aura

$$(2) \text{ Parallaxe moyenne du Soleil} = 9'',011.$$

Équations relatives aux observations faites à Grèenwich.

(18.) Si l'on applique des nombres aux équations du §. 14, & que l'on suppose le demi-diamètre de Mars de $16'',0$, lors des observations des 31 Août & 4 Septembre 1751, & que l'on nomme pour chaque observation particulière,

$d\gamma$ la différence entre la véritable valeur de γ & celle employée dans les calculs;

d distance de Mars à la Terre, la différence entre la véritable distance de Mars & celle employée dans les calculs;

d demi-diamètre de Mars, la différence entre le véritable demi-diamètre de Mars & celui employé dans les calculs;

on aura relativement aux observations faites à Grèenwich,

Observation du 31 Août 1751.

$$(1) \text{ Parall. moyenne } \odot = 9'',508 - 0,299 d \text{ demi-diam. Mars.} \\ + 0,299 d\gamma + 24'',8 d \text{ distance de Mars à la Terre.}$$

Observation du 13 Septembre 1751.

$$(2) \text{ Parall. moyenne } \odot = 9'',484 - 0,297 d \text{ demi-diam. Mars.} \\ + 0,297 d\gamma + 24'',8 d \text{ distance de Mars à la Terre.}$$

Observation du 3 Octobre 1751.

$$(3) \text{ Parallaxe moyenne du Soleil} = 10'',067 + 0,329 d\gamma \\ + 23'',7 d \text{ distance de Mars à la Terre.}$$

Observation du 4 Octobre 1751.

$$(4) \text{ Parallaxe moyenne du Soleil} = 10'',292 + 0,332 d\gamma \\ + 23'',8 d \text{ distance de Mars à la Terre.}$$

Observation du 7 Octobre 1751.

$$(5) \text{ Parallaxe moyenne du Soleil} = 9'',416 + 0,341 d\gamma \\ + 21'',4 d \text{ distance de Mars à la Terre.}$$

Observation du 9 Octobre 1751.

- (6) Parallaxe moyenne du Soleil = $11^{\prime},211 + 0,346 d \gamma$
 + $25^{\prime},1$ *d* distance de Mars à la Terre.

(19.) Si dans les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) du *paragraphe précédent*, l'on suppose $d \gamma = 0$, *d* demi-diamètre de Mars = 0, *d* distance de Mars à la Terre = 0, & que l'on additionne toutes ces équations, l'on aura pour valeur moyenne de la parallaxe moyenne du Soleil,

- (1) Parallaxe moyenne du Soleil = $9^{\prime},999$.

Si l'on rejette l'équation (6) qui s'éloigne trop sensiblement du résultat moyen, pour qu'il n'y ait point une erreur dans les observations, l'on aura

- (2) Parallaxe moyenne du Soleil = $9^{\prime},753$.

Suite des recherches de la parallaxe du Soleil.

(20.) Pour avoir une idée complète de la parallaxe du Soleil que l'on conclut des observations faites en 1751, il faudroit discuter avec le même détail toutes les observations qui ont eu lieu à cette époque. Comme ce travail m'engageroit dans des discussions trop considérables, & qu'il m'écarteroit peut-être de la vérité en faisant participer les bonnes observations à l'inexactitude de celles qui sont moins parfaites, je vais présenter seulement le résultat des Observations faites par les Observateurs les plus célèbres.

Notice des Observations correspondantes faites en 1751, au Cap, par M. l'abbé de la Caille; à Bologne, par M. Zanotti; à Stockholm, par M. Wargentin; & à Upsal, par M. Strommer.

Observation du 31 Août 1751.

(21.) Le 31 Août 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à l'étoile trentième des Poissons; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de $0,38810$, & sa déclinaison de $7^{\text{d}} 24' 1''$ australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile 30.^e des Poissons. 2' 48",1.

Bologne.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile 30.^e des Poissons. 2' 12",5.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5",5 dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 30'',1.$$

Observation du 1.^{er} Septembre 1751.

(22.) Le 1.^{er} Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap, aux étoiles 30.^e & 33.^e des Poissons; à Bologne, à l'étoile 30.^e des Poissons; & à Stockolm, à l'étoile 33.^e des Poissons; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38685, & sa déclinaison de 7^d 28' 46" australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 30.^e des Poissons. 2' 0",2.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33.^e des Poissons. 10' 18",4.

Bologne.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 30.^e des Poissons. 2' 36",3.

Stockolm.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33.^e des Poissons. 10' 54",1.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5",4 dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 30'',6.$$

Cap & Stockolm.

$$\gamma = 35'',7.$$

Observation du 2 Septembre 1751.

(23.) Le 2 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Upsal, à l'étoile 33.^e des Poissons;

la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38560,
& sa déclinaison de $7^{\text{d}} 33' 31''$ australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33° des Poissons. $2' 0'', 2.$

Upsal.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'étoile 33° des Poissons. $2' 35'', 5.$

Cap & Upsal.

$$\gamma = 35'', 1.$$

Observation du 13 Septembre 1751.

(24.) Le 13 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à Rigel; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38331, & la déclinaison de $8^{\text{d}} 25' 18''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel..... $8' 51'', 5.$

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel..... $8' 14'', 1.$

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une augmentation de 5 secondes dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 32'', 4.$$

Observation du 14 Septembre 1751.

(25.) Le 14 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut pareillement comparé, au Cap & à Bologne, à Rigel; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38410, & sa déclinaison de $8^{\text{d}} 29' 30''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel..... $4' 43'', 2.$

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus boréal que Rigel. 4' 5",1.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne ; Mars avoit éprouvé une augmentation de 5 secondes dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 33",1.$$

Observation du 24 Septembre 1751.

(26.) Le 24 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Upsal, à l'étoile λ du Verseau ; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,39824, & sa déclinaison de 8^d 58' 45" australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. 1' 39",5.

Upsal.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. 2' 23",0.

Cap & Upsal.

$$\gamma = 43",5.$$

Observation du 25 Septembre 1751.

(27.) Le 25 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé au Cap, à Bologne, à Upsal & à Stockolm, à l'étoile λ du Verseau ; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,40106, & sa déclinaison de 9^d 0' 18" australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. 3' 14",6.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. 3' 39",6.

Upsal.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. 3' 48",8.

Stockolm.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau $3' 52'',6$,

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne ,
Mars avoit éprouvé une augmentation de $1'',6$ dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 23'',4.$$

Cap & Upsal.

$$\gamma = 34'',2.$$

Cap & Stockolm.

$$\gamma = 38'',0.$$

Observation du 27 Septembre 1751.

(28.) Le 27 Septembre 1751 , le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne , à l'étoile λ du Verseau ; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de $0,40620$, & sa déclinaison de $9^d 2' 22''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau $5' 29'',0$.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau $5' 45'',7$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne ,
Mars avoit éprouvé une augmentation de $0'',7$ dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 16'',0.$$

Observation du 3 Octobre 1751.

(29.) Le 3 Octobre 1751 , le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Stockolm , à l'étoile λ du Verseau ; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de $0,42409$, & sa déclinaison de $9^d 1' 51''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau $4' 15'',1$.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau $4' 58'',1$.

Cap & Stockolm.

$$\gamma = 43'',0.$$

Mém. 1783.

N n

Observation du 5 Octobre 1751.

(30.) Le 5 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Stockolm, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,43067, & sa déclinaison de $8^d 58' 47''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. $1' 25'',8$.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. $2' 0'',1$.

Cap & Stockolm.

$$\gamma = 34'',3.$$

Observation du 6 Octobre 1751.

(31.) Le 6 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap, à Upsal & à Stockolm, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre, étoit ce jour-là de 0,43416, & sa déclinaison de $8^d 56' 50''$.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau. $0' 26'',7$.

Upsal.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. $0' 3'',3$.

Stockolm.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau. $0' 6'',3$.

Cap & Upsal.

$$\gamma = 30'',0.$$

Cap & Stockolm.

$$\gamma = 33'',0.$$

Observation du 7 Octobre 1751.

(32.) Le 7 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Bologne, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,43817, & sa déclinaison de $8^d 54' 37''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau 2' 36",6.

Bologne.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau 2' 8",2,

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Bologne, Mars avoit éprouvé une diminution de 2",6 dans sa déclinaison australe.

Cap & Bologne.

$$\gamma = 31",0.$$

Équations relatives aux Observations précédentes.

(33.)

Bologne.

- 31 Août. (1) Parall. moyenne du Soleil = 9",481 + 0,315 $d\gamma$
+ 24",4 d distance de Mars à la Terre.
- 1.^{re} Sept. (2) Parall. moyenne du Soleil = 9",636 + 0,314 $d\gamma$
+ 24",7 d distance de Mars à la Terre.
- 13 Sept. (3) Parall. moyenne du Soleil = 10",141 + 0,313 $d\gamma$
+ 26",1 d distance de Mars à la Terre.
- 14 Sept. (4) Parall. moyenne du Soleil = 10",393 + 0,314 $d\gamma$
+ 26",9 d distance de Mars à la Terre.
- 25 Sept. (5) Parall. moyenne du Soleil = 7",675 + 0,328 $d\gamma$
+ 19",2 d distance de Mars à la Terre.
- 27 Sept. (6) Parall. moyenne du Soleil = 5",311 + 0,332 $d\gamma$
+ 13",1 d distance de Mars à la Terre.
- 7 Oct. (7) Parall. moyenne du Soleil = 11",098 + 0,358 $d\gamma$
+ 23",0 d distance de Mars à la Terre.

Upsal.

- 2 Sept. (8) Parall. moyenne du Soleil = 9",898 + 0,282 $d\gamma$
+ 24",6 d distance de Mars à la Terre.
- 24 Sept. (9) Parall. moyenne du Soleil = 12",876 + 0,296 $d\gamma$
+ 31",1 d distance de Mars à la Terre.
- 25 Sept. (10) Parall. moyenne du Soleil = 10",157 + 0,297 $d\gamma$
+ 24",6 d distance de Mars à la Terre.
- 6 Oct. (11) Parall. moyenne du Soleil = 9",600 + 0,320 $d\gamma$
+ 21",1 d distance de Mars à la Terre.

Nn ij

Stockolm.

2.^o Sept. (12) Parall. moyenne du Soleil = $10^{\circ}, 139 + 0,284 d\gamma$
 $+ 27^{\circ}, 1 d$ distance de Mars à la Terre.

25 Sept. (13) Parall. moyenne du Soleil = $11^{\circ}, 324 + 0,298 d\gamma$
 $+ 26^{\circ}, 4 d$ distance de Mars à la Terre.

3 Oct. (14) Parall. moyenne du Soleil = $13^{\circ}, 631 + 0,317 d\gamma$
 $+ 30^{\circ}, 9 d$ distance de Mars à la Terre.

5 Oct. (15) Parall. moyenne du Soleil = $11^{\circ}, 044 + 0,322 d\gamma$
 $+ 24^{\circ}, 1 d$ distance de Mars à la Terre.

6 Oct. (16) Parall. moyenne du Soleil = $10^{\circ}, 757 + 0,325 d\gamma$
 $+ 23^{\circ}, 4 d$ distance de Mars à la Terre.

*Résultat des calculs précédens.**Bologne.*

(34.) Si dans les équations (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) qui appartiennent à Bologne, l'on fait $d\gamma = 0$, d distance de Mars à la Terre = 0, l'on aura, par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = $9^{\circ}, 105$.

Et si l'on rejette les observations des 27 Septembre & 7 Octobre, dont l'une donne une parallaxe évidemment trop grande, & l'autre une parallaxe évidemment trop petite, l'on aura

(2) Parallaxe moyenne du Soleil = $9^{\circ}, 465$.

Upfal.

(35.) Si dans les équations (8) (10) (11) qui appartiennent à Upfal, l'on fait, avec M. l'Abbé de la Caille, $d\gamma = 1^{\circ}, 5$, pour avoir égard à la force comparative des lunettes employées au Cap & à Upfal; d distance de Mars à la Terre = 0; & que l'on rejette l'observation du 24 Septembre, qui donne évidemment une parallaxe beaucoup trop grande, l'on aura par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil = $9^{\circ}, 435$.

Stockolm.

(36.) Si dans les équations (12) (13) (15) (16) qui appartiennent à Stockolm, l'on fait, avec M. l'Abbé de la Caille, $d\gamma = 2",4$, pour avoir égard à la force comparative des lunettes employées au Cap & à Stockolm; d distance de Mars à la Terre $= 0$; & que l'on rejette l'observation du 3 Octobre, qui donne évidemment une parallaxe beaucoup trop grande, l'on aura, par un résultat moyen,

(1) Parallaxe moyenne du Soleil $= 10",086$.

(37.) On peut conclure des résultats précédens, qu'en général les observations de Mars ont donné une parallaxe moyenne du Soleil, plus grande que celle qui se déduit des passages de Vénus. En effet, nous avons vu que les passages de Vénus ont donné $8",813$ pour valeur de la parallaxe moyenne du Soleil; & quoique les résultats des observations faites par M.^{rs} le Gentil & Cassini de Thury, s'éloignent peu de cette détermination, on voit cependant que les autres observations tendent à donner une plus grande parallaxe. Quoi qu'il en soit, & pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, je dois encore discuter les observations faites à Toulouse, par M.^{rs} d'Arquier & Garripuy.

Notice des Observations faites à Toulouse.

(38.) M.^{rs} d'Arquier & Garripuy n'ont fait que six observations comparables aux observations du Cap; celles des 31 Août & 1.^{er} Septembre 1751, jours auxquels Mars a été comparé à l'étoile 30.^e des Poissons, & celles des 24 & 25 Septembre, 7 & 8 Octobre, jours auxquels Mars a été comparé à l'étoile λ du Verseau; voici la notice de ces observations.

Observation du 31 Août 1751.

(39.) Le 31 Août 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile 30.^e des Poissons;

la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38810;
& sa déclinaison de $7^d 24' 1''$ australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile $30.^e$ des Poissons. $2' 48'', 1.$

Toulouse.

Limbe bor. de Mars plus bor. que l'étoile $30.^e$ des Poissons. $2' 11'', 6.$

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une augmentation de $13'', 4$ dans sa déclinaison australe.

Cap & Toulouse.

$$\gamma = 23'', 1.$$

Observation du 1.^{er} Septembre 1751.

(40.) Le 1.^{er} Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile $30.^e$ des Poissons; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,38685, & sa déclinaison de $7^h 28' 46''$ australe.

Cap.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'Étoile $30.^e$ des Poissons. $2' 0'', 2.$

Toulouse.

Limbe bor. de Mars plus aust. que l'Étoile $30.^e$ des Poissons. $2' 34'', 5.$

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une augmentation de $13'', 2$ dans sa déclinaison australe.

Cap & Toulouse.

$$\gamma = 21'', 1.$$

Observation du 24 Septembre 1751.

(41.) Le 24 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de 0,39824, & sa déclinaison de $8^d 58' 45''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . . $1' 39'',5$.

Toulouse.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . . $2' 24'',5$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une augmentation de $4'',6$ dans sa déclinaison australe.

Cap & Toulouse.

$$\gamma = 40'',4.$$

Observation du 25 Septembre 1751.

(42.) Le 25 Septembre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de $0,40106$, & sa déclinaison de $9^d 0' 18''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . . $3' 14'',6$.

Toulouse.

Limbe boréal de Mars plus austral que λ du Verseau . . . $3' 43'',8$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une augmentation de 4 secondes dans sa déclinaison australe.

Cap & Toulouse.

$$\gamma = 25'',2.$$

Observation du 7 Octobre 1751.

(43.) Le 7 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de $0,45817$, & sa déclinaison de $8^d 54' 37''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau . . . $2' 36'',6$.

Toulouse.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau . . . $2' 20'',0$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une diminution de $6'',7$ dans sa déclinaison australe.

Cap & Toulouse.

$$\gamma = 23'',3.$$

Observation du 8 Octobre 1751.

(44.) Le 8 Octobre 1751, le limbe boréal de Mars fut comparé, au Cap & à Toulouse, à l'étoile λ du Verseau; la distance de Mars à la Terre étoit ce jour-là de $0,44233$, & sa déclinaison de $8^d 52' 8''$ australe.

Cap.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau $5' 8'',7$.

Toulouse.

Limbe boréal de Mars plus boréal que λ du Verseau $4' 48'',4$.

Dans l'intervalle de l'observation du Cap à celle de Toulouse, Mars avoit éprouvé une diminution de $7'',6$ dans sa déclinaison australe.

Équations relatives aux Observations de Toulouse.

(45.)

- 31 Août. (1) Parall. moyenne du Soleil = $7'',346 + 0,318 d\gamma$
 $+ 18'',1 d$ distance de Mars à la Terre.
- 1.^{re} Sept. (2) Parall. moyenne du Soleil = $6'',710 + 0,318 d\gamma$
 $+ 16'',6 d$ distance de Mars à la Terre.
- 24 Sept. (3) Parall. moyenne du Soleil = $13'',453 + 0,333 d\gamma$
 $+ 33'',3 d$ distance de Mars à la Terre.
- 25 Sept. (4) Parall. moyenne du Soleil = $8'',442 + 0,335 d\gamma$
 $+ 20'',1 d$ distance de Mars à la Terre.
- 7 Oct. (5) Parall. moyenne du Soleil = $8'',411 + 0,361 d\gamma$
 $+ 18'',4 d$ distance de Mars à la Terre.
- 8 Oct. (6) Parall. moyenne du Soleil = $10'',156 + 0,364 d\gamma$
 $+ 22'',0 d$ distance de Mars à la Terre.

(46.)

(46.) Si dans les équations précédentes, l'on fait

$$d\gamma = 0, \text{ distance de Mars à la Terre} = 0,$$

l'on aura par un résultat moyen,

$$(1) \text{ Parallaxe moyenne du Soleil} = 9'',086.$$

Si l'on rejette les équations (1) (2) (3), attendu que les deux premières donnent une parallaxe trop petite, & la troisième une parallaxe beaucoup trop grande, on aura

$$(2) \text{ Parallaxe moyenne du Soleil} = 9'',001.$$

Je laisse aux Astronomes à décider entre ces différentes hypothèses.

CONCLUSION.

(47.) Pour déterminer, d'après nos calculs, la parallaxe moyenne du Soleil, il ne sera pas inutile de remettre sous les yeux du lecteur les résultats trouvés précédemment : voici le Tableau de ces résultats.

Parallaxe moyenne du Soleil.

Cap & Paris	9'',011.
Cap & Gréénwich	9,753.
Cap & Bologne	9,465.
Cap & Toulouse	9,086.
Cap & Upsal	9,435.
Cap & Stockolm	10,086.

Si l'on additionne ces différentes quantités, & que l'on divise la somme par le nombre des observations, l'on aura

$$\text{Parallaxe moyenne du Soleil} = 9'',473.$$

Il paroîtroit donc que la parallaxe moyenne du Soleil, déduite de nos calculs, est de 9'',473. Cette parallaxe diffère de 0'',660 de celle que nous avons conclue des passages de Vénus ; mais il s'en faut beaucoup que nous donnions à cette dernière détermination le même degré de confiance qu'à celle qui est déduite des passages de Vénus. En effet, si l'on fait attention combien les erreurs sur les distances observées

de Mars aux différentes Étoiles, sur les demi-diamètres de Mars, sous les rapports des différentes distances de Mars à la Terre, influent sur les résultats, on ne sera point étonné de la grande diversité des parallaxes conclues de chaque observation particulière. Il est vrai que si l'on considère un très-grand nombre de ces observations, ainsi que nous l'avons fait, comme alors toutes les combinaisons des erreurs ont dû naturellement se présenter, on peut se flatter d'avoir un résultat moyen qui ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité; mais il faut convenir en même-temps que l'ensemble des observations des passages de Vénus, ont donné des résultats bien plus cohérens entr'eux, & qu'au moyen de ces passages on est parvenu à des conclusions plus décisives. Quoi qu'il en soit, il me suffit d'avoir donné le calcul des observations faites sur Mars en 1751; & comme j'ai laissé dans les équations, les termes d'après lesquels on pourra toujours corriger les erreurs de mes suppositions, on ne peut rien ajouter à la généralité de ces calculs. Je crois seulement devoir remarquer en finissant ce Mémoire, que quelque préférence que l'on accorde aux passages de Vénus, la justice exige néanmoins que ces passages ne fassent point oublier entièrement les travaux de Dominique Cassini sur la parallaxe de Mars; & l'Académie aura toujours à se glorifier d'avoir donné, dès la fin du siècle dernier, une solution fort approchée du problème de la distance du Soleil à la Terre.



TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE,

Déduite très-brièvement & complètement, de la seule solution algébrique du plus simple de ses Problèmes généraux, au moyen des diverses transformations dont les rapports des sinus & cosinus, tangentes & cotangentes, sécantes & cosécantes d'un même Arc ou d'un même Angle plan, rendent cette solution susceptible, & comprenant quelques Formules & Observations qu'on croit utiles & neuves.

Par M. l'Abbé DE GUA.

LES progrès rapides que l'Astronomie a faits dans le dernier siècle & de nos jours, & les avantages précieux qu'un grand nombre d'Arts très-importans pour la société, en retirent continuellement, sembleroient pouvoir être envisagés comme un signal donné à tous les Géomètres, de renouveler sans cesse leurs efforts pour perfectionner les nombreuses inventions que les Mathématiques pures ont fournies à cette Science, & qu'elle emploie si heureusement dans ses pratiques les plus utiles; & en même temps que la plupart des propositions dont le corps compose la partie de la Géométrie-pratique, qu'on nomme *Trigonométrie sphérique*, sont certainement de ce genre, plusieurs motifs pouvoient donner lieu de conjecturer que ce ne seroit pas vainement qu'on tenteroit de simplifier les résultats auxquels elles conduisent, ou du moins leurs expressions.

Le besoin pressant que les premiers observateurs & calculateurs des mouvemens célestes reconnurent avoir de ces sortes de propositions, en ayant en effet rendu la recherche

un peu précoce, on fut principalement redevable des premières qui furent découvertes, soit à des réflexions aussi profondes que variées, sur celles des propriétés de la Sphère que les élémens de Géométrie comprennent, soit, & peut-être davantage, à l'analogie dont on s'étaya des propriétés des triangles rectilignes, d'abord rectangles & puis obliqu'angles, avec celles que pourroient avoir les triangles sphériques de l'une & de l'autre espèce.

Trop content, dans un temps où les Mathématiques n'étoient pas encore fort avancées, d'être parvenu de manière ou d'autre, à former, des premiers matériaux qu'on amassa en cette sorte, un système assez étendu, on dut vraisemblablement rejeter comme à peu-près chimérique, toute idée de le simplifier : ce préjugé paroît même s'être soutenu à l'époque du renouvellement des Lettres, qui en déracina tant d'autres; & combien n'en retrouve-t-on pas encore de vestiges dans tous les Traités de Trigonométrie sphérique qui ont paru depuis cette grande époque, ou même récemment?

La marche lente & toujours imitée presque servilement, de la Trigonométrie rectiligne, par laquelle on s'y élève d'ordinaire, suivant que je viens de le donner à entendre, de la considération des seuls triangles sphériques rectangles, à celle des obliqu'angles (parmi lesquels il en est pourtant qui ayant un côté de 90 degrés, ne sont pas moins simples que les premiers), & le grand nombre d'élémens différens de ceux des données mêmes des questions, & relatifs seulement à ceux-ci (tels que les demi-sommes ou les demi-différences de côtés ou d'angles), desquels on y fait fréquemment usage, y décèlent incontestablement, une synthèse un peu pénible; & quoique souvent adroite, d'autres fois pourtant, à peu-près forcée, dont les productions trop prolixes peuvent à la vérité s'attirer l'admiration, mais ne satisfont pas entièrement l'esprit.

L'Analyse, au moyen de laquelle quelques modernes ont tenté de suppléer à de si longues déductions, a d'ailleurs été jusqu'ici très-incomplète, & trop assujettie à partir de plusieurs

principes à la fois, employés précédemment par la synthèse, ou à aboutir à des conclusions déjà connues, trop calquée en un mot, sur un plan dont elle auroit dû au contraire, faire absolument abstraction, ou se proposer du moins la réforme.

C'étoit d'abord sans démonstration que Viète avoit donné depuis long-temps, concernant cet objet (a), quelques règles qu'on retrouvera dans partie des énoncés ou formules des miennes: Mayer (b) démontra, un siècle ou environ plus tard, la première, de la même manière que je préféreraï d'employer: feu M. de Maupertuis (c) fit, à peu de distance de-là, servir celle-ci, d'introduction à son élégante *Astronomie nautique*: Léonard Euler envisageant en 1753, les côtés des triangles sphériques, sous le seul point de vue des plus courtes distances d'un de leurs termes à l'autre, donna en conséquence une *Trigonométrie sphérique* déduite des seuls principes *des plus grands & des plus petits* (d); ouvrage transcendant, qui, tout bon qu'il puisse être jugé en le considérant comme introduction à un autre important dont il est en effet suivi, sous le titre de *Trigonométrie sphéroïdique*, mériteroit seul moins d'éloges, à raison de n'être point élémentaire, comme on auroit eu droit de l'attendre d'un traité dont la lecture devoit précéder celle des élémens d'Astronomie, & dès-lors destiné par sa nature, principalement aux commençans: Lambert qui travailla depuis sur la même matière, s'attacha sur-tout à appliquer aux calculs des Tables qu'elle offre à construire, la théorie des sinus & cosinus qu'il nomme *hyperboliques*, & qu'il dit avec raison être équivalens à des sinus & cosinus circulaires imaginaires, de laquelle les fondemens se trouvent dans le livre de Roger Cotes, intitulé: *Harmonia mensurarum*,

(a) Voyez l'édition *in-folio* des Elzévir, page 431, où se trouve, à l'égard des règles semblables à ma septième & à ma neuvième, une faute mal corrigée dans l'*Errata*.

(b) Voyez les Mémoires de

l'Académie impériale de Pétersbourg, tome II.

(c) Voy. les Mém. de l'Ac. Royale de Berlin, pour l'année 1753.

(d) Voyez les mêmes Mémoires, pour l'année 1768.

mais les détails savans lui appartiennent, & dont je ne ferai du reste aucun usage; & en convenant que M. Jean Trembley donne dans son traité nouveau de Trigonométrie sphérique, de belles applications des règles déjà connues, je ne trouve point qu'il y perfectionne, ni les règles, ni leurs déductions; & je croirois au contraire qu'il n'a pas eu l'idée de ce qu'il y auroit eu à faire pour en venir à bout, sur ce qu'il se félicite d'avoir réduit à quatre figures, indépendamment de celles qui pourroient avoir été nécessaires à l'établissement de divers principes qu'il suppose, tout ce qu'il avoit à dire concernant cet objet, tandis qu'une seule figure très-simple va me suffire pour en offrir la déduction la plus complète.

Mais en même temps que je rappelle ici tous ces faits, je ne dois pas négliger d'y observer que bien que Mayer dise expressément, *page 12*, qu'on peut déduire d'une seule formule qu'il rapporte, tout le reste de la Trigonométrie sphérique, il ne paroît pourtant avoir en vue dans cet endroit, ni une déduction purement analytique, semblable à celle que je me propose de faire, ni des formules neuves pour des cas différens de celui auquel appartient la formule dont il parle, & qui m'est commune avec lui.

En effet, il s'empresse, d'abord après qu'il a eu démontré cette formule, d'en conclure les énoncés de celles qu'on emploie d'ordinaire pour les effections astronomiques auxquelles elle peut servir immédiatement; il semble faire alors uniquement allusion à des conclusions purement synthétiques, nommément à celle de ce genre par laquelle on passe *géométriquement* du cas des côtés ou angles donnés, à celui des angles & côtés respectivement donnés aussi; il dit enfin qu'il n'entre pas dans de pareilles recherches, pour ne pas *jam actum agere*, ce qui ne laisse nullement entendre qu'il ait eu en aucune sorte connoissance des calculs, en partie assez curieux & adroits, qu'on verra m'avoir peu-à-peu fourni la totalité de mes règles & formules.

Ces réflexions devoient suffire, autant que j'ai pu juger, pour me convaincre que la Trigonométrie sphérique présen-

toit encore une espèce de mine précieuse, qu'on jugeroit mal-à-propos épuisée; & j'ai été d'ailleurs d'autant plus encouragé à tourner avec ardeur mes recherches de ce côté-là, que l'Ouvrage dont j'ai cru y apercevoir les matériaux, m'a paru devoir former une très-bonne introduction à deux autres que j'insérerai à la suite, dans ce même volume de nos Mémoires.

Telles ont donc été les vues d'après lesquelles je me suis peu-à-peu engagé dans les diverses recherches que je soumets au jugement de l'Académie; l'attention qu'elle voudra bien donner à ce Mémoire où je rends compte des conclusions auxquelles elles m'ont conduit, la mettra à portée de décider si, comme je le croirois, je suis fondé à m'attribuer mes règles 5.^{me} & 9.^{me}, & dès-lors mes 6.^{me} & 10.^{me}, & surtout les formules simplifiées que j'en donne; toutes mes démonstrations de règles & leurs simplifications, à celles de la première & de la seconde règle près; mes éclaircissemens, importans à ce qu'il me semble, & desirés vainement depuis long-temps, sur la proposition dont j'ai déjà parlé, & qui, de la solution du cas de certains côtés ou angles donnés, conclut celle du cas des angles & côtés opposée donnés aussi; mes constructions dans la sphère même, de ceux des problèmes que j'aurai résolus, desquels l'inconnue se sera trouvée susceptible de deux valeurs; & diverses observations qu'on trouvera répandues dans tout l'ouvrage; ou même si le spectacle que je me flatte d'offrir ici d'une science entière & très-utile, déduite succinctement, & toujours uniformément, d'une proposition unique très-simple, ne pourroit pas seul, être jugé propre à l'intéresser.

Première Demande.

Soient désignés algébriquement les cosinus des trois angles du triangle sphérique GSP (*Planche I, figure 1*), par les

* Les deux arcs ponctués GE , GF , de la figure, ne seront d'usage que dans les deux dernières observations générales de l'ouvrage; il n'y faut faire aucune attention dans la lecture de tout ce qui précédera.

mêmes lettres romaines & majuscules, G , S & P , qui désignent géométriquement dans la figure, les angles mêmes; leurs sinus par les lettres grecques analogues, majuscules aussi, Γ , Σ & Π ; les cosinus de côtés respectivement opposés à chacun de ces angles, par les mêmes lettres romaines, mais minuscules, g , s & p , qui se rapportent à ceux des angles, & leurs sinus par les lettres grecques analogues, minuscules aussi, γ , σ & π ; en sorte qu'on ait

Cof. $GSP = S$, sin. idem $= \Sigma$; cof. $GP = s$, sin. idem $= \sigma$,

Cof. $SPG = P$, sin. idem $= \Pi$; cof. $SG = p$, sin. idem $= \pi$,

Cof. $SGP = G$, sin. idem $= \Gamma$; cof. $SP = g$, sin. idem $= \gamma$.

Qu'on représente d'ailleurs les cotangentes & tangentes des mêmes angles & côtés du triangle sphérique, par les mêmes lettres romaines & grecques, majuscules & minuscules, qui en auront indiqué respectivement les cosinus & sinus, mais accompagnées en arrière ou à gauche, d'une petite équerre à branches doubles l'une de l'autre, la grande posée verticalement à côté de la lettre, & la petite vers le haut & se retournant en dehors; en sorte qu'on ait

Cotang. $GSP = \perp S$, tang. id. $= \perp \Sigma$; cotang. $GP = \perp s$, tang. id. $= \perp \sigma$,

Cotang. $SPG = \perp P$, tang. id. $= \perp \Pi$; cotang. $SG = \perp p$, tang. id. $= \perp \pi$,

Cotang. $SGP = \perp G$, tang. id. $= \perp \Gamma$; cotang. $SP = \perp g$, tang. id. $= \perp \gamma$.

Qu'enfin les mêmes lettres romaines & grecques, majuscules & minuscules, accompagnées vers le bas & en arrière, ou à gauche, de la petite équerre dont on vient de parler, mais la petite branche posée en arrière & verticalement de haut en bas, & la grande couchée horizontalement, de façon à couper en quelque sorte la lettre, marquent respectivement les cosécantes & sécantes des mêmes angles & côtés, en sorte qu'on ait

Cofec. $GSP = \lrcorner S$, sec. id. $= \lrcorner \Sigma$; cofec. $GP = \lrcorner s$, sec. id. $= \lrcorner \sigma$,

Cofec. $SPG = \lrcorner P$, sec. id. $= \lrcorner \Pi$; cofec. $SG = \lrcorner p$, sec. id. $= \lrcorner \pi$,

Cofec. $SGP = \lrcorner G$, sec. id. $= \lrcorner \Gamma$; cofec. $SP = \lrcorner g$, sec. id. $= \lrcorner \gamma$.

Observations

Observations concernant cette première Demande.

Nous avons préféré, pour employer à la désignation géométrique de notre figure, & à la désignation algébrique des cosinus & sinus, cotangentes & tangentes, cosécantes & sécantes, de ses angles & côtés, les trois lettres de l'alphabet, dont il nous a paru que les expressions romaines & grecques, majuscules & minuscules, différoient le plus les unes des autres; nous désignons d'ailleurs, les cotangentes & tangentes, & les cosécantes & sécantes, par les marques que nous avons jugées les plus analogues au contact & à la section; elles précèdent leurs lettres, pour qu'on connoisse d'avance quelles devront être les désignations spécifiques de celles-ci; elles sont repliées, la première en haut & vers la gauche, la seconde en bas & à gauche aussi, pour éviter qu'on ne confonde, la première avec la marque des minutes d'un chiffre précédent, ou avec le Γ grec majuscule, & la seconde avec le même Γ , ou avec le signe moins; & nous les plaçons en arrière de la lettre, pour qu'on les distingue des exposans de puissances de cette lettre; algorithmie dont nous croyons les divers articles propres à rappeler facilement & sans confusion à l'esprit, les rapports & les oppositions des diverses lignes dont nous devons avoir souvent occasion de faire mention ensemble.

Seconde Demande.

Tout arc & tout angle-plan, donne lieu à une proportion géométrique entre son cosinus, son sinus, le rayon & sa tangente, à une autre proportion géométrique entre sa sécante, sa tangente, sa cosécante & le rayon, & à des proportions géométriques continues, entre son cosinus, le rayon & sa sécante, & entre sa tangente, le rayon & sa cotangente; de toutes lesquelles il résulte que son cosinus & son sinus étant, par exemple, représentés respectivement par s & par σ , & le rayon par l'unité, on aura sa tangente,

Mém. 1783.

P p

$\Gamma \sigma = \frac{\sigma}{s}$, la sécante, $\Gamma \sigma = \frac{1}{s}$, la cotangente,

$\Gamma s = \frac{s}{\sigma}$, & la cosécante, $\Gamma s = \frac{1}{\sigma}$.

Observations sur cette Demande.

Toutes les lignes dont on parle ici, sont, sans exception, susceptibles des dénominations de positives & négatives, ou peuvent indifféremment admettre au-devant d'elles, les deux signes d'opposition $+$ & $-$. Les cosinus, par exemple, sont positifs dans les angles saillans aigus, depuis 0° jusqu'à 90° deviennent négatifs dans les angles saillans obtus, depuis 90° jusqu'à 180° , restent tels dans les angles rentrans obtus, depuis 180° jusqu'à 270° , & redeviennent positifs dans les angles rentrans aigus, depuis 270° jusqu'à 360° ; tandis que les sinus sont positifs dans tous les angles saillans, aigus ou obtus, depuis 0° jusqu'à 180° , mais deviennent négatifs dans tous les angles rentrans, obtus & aigus, depuis 180° jusqu'à 360° ; & il en est de même à l'égard des cosinus des angles négatifs, supplémens à quatre droits des positifs. Quant aux tangentes & cotangentes, sécantes & cosécantes, les premières sont positives ou négatives, selon l'identité ou la diversité de signe des lettres, dont la demande actuelle montre qu'elles représentent les quotiens, & les dernières suivent, relativement à une telle alternative, la loi du cosinus ou du sinus, par lequel il faut, d'après la même demande, diviser l'unité pour en avoir la valeur.

Nous ne donnons point pour neuve, cette distinction des signes des cosinus & sinus, cotangentes & tangentes, cosécantes & sécantes, des arcs ou angles, selon que toutes ces quantités peuvent se rapporter à des angles saillans ou rentrans, aigus ou obtus; parce que les résultats que divers Géomètres nous ont laissés des additions & soustractions répétées ou entre-mêlées, des mêmes arcs ou angles, pourroient d'une part prouver que ces auteurs ne l'ont pas méconnue, & que d'ailleurs Dom Charles Worsley l'a même exposée assez au long, dans son *Analyse des Mesures*,

des Rapports & des Angles ; mais très-surpris en même-temps de n'en avoir vu faire mention à aucun des auteurs élémentaires qui ont traité de la confection des Tables des sinus. . &c , & dès-lors des additions & soustractions répétées ou entre-mêlées , d'arcs ou d'angles , dont nous venons de parler , & pour la certitude desquelles elle nous a paru nécessaire , nous avons été d'autant plus attentifs à éviter ce défaut , que cet ouvrage devoit nous présenter des occasions actuelles d'additions de trois & quatre angles à la fois , & de soustractions analogues.

Si pourtant le préjugé de ce silence absolu sur un tel article , de la part des auteurs élémentaires en cette matière , qui nous ont précédés , laissoit encore quelque doute dans l'esprit de certains de nos lecteurs , concernant la distinction dont il est question , nous nous croirions suffisamment en état de le dissiper en observant ,

1.^o Que faute de se prêter à une telle distinction , on ne pourroit , dans la considération du progrès de l'angle , par le mouvement circulaire du rayon , d'une extrémité d'un diamètre à l'autre , ou depuis 0° jusqu'à 180° , revenir du dernier terme au premier , que par un saut brusque de toute une demi-circonférence , pros crit par la loi de continuité , dont le génie de Leibnitz a si bien établi l'empire sur toutes les Sciences.

2.^o Qu'on méconnoîtroit , en se permettant un saut si étrange , l'instruction lumineuse que peut donner sur ce sujet l'analyse Mathématique de la Polysection des arcs & angles , lorsqu'elle assigne , par exemple , pour le tiers cherché d'un arc ou angle donné , d'abord le tiers de cet arc ou angle , conformément à la notion qu'on s'en est formée , puis le tiers de la somme de cet arc ou angle , conformément à la même notion , & d'une circonférence , c'est-à-dire , le tiers d'un arc ou angle plus grand de 360° que le premier , & terminé par les mêmes limites , puis le tiers de la somme de ce même premier arc ou angle , & de deux circonférences , c'est-à-dire , le tiers d'un troisième arc ou angle plus grand

de 720° que le $1.^{er}$ & de 360° que le $2.^d$ & compris toujours entre les mêmes limites, mais jamais le tiers de la somme du même premier arc ou angle, & d'une demi-circonférence.

$3.^o$ Qu'on s'astreindroit encore par-là, à borner la belle proposition élémentaire, que la somme des angles de tout polygone rectiligne est égale à autant de fois 2 droits moins 4, que le polygone a de côtés, aux seuls polygones formés entièrement d'angles saillans; tandis qu'elle s'étend également à ceux qui sont formés en partie d'angles rentrans, selon que feu M. Bezout l'a déjà remarqué à la suite du nombre 86 de ses Éléments de Géométrie.

Mais outre les preuves que tout cela peut présenter de la justesse de notre notion des cosinus négatifs & puis positifs, & des sinus toujours négatifs, des angles rentrans, devant tous, ainsi que l'a remarqué encore feu M. Bezout, être censés d'un nombre de degrés au-dessus de 180° , la demande suivante nous en offrira une nouvelle dont il sera impossible d'étuder en aucune sorte la force, en attendant même que les résultats de nos règles ou formules trigonométrico-sphériques concourent à la confirmer.

Troisième Demande.

On supposera ici les règles pour prendre les cosinus & sinus de la somme ou de la différence de deux arcs ou angles désignés l'un & l'autre par leurs cosinus & sinus propres, desquelles divers auteurs de Trigonométrie rectiligne ont fait usage dans leurs constructions des Tables des sinus, &c. *comme démontrées d'abord sur les arcs ou angles de moins que 90 degrés, & pouvant ensuite être appliquées avec les changemens convenables des signes de quelques lettres, aux arcs ou angles d'un nombre de degrés compris entre 90 & 180 degrés, ou même, auroient-ils pu ajouter, entre 180 & 360 degrés; savoir, que nommant, par exemple, respectivement m & n , les cosinus, & μ & ν , les sinus des deux arcs ou angles donnés, d'un nombre de degrés chacun moindre que 90 , les cosinus de leur somme*

& de leur différence seront respectivement, $mn - \mu\nu$, & $mn + \mu\nu$; & les sinus de leur somme & de leur différence seront respectivement aussi, $m\nu + n\mu$, & $m\nu - n\mu$; d'où résultera ce qu'ils devront encore être dans tous autres cas, sur l'espèce & le rapport mutuel des deux arcs ou angles donnés.

Observation sur cette Demande.

Cette demande suffiroit, selon que nous l'avons annoncé tout-à-l'heure, pour mettre hors de toute contestation, les notions, tant des cosinus négatifs ou positifs, que des sinus négatifs, se rapportant les uns & les autres à des arcs ou angles de plus que 180 degrés, ou rentrans.

En effet, 1.^o pour avoir, suivant la règle qu'elle suppose, le cosinus de la somme de deux arcs ou angles, tous deux de l'espèce qu'on a jusqu'ici nommés simplement *obtus*, mais que je préférerois de nommer *saillans-obtus*, & dont on convient que les cosinus propres sont négatifs, & les sinus propres positifs, il n'y aura évidemment aucun signe à changer dans la formule $mn - \mu\nu$, représentative de ce cosinus; puisque les deux lettres romaines m & n changeant à-la-fois de signe, leur produit mn devra conserver le même signe + qu'il étoit censé avoir auparavant, qu'à plus forte raison le produit $\mu\nu$ devra-t il aussi conserver son signe —, les deux lettres grecques μ & ν qui en sont les élémens, n'ayant point changé le leur, & que le cosinus de somme sera seulement négatif ou positif, selon que mn sera plus petit ou plus grand que $\mu\nu$, alternative qui revient à celle de la somme proposée, <ou> que 270 degrés.

2.^o Pour avoir le sinus de la même somme d'arcs ou d'angles, il faudra changer dans la formule $m\nu + n\mu$, du sinus de somme, les signes des lettres romaines, en ne touchant point à ceux des lettres grecques, ce qui rendra l'expression changée, — $m\nu - n\mu$, du sinus de somme, nécessairement négative, & en conséquence ce sinus lui-même, négatif aussi.

3.^o La différence négative de deux angles aigus, ou *saillans-*

aigus, dont on supposeroit celui qui devoit être soustrait, le plus grand, se réduisant à un angle rentrant-aigu, & devant ainsi avoir un sinus négatif & un cosinus positif, les deux formules en donnent l'indication, en ce que $n\mu$ qui est négatif dans la formule du sinus, devient alors, contre ce qu'on y supposoit, $>$ que $m\nu$, négatif aussi, & que les deux parties de la formule du cosinus, restant positives, il en doit être ainsi de leur somme.

Les mêmes notions enfin des cosinus négatifs & de nouveau positifs, & des sinus toujours négatifs, des angles rentrans obtus ou aigus, ou de plus que 180 degrés, recevraient au besoin un haut degré de confirmation, du dénouement très-lumineux qu'on trouveroit en les approfondissant, qu'elles seroient propres à donner des divers paradoxes ou doutes, dont la matière des additions & soustractions successives & entre-mêlées, des arcs ou angles, a été jusqu'ici embarrassée.

Corollaire important de cette Demande.

Si un cosinus est exprimé par *la différence* ou par *la somme* de deux produits tellement conditionnés que les deux produisans de chacun soient cosinus ou sinus correspondans à des sinus ou cosinus que représentent respectivement les deux produisans de l'autre, ces cosinus & sinus particuliers & respectifs appartiennent dès-lors aux deux parties *d'une somme* ou *d'une différence* d'arcs ou d'angles à laquelle appartient de son côté le cosinus primitif ou dont il a été parlé d'abord; & si un sinus est exprimé par *la somme* ou par *la différence* de deux produits tellement conditionnés que l'un des deux produisans, tel que ce soit, de l'un, étant regardé comme un sinus ou un cosinus, l'un des deux produisans de l'autre devienne le cosinus ou sinus correspondant, ces deux sinus & cosinus particuliers & respectifs appartiennent dès-lors aux deux parties *d'une somme* ou *d'une différence* d'arcs ou d'angles, à laquelle appartient de son côté le sinus primitif dont il a été parlé d'abord.

En sorte que si la somme de produits qui devoit en particulier représenter un sinus, se trouvoit être négative,

les deux parties de l'arc ou angle, auquel ce sinus devoit appartenir, formeroient nécessairement une somme de degrés plus grande que 180, soit qu'elles dûssent être l'une & l'autre de valeur moyenne entre 90 & 180 degrés, soit que l'une devant être, ainsi que leur somme de plus que 180 degrés, l'autre ne pût être que de moins que cela; & si la différence de produits qui devoit aussi représenter un sinus, se trouvoit encore être négative, l'une des deux parties de l'arc ou angle auquel cette différence devoit appartenir, pourroit être de moins que 180 degrés, mais les deux pourroient aussi à la fois, être de moins que 90 degrés, en supposant que ce fût la plus grande des deux qui dût être ôtée de la plus petite.

Quatrième & dernière Demande.

Nous supposons les règles de Trigonométrie rectiligne, qui apprennent que dans tout triangle rectiligne, dont deux côtés & l'angle compris entre ces côtés sont connus, le troisième côté doit être égal à la racine carrée de la somme des carrés des deux côtés connus, moins le double rectangle des mêmes côtés, multiplié par le cosinus, positif pour un angle aigu, & négatif pour un angle obtus, de l'angle donné; & que dans tout autre, dont les trois côtés sont connus, le cosinus d'un angle quelconque est nécessairement égal au quotient de la division de la somme des carrés des côtés qui le comprennent, moins le carré du côté qui lui est opposé, par le double rectangle des deux premiers de ces côtés, & sera aigu ou obtus, selon que la somme des deux premiers carrés sera plus grande ou plus petite que le troisième.

PROBLÈME UNIQUE.

Étant donnés deux côtés d'un triangle sphérique quelconque, & l'angle compris entre ces deux côtés, trouver le troisième côté!

SOLUTION.

Qu'on tire (*figure 1.^{re}*) d'un angle S du triangle sphérique GSP , proposé, deux tangentes SM , SN aux deux

côtés SG , SP qui concourent dans cet angle, & du centre C de la sphère, des rayons CS , CG & CP , dont les deux derniers formeront, par les rencontres de leurs prolongations avec les tangentes SM , SN , les sécantes CM , CN , & qu'on prendra tous pour l'unité; qu'on joigne de plus la droite MN ; & les deux tangentes SM , SN , c'est-à-dire, suivant la première demande, γ & π seront respectivement, d'après la seconde demande, $= \frac{\gamma}{g}$ & $= \frac{\pi}{p}$, en même-temps que les deux sécantes CM , CN , ou suivant la première demande, $\Gamma \gamma$ & $\Gamma \pi$ seront respectivement, d'après la seconde demande, $= \frac{1}{g}$ & $= \frac{1}{p}$.

On aura donc, 1.^o en conséquence de la quatrième & dernière demande, & supposant le cosinus S positif, sauf à en changer le signe s'il ne devoit pas l'être, le carré de MN , l'un des côtés du triangle rectiligne MSN , dont on est supposé connoître les deux autres côtés, ainsi que l'angle que ces côtés comprennent, $= \frac{\gamma^2}{g^2} + \frac{\pi^2}{p^2} - 2 \frac{S\gamma\pi}{gp}$; 2.^o d'après la même demande & la considération du triangle rectiligne NCM , dont on connoîtra maintenant les trois côtés, le cosinus cherché S , de l'angle NCM , ou du côté GP du triangle sphérique,

$$= \left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{\gamma^2}{g^2} - \frac{\pi^2}{p^2} + 2 \frac{S\gamma\pi}{gp} \right)$$

divisé par $\frac{2}{gp}$, ou (d'après la substitution de $1 - g^2$ pour γ^2 , & de $1 - p^2$ pour π^2) $= \frac{2gp + 2S\gamma\pi}{2} = S\gamma\pi + gp$; formule d'une première règle, qu'il semble qu'on tenteroit en vain de simplifier.

COROLLAIRE I.

On peut conclure de-là, pour le cas où étant donnés trois côtés d'un triangle sphérique, on chercheroit à connoître le cosinus de l'angle opposé à l'un de ses côtés, par exemple, à GP ,

à GP , une seconde règle, savoir, $S = \frac{s - gp}{\gamma\pi}$, ou ôtant le diviseur, & abrégeant, conformément à notre seconde demande, par l'introduction des cosécantes & cotangentes, en la place des cosinus & sinus, cette seconde formule dégagée de fractions, de la même seconde règle, $S = s \text{ } \Gamma g \text{ } \Gamma p - \text{ } \Gamma p \text{ } \Gamma g$.

COROLLAIRE II.

En prenant, au moyen de la valeur de S que donne la formule de notre seconde règle, celle de Σ , on trouvera que celle-ci doit être

$$\frac{\sqrt{[\gamma^2\pi^2 - (s - gp)^2]}}{\gamma\pi} = \frac{\sqrt{[(1 - g^2) \times (1 - p^2)] - (s - gp)^2}}{\gamma\pi} = \frac{\sqrt{(1 - g^2 - p^2 - s^2 + 2gps)}}{\gamma\pi}.$$

Or, comme le numérateur de la dernière expression comprend précisément les mêmes fonctions de g , de p & de s , ce numérateur seroit par conséquent le même pour les sinus de chacun des trois angles du triangle ; & il s'ensuit encore de-là, que les sinus des trois angles, en S , en G & en P , de tout triangle sphérique SGP , sont nécessairement entre eux comme les fractions $\frac{1}{\gamma\pi}$, $\frac{1}{\gamma\sigma}$ & $\frac{1}{\pi\sigma}$, c'est-à-dire, comme ces autres, $\frac{\sigma}{\pi\gamma\sigma}$, $\frac{\pi}{\gamma\pi\sigma}$ & $\frac{\gamma}{\gamma\pi\sigma}$; enfin, ces dernières fractions ayant toutes le même dénominateur, & étant par conséquent entr'elles, comme leurs numérateurs, on peut conclure de tout cela, ce beau théorème si connu, de Trigonométrie sphérique, que *dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont entr'eux, comme ceux des côtés opposés à ces angles.*

Et on doit encore en inférer, que dans tout triangle sphérique GP , les produits $\gamma\pi\Sigma$, $\sigma\pi\Gamma$ & $\sigma\gamma\Pi$, sont tous égaux entr'eux, c'est-à-dire, cette autre propriété des triangles sphériques, que les sinus de chacun de leurs angles, multipliés par ceux des deux côtés qui comprennent chaque angle, forment un même produit, & que dès-lors les sinus

des angles font dans ces triangles, en raison inverse de celle des produits des sinus des côtés qui comprennent les angles.

C O R O L L A I R E III.

Élevant tout-à-la-fois au carré les deux parties de la droite & de la gauche de la formule unique de notre première règle, qu'offre le problème ci-dessus : transposant ensuite de la droite à la gauche les deux carrés monomes, qui se trouveront par-là au premier de ces côtés d'équation, & élevant de nouveau les deux parties de la droite & de la gauche au carré, on aura

$$\begin{aligned} s^4 - 2 S^2 \gamma^2 \pi^2 s^2 + S^4 \gamma^4 \pi^4 &= 0; \\ - 2 g^2 p^2 &- 2 S^2 \gamma^2 \pi^2 g^2 p^2 \\ &+ g^4 p^4 \end{aligned}$$

équation dont le second terme a pour coefficient, le double de la somme des produits $S^2 \gamma^2 \pi^2$ & $g^2 p^2$, pris négativement, & le troisième terme est le carré de la différence des mêmes produits; laquelle a d'ailleurs pour ses racines

$$s - S \gamma \pi - g p = 0,$$

d'où nous nous y sommes élevés,

$$s + S \gamma \pi + g p = 0,$$

$$s - S \gamma \pi + g p = 0,$$

$$\& s + S \gamma \pi - g p = 0,$$

dans laquelle enfin il ne se trouve que S , cosinus de l'angle en S , de lettre majuscule, ou se rapportant à des angles, en même-temps qu'il n'y manque de lettre minuscule, ou se rapportant à des côtés, que la seule lettre σ , sinus du côté GP opposé à l'angle en S ; ce qui m'avoit d'abord porté à croire qu'il devoit être assez difficile d'en conclure immédiatement, ce théorème de Trigonométrie sphérique, très-connu aussi, & non moins beau que le précédent, que toutes les équations qu'on peut former de diverses fonctions quelconques des côtés & des angles de tout triangle sphérique, doivent

donner lieu à des équations analogues entre des fonctions semblables des angles & des côtés respectivement.

Dans la vue néanmoins de parvenir à cette conclusion, j'ai d'abord, au moyen des proportions que présente le Corollaire II, entre les sinus des angles & ceux des côtés qui leur sont opposés, pensé à introduire dans l'équation trouvée, des Γ^2 & des Π^2 , au lieu des γ^2 , π^2 , g^2 & p^2 , mais sans y faire paroître pour cela des Σ^2 ni des σ^2 (carrés que l'équation que je cherchois ne devoit pas contenir, non plus que celle-ci), & mettant en leur place des $(1 - S^2)$ & $(1 - s^2)$ respectivement; & je me suis réservé d'abrégier ensuite le résultat auquel ces substitutions m'auroient conduit, & où les Γ^2 & les Π^2 devroient être semblablement employés, par l'introduction ultérieure, à laquelle elles pourroient donner lieu, soit de $G^2 + P^2$ à la place de $2 - \Gamma^2 - \Pi^2$, soit de $G^2 P^2$ à la place de $1 - \Gamma^2 - \Pi^2 + \Gamma^2 \Pi^2$, soit des carrés des premières de ces quantités, au lieu de ceux des dernières, &c.

Or, cela m'a donné

$$\gamma^2 = \frac{(1 - s^2) \Gamma^2}{1 - S^2}, \quad \pi^2 = \frac{(1 - s^2) \Pi^2}{1 - S^2},$$

$$g^2 = \frac{1 - S^2 - (1 - s^2) \Gamma^2}{1 - S^2}, \quad \& \quad p^2 = \frac{1 - S^2 - (1 - s^2) \Pi^2}{1 - S^2},$$

& par conséquent

$$S^2 \gamma^2 \pi^2 = \frac{S^2 (1 - s^2)^2 \Gamma^2 \Pi^2}{(1 - S^2)^2},$$

$$\& \quad g^2 p^2 = \frac{(1 - S^2)^2 - (1 - S^2) \cdot (1 - s^2) \cdot (\Gamma^2 + \Pi^2) + (1 - s^2)^2 \cdot \Gamma^2 \Pi^2}{(1 - S^2)^2};$$

& j'ai conclu de-là que le double pris négativement de la somme des deux derniers produits, devoit être

$$\frac{-2(1 - S^2)^2 + 2(1 - S^2) \cdot (1 - s^2) \cdot (\Gamma^2 + \Pi^2) - 2(1 + S^2) \cdot (1 - s^2)^2 \cdot \Gamma^2 \Pi^2}{(1 - S^2)^2},$$

& que le carré de leur différence, de laquelle le numérateur

Q q ij

& le dénominateur se trouveroient avoir $(1 - S^2)$ pour diviseur commun, seroit en même temps

$$\frac{[(1-s^2)^2 \Gamma^2 \Pi^2 - (1-s^2) \cdot (\Gamma^2 + \Pi^2) + (1-S^2)^2]}{(1-S^2)^2}.$$

Enfin, substituant ces deux valeurs dans la même équation, y donnant au premier terme s^4 , le dénominateur $(1 - S^2)^2$ des deux autres, effaçant ensuite par-tout, ce dénominateur $(1 - S^2)^2$, devenu commun à tous les termes, & ordonnant par rapport à S , au lieu de s , j'ai eu pour transformée de l'équation ci-dessus,

$$\begin{array}{rcl} s^4 \cdot S^2 - 2 s^4 \cdot S^2 & + s^4 & = 0. \\ - 2 s^4 & + 4 s^2 & - 2 s^2 \\ + 1 & + 2 s^4 \Gamma^2 & - 2 s^4 \Gamma^2 \\ & + 2 s^4 \Pi^2 & - 2 s^4 \Pi^2 \\ & - 2 s^3 \Gamma^2 & + 2 s^3 \Gamma^2 \\ & - 2 s^3 \Pi^2 & + 2 s^3 \Pi^2 \\ & - 2 s^6 \left. \begin{array}{l} \Gamma^2 \Pi^2 \\ + 4 s^4 \end{array} \right\} & - 2 s^6 \left. \begin{array}{l} \Gamma^2 \Pi^2 \\ + 4 s^4 \end{array} \right\} \\ & - 2 s^2 \Gamma^2 & - 2 s^2 \\ & - 2 s^2 \Pi^2 & + 1 \\ & + 2 \Gamma^2 & + 2 s^2 \Gamma^2 \\ & + 2 \Pi^2 & + 2 s^2 \Pi^2 \\ & - 2 s^4 \left. \begin{array}{l} \Gamma^2 \Pi^2 \\ + 4 s^2 \end{array} \right\} & - 2 \Pi^2 \\ & + 4 s^2 \left. \begin{array}{l} \Gamma^2 \Pi^2 \\ - 2 \end{array} \right\} & + 2 s^4 \left. \begin{array}{l} \Gamma^2 \Pi^2 \\ - 4 s^2 \end{array} \right\} \\ & & + 2 \\ & & + s^4 \Gamma^2 \\ & & - 2 s^4 \Gamma^2 \Pi^2 \\ & & + s^4 \Pi^2 \\ & & - 2 s^2 \Gamma^2 \\ & & + 4 s^2 \Gamma^2 \Pi^2 \\ & & - 2 s^2 \Pi^2 \\ & & + \Gamma^2 \\ & & - 2 \Gamma^2 \Pi^2 \\ & & + \Pi^2 \end{array}$$

*

*

$$\left. \begin{array}{r} + 2 s^6 \\ - 6 s^4 \\ + 6 s^2 \\ - 2 \end{array} \right\} \Gamma^4 \Pi^2$$

$$\left. \begin{array}{r} + 2 s^6 \\ - 6 s^4 \\ + 6 s^2 \\ - 2 \end{array} \right\} \Gamma^2 \Pi^4$$

$$\left. \begin{array}{r} + s^8 \\ - 4 s^6 \\ + 6 s^4 \\ - 4 s^2 \\ + 1 \end{array} \right\} \Gamma^4 \Pi^4$$

Laquelle, au moyen de la division des coefficients de ses trois termes, par $s^4 - 2s^2 + 1$, ou par $(s^2 - 1)^2$, s'est réduite à

$$\begin{aligned} s^4 - 2 \dots s^2 + 1 & \dots \dots \dots = 0. \\ + 2 \Gamma^2 & - 2 \Gamma^2 \\ + 2 \Pi^2 & - 2 \Pi^2 \\ - 2 s^2 \} \Gamma^2 \Pi^2 & - 2 s^2 \} \Gamma^2 \Pi^2 \\ - 2 \} & - 2 \} \\ & + (\Gamma^2 + \Pi^2)^2 \\ & + 2 (s^2 - 1) \cdot (\Gamma^2 + \Pi^2) \cdot \Gamma^2 \Pi^2 \\ & + (s^2 - 1)^2 \cdot \Gamma^4 \Pi^4 \end{aligned}$$

Et après l'emploi dans celle-ci, de $- 2 G^2 P^2$, à la place des trois premiers membres & de la dernière partie du quatrième membre de son second terme, & celui, dans ce qui restera du dernier terme, de $G^4 P^4$, au lieu des deux premiers, du quatrième, du cinquième, & des premières parties du sixième & du septième membres de son dernier terme (membres du dernier terme, desquels la totalité forme en effet le carré de $1 - \Gamma^2 - \Pi^2 + \Gamma^2 \Pi^2$, ou de $G^2 P^2$), donne enfin

$$\begin{array}{rcl}
 S^4 - 2 s^3 \Gamma^2 \Pi^2 . S^2 + s^4 \Gamma^4 \Pi^4 & \dots\dots\dots & \\
 - 2 G^2 P^2 & - 2 s^3 \Gamma^2 \Pi^2 G^2 P^2 & = 0. \\
 + G^4 P^4 & &
 \end{array}$$

dernière qui comprend les mêmes fonctions des carrés des cosinus & sinus des angles & côtés , que la primitive de laquelle on l'a déduite , au moyen de trois transformations, comprenoit respectivement des côtés & des angles , & a en effet pour racines $S - s \Gamma \Pi - G P = 0$, $S + s \Gamma \Pi + G P = 0$, $S - s \Gamma \Pi + G P = 0$, & $S + s \Gamma \Pi - G P = 0$, expressions parfaitement analogues à celles des racines de la même primitive.

Comme pourtant il ne résulte jusqu'ici autre chose de ce que nous venons de montrer, sinon que la racine

$$s - S \gamma \pi - g p = 0$$

de la première équation de laquelle nous étions partis dans le calcul précédent, emporte la vérité de l'alternative des racines de la seconde, il paroît à propos, pour mieux déterminer la relation de simultanéité de la même racine, $s - S \gamma \pi - g p = 0$, de la première équation, avec telle ou telle racine de la seconde, plutôt qu'avec telle ou telle autre de celle-ci, de substituer successivement dans les racines de celle-ci, les valeurs de $\Gamma \Pi$ & de $G P$ en lettres minuscules romaines ou grecques, & de comparer ensuite les valeurs de S en ces lettres minuscules, qu'on aura pu tirer de-là, avec l'autre valeur de S en ces mêmes lettres minuscules, que fournit la racine même primitive $s - S \gamma \pi - g p = 0$, pour admettre comme simultanée avec celle-ci, toute racine de la seconde équation, d'après laquelle une telle comparaison conduira à une équation identique, & refuser au contraire la même simultanéité à toute autre racine de la seconde équation, d'après laquelle une telle comparaison jetteroit dans des conditions, fut-ce même possibles.

Or $G P$ est, d'après le Corollaire I de la solution du problème unique sur lequel se fonde tout ce que nous avons annoncé ci-dessus, que notre Trigonométrie sphérique compren-

$$\text{droit,} = \frac{(g-sp) \times (p-sg)}{2\pi}, \text{ ou } = \frac{gp - sg^2 - sp^2 + s^2gp}{\sqrt{(1-g^2-p^2+g^2p^2)}};$$

& Γ & Π devant être, conformément au Corollaire II de la même solution de problème, respectivement

$$= \frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{2\pi}, \text{ \& } = \frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$= \frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{\sqrt{(1-s^2-p^2+g^2p^2)}}, \text{ \& } = \frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{\sqrt{(1-s^2-g^2+s^2g^2)}},$$

$$\text{on aura de plus } \Gamma\Pi = \frac{1-s^2-g^2-p^2+2sgp}{\sqrt{(1-s^2-p^2+g^2p^2)} \times \sqrt{(1-s^2-g^2+s^2g^2)}}$$

$$= \frac{1-s^2-g^2-p^2+2sgp}{(1-s^2)\sqrt{(1-g^2-p^2+g^2p^2)}}, \text{ \& par conséquent } s\Gamma\Pi - GP,$$

que la règle généralement établie pour le cas où étant connus deux angles & le côté compris entre ces angles, on cherche la valeur du troisième angle, prescrit de faire $= S$,

$$\text{devra être } = \frac{s-s^3-sg^2-sp^2+2s^2gp-gp+s^2g^2+sp^2-s^2gp}{(1-s^2)\sqrt{(1-g^2-p^2+g^2p^2)}}$$

$$= \frac{(1-s^2) \times (s-gp)}{(1-s^2)\sqrt{(1-g^2-p^2+g^2p^2)}} = \frac{s-gp}{\sqrt{(1-g^2-p^2+g^2p^2)}},$$

valeur, dont la comparaison avec la même valeur, S

$$= \frac{s-gp}{\sqrt{(1-g^2-p^2+g^2p^2)}}, \text{ que fournit immédiatement la racine}$$

de la première équation, nous donne l'identité $0 = 0$, ou nous démontre la simultanéité nécessaire des racines que nous comparions, & dès-lors, & d'après notre certitude antérieure sur la vérité de la première, la vérité de la seconde, c'est-à-dire, celle de la règle reçue pour le cas que nous venons de décrire, ou de $S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, ou $S = s\Gamma\Pi - GP$.

Il est vrai que si au lieu de faire ici $S = s\Gamma\Pi - GP$, nous l'avions supposé $= -s\Gamma\Pi + GP$, en employant ainsi pour simultanée à notre racine $s - S\gamma\pi - gp = 0$ de la première équation, la racine $S + s\Gamma\Pi - GP = 0$, & non $S - s\Gamma\Pi + GP$ de la seconde, nous serions

parvenus de même à une identité; mais mal-à-propos prétendrait-on conclure de-là, une double règle pour le cas trigonométrico-sphérique dont nous parlons; puisque la racine de la seconde équation, nouvellement employée, pouvant se changer en $-S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, & ne différant alors de $+S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, qu'on avoit employée auparavant, que par le signe de la lettre S , dégagée dans les deux, de tout facteur, la diversité entre l'une & l'autre doit uniquement indiquer que si la différence des membres $s\Gamma\Pi$ & GP devient de positive négative, l'angle GSP doit être changé d'aigu en obtus.

Mais la comparaison des valeurs de S , tirées des deux racines de la seconde équation, différentes de $+S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, & $+S + s\Gamma\Pi - GP = 0$, avec celle que donne la racine, $s - S\gamma\pi - gp = 0$, de la première; menant au contraire, d'après un calcul semblable au précédent, à des conditions, savoir, celle de $S - s\Gamma\Pi - GP = 0$, à la condition $p^2 - sgp + g^2 = 0$, & celle de $S + s\Gamma\Pi + GP = 0$, à la condition $p^2 + g^2 = 0$, il s'en suit toujours de ce que nous venons de dire, que la double racine, $+S \mp s\Gamma\Pi \pm GP = 0$, de la seconde équation, est seule simultanée avec la racine, $s - S\gamma\pi - gp = 0$, de la première, selon l'excès de $s\Gamma\Pi$ sur GP , ou le défaut du premier de ces produits au second, ou que la première de ces formules de racines, qui est double, renferme les deux seules qu'on puisse conclure légitimement de la seconde; proposition à laquelle ce qu'on dit ou laisse entendre quelquefois, qu'une telle conclusion d'une de ces formules à l'autre, ne sauroit avoir lieu dans aucun cas, qu'autant qu'on auroit changé *tous* les côtés & angles de l'une, en *supplémens* d'angles & de côtés de l'autre, donneroit pourtant trop d'étendue; puisque le changement simple réciproque de côtés en angles & d'angles en côtés, d'éléments désignés par quatre lettres différentes, joint à celui de l'angle seul dont le cosinus est désigné par la lettre S , en *supplément* de côté, c'est-à-dire, à celui du signe de la seule lettre S , en $-s$, suffit pour

pour changer parfaitement la formule de racine $+s - S\gamma\pi - gp = 0$, que nous avons déduite immédiatement de notre problème, en $+S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, ou en $-S - s\Gamma\Pi + GP = 0$, que l'on convient généralement & à propos, devoir être employées dans les cas où étant donnés deux angles & le côté compris entre ces angles, on cherche la valeur du troisième angle, ou bien où étant donnés les trois angles, on cherche la valeur de l'un des côtés; proposition enfin, qui offre ainsi un exemple curieux des éclaircissémens importans que des solutions synthétiques, compliquées & obscures, peuvent tirer de l'analyse algébrique de leurs divers élémens.

COROLLAIRE IV.

Il faudra donc, pour résoudre le premier des deux cas, dont nous venons de parler, c'est-à-dire, celui où *étant donnés, par exemple, les deux angles G & P, & le côté GP opposé à l'angle S, on chercheroit la valeur de ce troisième angle S*, prendre pour cosinus de ce dernier angle, l'expression $+s\Gamma\Pi - GP$, ou la différence de $s\Gamma\Pi$ à GP , laquelle rendra l'angle cherché aigu ou obtus, selon qu'elle sera positive ou négative; troisième règle qu'on peut exprimer ainsi, $S = +s\Gamma\Pi - GP$.

COROLLAIRE V.

Et l'on résoudra le second des deux mêmes cas, ou celui *des trois angles donnés, & dans lequel on demanderoit la valeur d'un des côtés*, en faisant le cosinus du côté cherché, ou $s = \frac{S + GP}{\Gamma\Pi}$, premier énoncé d'une quatrième règle, auquel il sera dans la pratique, & pour s'affranchir du calcul des fractions, à propos de préférer celui-ci, tiré de la substitution de sécantes & tangentes, que notre seconde demande enseigne de faire,

$$s = +S \sqcap G \sqcap P + \Gamma G \Gamma P.$$

Mém. 1783.

R.

Nous remarquerons enfin, au sujet de ce qui précède, que si nous avons supposé dans la solution du problème, l'angle GSP obtus, & par conséquent son cosinus $= -s$, il en auroit résulté

$$\begin{aligned} S &= \frac{-s - gp}{\gamma \pi}, \quad GP = \frac{(g + sp) \times (p + sg)}{\sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}}; \\ \Gamma \Pi &= \frac{1 - s^2 - g^2 - p^2 - 2sgp}{\sqrt{(1 - s^2 - g^2 + s^2 g^2)} \times \sqrt{(1 - s^2 - p^2 + s^2 p^2)}} \\ &= \frac{1 - s^2 - g^2 - p^2 - 2sgp}{(1 - s^2) \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}}; \quad s \Gamma \Pi - GP \\ &= \frac{-s + s^3 + sg^2 + sp^2 + 2s^2 gp - gp - sg^2 - sp^2 - s^2 gp}{(1 - s^2) \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}}; \\ &= \frac{(1 - s^2) \times (-s + gp)}{(1 - s^2) \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}} = \frac{-s + gp}{\sqrt{(1 - g^2 - p^2 + g^2 p^2)}}. \end{aligned}$$

& que ce seroient par conséquent alors, les racines

$$S \mp s \Gamma \Pi \mp GP = 0$$

de la seconde équation, qui, comparées avec

$$s + S \gamma \pi + gp = 0,$$

à laquelle se réduiroit la première, meneroient à une identité, & par conséquent aussi, ces seules racines-là, qui deviendroient simultanées avec celle-ci; en sorte que la formule du Corollaire IV se changeroit en

$$S = -s \Gamma \Pi - GP,$$

& que celle du Corollaire V deviendrait

$$s = \frac{-S - GP}{\Gamma \Pi}, \text{ ou } s = -S \sqcap G \sqcap P - \sqcap G \sqcap P.$$

COROLLAIRE V. I.

Dégageant maintenant de la formule de la première règle, ou de $s = S \gamma \pi + gp$, la lettre γ , par exemple, au lieu de la lettre S , carrant les deux côtés de l'équation que cela donnera, substituant dans la première, $1 - g^2$ à la place de γ^2 , arrangeant les termes par rapport à g , &

résolvant l'équation du second degré en g , qui résultera de-là, il viendra

$$g = \frac{sp \pm \sqrt{[s^2 p^2 + (S^2 \pi^2 + p^2) \times (S^2 \pi^2 - s^2)]}}{S^2 \pi^2 + p^2},$$

$$\text{ou } g = \frac{sp \pm \sqrt{[s^2 p^2 + S^2 \pi^2 \times (S^2 \pi^2 + p^2 - s^2) - s^2 p^2]}}{S^2 \pi^2 + p^2}$$

$$= \frac{sp \pm S \pi \sqrt{(S^2 \pi^2 + p^2 - s^2)}}{S^2 \pi^2 + p^2};$$

& chassant, tant du radical que comprend le numérateur, que du dénominateur, les expressions des cosinus, par la substitution de celles des sinus en leur place, on aura

$$g = \frac{sp \pm S \pi \sqrt{(\pi^2 - \Sigma^2 \pi^2 + 1 - \pi^2 - 1 + \sigma^2)}}{1 - \Sigma^2 \pi^2},$$

ou enfin

$$g = \frac{sp \pm S \pi \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{1 - \Sigma^2 \pi^2},$$

pour première formule d'une cinquième règle, propre à la solution du cas, où, étant donnés deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés & adjacent à l'autre, on chercheroit la valeur du troisième côté, laquelle doit ainsi être double.

Le Corollaire qu'on a tiré ci-dessus de la troisième demande, donnera de plus le moyen de simplifier beaucoup & diversément, cette formule.

En effet le cosinus dont elle représente la valeur, y est composé de la somme ou de la différence de deux produits, savoir,

$$\frac{p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} \times \frac{s}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} \quad \& \quad \frac{S \pi}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} \times \frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}};$$

les substitutions de $1 - \pi^2$ pour p^2 , & de $\pi^2 - \Sigma^2 \pi^2$ pour $S^2 \pi^2$, ou de $1 - s^2$ pour σ^2 , font d'ailleurs voir aisément, que les sommes des carrés de chacun des produisans de l'un de ces produits & du correspondant de l'autre, sont

Rr ij

l'une & l'autre $= 1$, & que dès-lors les produisans du premier de ces deux mêmes produits étant pris pour cosinus ou pour sinus de deux arcs ou angles, ceux du second deviendront respectivement les sinus ou cosinus des mêmes arcs ou angles; & il s'ensuit de-là, & du Corollaire de la troisième demande, que l'arc ou angle inconnu, dont g devoit être le cosinus, peut se changer en la différence ou en la somme de deux autres arcs ou angles, des cosinus desquels les expressions seroient

$$\frac{P}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}; \& \frac{S}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}},$$

en même-temps que les sinus en seroient respectivement représentés par

$$\frac{S \pi}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, \& \frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}.$$

Ces quatre fractions ayant enfin toutes le même dénominateur, & les tangentes des arcs ou angles élémentaires auxquelles elles appartiennent, devant par conséquent résulter de la division du numérateur de chacune de celles qui expriment un sinus, par le numérateur de celles qui représentent le cosinus correspondant, il s'ensuit de-là, que la tangente du premier des deux arcs ou angles élémentaires, doit être

$$= \frac{S \pi}{P} = S \Pi \pi;$$

& que Π étant, d'après la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés, $= \frac{\Sigma \pi}{\sigma}$, laquelle donne

$$P = \frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma}, \text{ où } \sigma P = \pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)},$$

& change le sinus du second arc ou angle élémentaire en

$$\frac{\pm \sigma P}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, \text{ la tangente de ce second arc ou angle}$$

$$\text{élémentaire sera donc, } \frac{\pm \sigma P}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} = \frac{\pm P}{\Pi \sigma},$$

& ainsi l'arc ou angle inconnu, dont g devra être le cosinus

fera la différence ou la somme de deux arcs ou angles qui auroient respectivement pour tangentes

$$\frac{S \pi}{P}, \text{ ou } S \text{ T } \pi; \text{ \& } \frac{\sigma P}{S}, \text{ ou } P \text{ T } \sigma;$$

seconde formule de la règle, laquelle simplifie beaucoup l'énoncé du corollaire, mais n'a pu être obtenue qu'en cherchant préliminairement la valeur de P .

Sans recourir du reste, ni aux proportions des sinus des angles & de ceux des côtés, des triangles sphériques, ni même aux expressions des sinus en particulier, des arcs ou angles élémentaires, & ayant seulement cherché dans la table des sinus, un sinus $= \Sigma \pi$, lequel j'appellerai n , nommé h le cosinus correspondant, ou $\sqrt{1 - \Sigma^2 \pi^2}$, & représenté en conséquence, la sécante correspondante aussi,

par $\frac{1}{h} = \text{---} n$, on pourra conclure de-là, que les cosinus des deux arcs ou angles élémentaires devront être respectivement $p \text{---} n$, & $s \text{---} n$; dernière formule de la règle, que nous jugeons même préférable à la précédente ou seconde, en ce qu'indépendamment de notre remarque sur l'emploi de P dans celle-ci, les deux produits qui représentent les cosinus des deux parties de l'arc ou angle inconnu, ont ici un produisant commun, savoir $\text{---} n$; & que cette circonstance peut contribuer beaucoup à faciliter des constructions de tables, en quoi consiste le principal usage de la Trigonométrie sphérique.

COROLLAIRE VII.

De même que dans les corollaires quatrième & cinquième, nous avons conclu de la formule unique de notre première règle, & de la seconde formule de notre seconde règle, la formule unique de notre troisième règle, & les deux de la quatrième; de même aussi, & en suivant la même marche, peut-on inférer des trois formules de notre troisième règle, trois formules différentes d'une fixième règle, pour la solution du cas où il s'agira de *déterminer la valeur d'un angle, d'après*

la connoissance qu'on pourra avoir des deux autres angles, & d'un côté opposé à l'un de ceux-ci, & adjacent à l'autre; formules dont, suivant que le prouveroient des calculs semblables à ceux du corollaire précédent, la première se trouvera être

$$G = \frac{-SP \pm s\Pi\sqrt{(\Sigma^2 - \sigma^2\Pi^2)}}{\sqrt{(1 - \sigma^2\Pi^2)}};$$

la seconde assignera pour valeur des tangentes des deux parties, de la soustraction ou addition desquelles devra résulter l'arc ou angle cherché, respectivement, $— s\Pi\Pi$, & $\pm p\Pi\Sigma$, & (π étant pris pour un sinus égal au produit $\sigma\Pi$, & h pour le cosinus correspondant), prescrira la troisième, préférable aux deux autres, de prendre respectivement pour cosinus des deux parties du même arc ou angle cherché, $P \mp \pi$, & $— S \mp \pi$.

Observation concernant les six Règles précédentes.

On ne sauroit proposer aucun cas de problème de Trigonométrie sphérique, qui ne comprenne, ou trois données d'un même nom, savoir, trois côtés ou trois angles, ou deux données d'un nom & la troisième d'un autre; & tous les cas compris dans le premier membre de cette division générale, peuvent d'abord être facilement résolus par nos règles seconde & quatrième, & de préférence par leurs secondes ou dernières formules, plutôt que par les premières.

Quant au second membre de la même division générale, lequel admet deux données d'un même nom & une seule de l'autre, l'élément cherché devra y être homogène, ou aux deux données du même nom, ou à la donnée seule de son nom; & les cas renfermés dans la première branche de cette subdivision, recevront tous une solution aisée de nos règles première & cinquième, ou troisième & sixième, selon que la donnée seule de son nom, sera comprise entre les deux de même nom l'une que l'autre, ou ne le sera pas; & (supposé qu'on les résolve en effet par la cinquième ou la

fixième), en employant alors, leurs secondes ou troisièmes formules, plutôt que les premières, & se fixant même de préférence aux troisièmes ou dernières.

La seconde branche de la même subdivision se subdivise de son côté, en trois autres.

En effet, ou bien l'élément donné seul de son nom, ainsi que le cherché, devront tout à la fois l'un & l'autre, être opposés à l'un des donnés de même nom l'un que l'autre, cas qu'on pourra résoudre par la seule proportion des sinus des angles & de ceux des côtés, & qui a ainsi deux solutions, donnant pour l'angle cherché des valeurs, l'une $>$, l'autre $<$ que 90° .

Ou bien l'élément donné seul de son nom, sera compris entre les deux autres donnés aussi, de même nom l'un que l'autre; & l'élément cherché, qui ne pourroit plus être l'opposé au donné seul de son nom, sans qu'on retombât dans nos première & troisième règles, sera opposé à l'un des donnés de même nom l'un que l'autre cas; qu'on pourra résoudre en cherchant d'abord par la première règle ou par la troisième, la valeur de l'élément opposé au donné seul de son nom, & faisant ensuite usage de la proportion entre les sinus des côtés & ceux des angles.

Ou bien enfin l'élément cherché devra au contraire être compris entre les deux donnés de même nom l'un que l'autre, & ce sera le donné seul de son nom qui sera opposé à l'un de ceux-ci & adjacent à l'autre; cas dans lequel notre cinquième & notre sixième règles offriront d'abord un moyen de trouver la valeur de l'élément opposé au cherché, & l'on pourra ensuite, par l'emploi de la proportion entre les sinus des angles & ceux des côtés, parvenir à la connoissance de l'élément même cherché; en sorte que nos six règles précédentes devroient déjà, au besoin, répondre à toutes les questions auxquelles la Trigonométrie sphérique donne lieu, & que ç'a été sans doute, parce que feu M. Léonard Euler a jugé qu'on y devroit en effet répondre de cette manière, que ce grand Géo-

mètre n'a pas poussé plus loin qu'il n'a fait, dans le Mémoire de 1753 que nous avons déjà cité de lui, la recherche des formules qu'il se proposoit d'y donner.

Mais n'auroit-on pas encore imaginé des moyens de réduire les derniers cas, ou du moins l'un des derniers cas que renferme la dernière branche de notre seconde subdivision, à une seule espèce d'opération chacun, au lieu des deux espèces consécutives, à la faveur desquelles nous aurions jusqu'ici enseigné de les résoudre? ou, si l'on n'avoit pas encore rempli cet objet, ne seroit-il pas possible de suppléer à l'imperfection à un tel égard, qu'on pourroit alors reprocher à la Trigonométrie sphérique? le projet que nous avons annoncé dans le titre même de notre Ouvrage, de traiter complètement de cette Science, n'exigeroit-il pas d'ailleurs que nous pussions joindre aux règles que nous avons données jusqu'ici, & aux nouvelles règles que nous aurions pu en déduire, pour les cas compris dans les deux dernières branches de la subdivision immédiatement précédente, & desquels nous venons de parler, différentes autres règles pour les mêmes effections, sinon d'une pratique aussi facile, du moins curieuses & élégantes, qu'on trouve dans divers Auteurs? ce sont-là deux points importants dont nous devons maintenant nous occuper.

COROLLAIRE VIII.

Et d'abord, si, étant donnés deux côtés & l'angle compris entre ces côtés, on ne cherchoit plus, comme dans la solution de notre Problème unique, la valeur du troisième côté, mais on se proposoit de trouver celle de l'un des autres angles: par exemple, si, étant donnés les deux côtés opposés aux angles G & P , & l'angle S , on cherchoit la valeur de l'angle G , l'un des deux cas qu'on nomme *des quatre parties continues*, parce que les trois élémens donnés & le cherché s'y suivent immédiatement l'un l'autre, sans interruption; notre première règle, résultante de la solution même du Problème, nous donnant $s = S\gamma\pi + gp$, ou $s^2 = S^2\gamma^2\pi^2 + 2S\gamma\pi gp + g^2p^2$,
&

& en conséquence $\sigma = \sqrt{(1 - S^2 \gamma^2 \pi^2 - 2 S \gamma \pi g p - g^2 p^2)}$, & la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés ajoutant à cela que $\Gamma = \frac{\Sigma \gamma}{\sigma}$, on concludroit de-là,

$$\Gamma = \frac{\Sigma \gamma}{\sqrt{(1 - S^2 \gamma^2 \pi^2 - 2 S \gamma \pi g p - g^2 p^2)}}, \text{ \& par conséquent}$$

$$(\sqrt{1 - \Gamma^2}), \text{ ou } G = \frac{\sqrt{(1 - S^2 \gamma^2 \pi^2 - 2 S \gamma \pi g p - g^2 p^2 - \Sigma^2 \gamma^2)}}{\sqrt{(1 - S^2 \gamma^2 \pi^2 - 2 S \gamma \pi g p - g^2 p^2)}}.$$

On remarqueroit ensuite que s'il étoit possible de décomposer la quantité qui se trouveroit ici sous le signe radical du dénominateur commun des deux valeurs fractionnaires auxquelles on seroit parvenu, en deux carrés, dont l'un fût celui du numérateur de la première, pris positivement, savoir, $+\Sigma^2 \gamma^2$, & l'autre fût peu compliqué, on auroit alors l'expression de $\sqrt{(1 - \Gamma^2)}$, ou de G , par une fraction dont le numérateur seroit rationnel & peu compliqué, & qui auroit d'ailleurs le même dénominateur que celle qui auroit ex-

primé Γ ; d'où s'ensuivroit que les quotiens $\frac{\Gamma}{G}$ & $\frac{G}{\Gamma}$, ou la tangente & la cotangente de l'angle cherché, se trouveroient représentées par des fractions fort simples; en sorte que ce pourroit être là, une chose à tenter.

Dans la vue donc d'introduire en effet $+\Sigma^2 \gamma^2$ dans le dénominateur commun aux deux fractions, on y ajoutera réellement ce monome carré, en en soustrayant d'autre part sa valeur $(1 - S^2) \times (1 - g^2)$, ou $1 - S^2 - g^2 + S^2 g^2$, & il viendra de-là sous le signe du dénominateur commun,

$$1 - S^2 \gamma^2 \pi^2 - 2 S \gamma \pi g p - g^2 p^2 + \Sigma^2 \gamma^2 - 1 + S^2 + g^2 - S^2 g^2;$$

on changera ensuite $-g^2 p^2 + g^2$ en $g^2 \pi^2$,

$$-S^2 g^2 + S^2 \text{ en } S^2 \gamma^2,$$

$$\text{ \& } S^2 \gamma^2 - S^2 \gamma^2 \pi^2 \text{ en } S^2 \gamma^2 p^2;$$

& après tous ces changemens, le polynome entier se trouvera réduit à $g^2 \pi^2 - 2 S g p \gamma \pi - S^2 \gamma^2 p^2 + \Sigma^2 \gamma^2$, outre qu'on aura sous le signe du numérateur de la valeur de G ,

$g^2 \pi^2 - 2 \mathcal{S} g p \gamma \pi + \mathcal{S}^2 \gamma^2 p^2 + \Sigma^2 \gamma^2 - \Sigma^2 \gamma^2$,
ou seulement $g^2 \pi^2 - 2 \mathcal{S} g p \gamma \pi + \mathcal{S}^2 p^2 \gamma^2$; ce qui
donnera enfin,

$$G = \frac{\pm \mathcal{S} \gamma p \mp g \pi}{\gamma [(1 + \mathcal{S} \gamma \pi + g p) \times (1 - \mathcal{S} \gamma \pi - g p)]}.$$

Et des valeurs ainsi trouvées de Γ & de G , on conclura
pour première formule d'une septième règle,

$$\Gamma G = \frac{\pm \mathcal{S} \gamma p \mp g \pi}{\Sigma \gamma},$$

ou cette seconde & meilleure formule de la même septième
règle $\Gamma G = \pm p \Gamma \mathcal{S} \mp \pi \Gamma g \mp \mathcal{S}$, c'est-à-dire,
qu'on pourra avoir la cotangente de l'angle cherché, en ôtant du
produit du cosinus du côté donné, tenant à l'angle cherché, par
la cotangente de l'angle donné, le produit du sinus du même côté
donné, tenant à l'angle cherché, par la cotangente du côté
donné, opposé à l'angle cherché, & par la cosécante de l'angle
donné, ou en faisant le contraire; ce qui rendra l'angle cherché
aigu ou obtus, selon que la différence des deux produits
dont nous venons de parler, devra être prise positive ou
négative.

A quoi l'on peut joindre qu'en changeant dans cette for-
mule de règle, les G & g en P & p , & les π & p en γ & g ,
elle feroit alors connoître la cotangente ΓP de l'angle \mathcal{S} / G ,
en ce qu'elle deviendrait $\Gamma P = \pm g \Gamma \mathcal{S} \mp \gamma \Gamma p$
 $\mp \mathcal{S}$; la séquence des quatre élémens continus commençant
alors au côté $\mathcal{S} G$ pour finir à l'angle P , au lieu de commencer
comme auparavant, au côté $\mathcal{S} P$ pour finir à l'angle G , ou
allant en sens contraire de la précédente.

COROLLAIRE IX.

Multipliant par Σ les deux côtés de la formule du corol-
laire VIII, elle nous donnera ce beau théorème, qu'on nomme
aussi des *parties continues*, $\pm \pi \Gamma g \mp p \mathcal{S} = \Sigma \Gamma G$,
c'est-à-dire, que la différence positive ou négative des produits
du sinus du côté opposé à l'angle P , par la cotangente du côté

opposé à l'angle G , & du cosinus du même côté opposé à l'angle P , par le cosinus de l'angle S , = le produit du sinus de l'angle S , par la cotangente de l'angle G , ou plus généralement que la différence positive ou négative, des produits du sinus du côté moyen, par la cotangente du côté extrême, & des cosinus du côté & de l'angle moyen, l'un par l'autre, est toujours égale au produit du sinus de l'angle moyen, par la cotangente de l'angle extrême.

COROLLAIRE X.

D'où l'on déduira pour le cas où seroient donnés deux angles G & S , & le côté GS compris entre ces angles, & l'on chercheroit la valeur du côté SP opposé au premier angle & adjacent au second, $\tau g = \tau p S \pm \Sigma \tau G \mp p$, c'est-à-dire, qu'il faudra prendre pour cotangente du côté cherché & extrême, la somme ou la différence des produits de la cotangente du côté moyen, par le cosinus de l'angle moyen, & du sinus de l'angle moyen, par la cotangente de l'angle extrême, & par la cosécante du côté moyen; formule à laquelle on peut substituer à volonté, d'une manière analogue à ce qu'on a fait dans le corollaire précédent, celle que donneroit une séquence qui, commençant comme la première, à l'angle G , continueroit à contre-sens de celle-ci, savoir $\tau g = \tau s P \pm \Pi \tau G \mp s$.

En effet, si l'on faisoit sur la formule $S = s \Gamma \Pi - GP$ du corollaire IV, les mêmes calculs qu'on a faits dans le corollaire VIII, sur la formule $s = S \gamma \pi + gp$ de la solution du problème même, il en résulteroit, suivant que nous nous en sommes convaincus par l'opération, au lieu de

$$\tau G = \pm p \tau S \mp \pi \tau g \mp S$$

qui avoit résulté du corollaire VIII,

$$\tau g = \tau s P \pm \Pi \tau G \mp s.$$

On peut de plus remarquer ici, que Lambert semble peu à propos, dans le Mémoire de l'année 1768, que nous

324 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 avons cité plus haut de lui, faire dépendre toute la Trigonométrie sphérique de nos quatre premières règles, jointes seulement à des proportions de sinus d'angles & de côtés, & à cette septième; attendu qu'on ne tireroit jamais de tout cela, qu'en y joignant la résolution d'une équation du second degré, nos règles pour les cas où l'inconnue doit résulter de deux parties; savoir, nos V.^{me} & VI.^{me}, & les IX.^{me} & X.^{me} qui nous restent à donner.

COROLLAIRE XI.

Les lettres employées dans la formule du corollaire VIII, qui désignent des fonctions différentes des deux élémens moyens de la séquence d'élémens que l'on considère dans ce corollaire, paroissant ne devoir offrir, après le dégagement qu'on en auroit fait, au moyen de la résolution d'une équation du second degré assez compliquée, aucune simplification pour le cas où étant donnés deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés & adjacent à l'autre, on chercheroit la valeur de l'angle compris entre les deux côtés donnés, laquelle on ne pût attendre, du moins également, de l'emploi à cet effet, d'une méthode analogue à celle que nous avons indiquée dans l'observation à la suite du corollaire VII, ç'a été à une telle méthode que nous avons cru devoir nous en tenir de préférence, pour simplifier la solution de ce cas, le moins traitable de tous.

Supposant donc connoître les côtés SG & GP , & l'angle S , & nous proposant de découvrir la valeur de l'angle G . la première formule de notre cinquième règle nous a d'abord

donné $g = \frac{sp \pm S\pi / (\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}{1 - \Sigma^2 \pi^2}$, & par conséquent

$$\sqrt{(1 - g^2)}, \text{ ou } \gamma =$$

$$\frac{\pm / [1 - 2 \Sigma^2 \pi^2 + \Sigma^4 \pi^4 - s^2 p^2 \mp 2 sp S\pi] \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2) - S^2 \sigma^2 \pi^2 + S^2 \Sigma^2 \pi^4}}{1 - \Sigma^2 \pi^2};$$

& la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés

joignant à cela, que $\Gamma = \frac{\Sigma^2}{\sigma}$, nous avons conclu que $\Gamma =$

$$\frac{\Sigma^2 \pm \sqrt{[1 - 2\Sigma^2\pi^4 + \Sigma^4\pi^4 - s^2p^2 \mp 2spS\pi\sqrt{(\sigma^2 - \pi\Sigma^2\pi^2) - S^2\sigma^2\pi^2 + S^2\Sigma^2\pi^4}]}{\sigma \pm \sqrt{(1 - \Sigma^2\pi^2)}}$$

première expression du sinus de l'angle cherché, à la simplification de laquelle nous n'avons pas renoncé de réussir, quelque peu qu'un premier coup-d'œil l'en dût faire juger susceptible.

Si l'on pouvoit, avons-nous pensé dans cette vue, parvenir, au moyen de diverses substitutions de valeur, à former des seules quantités rationnelles, au nombre de fix, qui se trouvent sous le grand signe radical du numérateur, trois carrés, dont l'un fût celui d'un des facteurs du coëfficient en lettres, $spS\pi$ du petit radical, compris aussi sous le signe du grand, & dont les deux autres fussent les produits du carré de l'autre facteur du même coëfficient, par les quantités comprises au nombre de deux, sous le petit radical, & le dernier en particulier, fût d'après cela, négatif; on rendroit dès-lors possible l'extraction de racine carrée de la somme entière & mixte que comprend le grand signe radical; & il peut en conséquence être à propos d'essayer si ces opérations préliminaires seroient en effet praticables ou non.

Remarquant d'abord pour cet effet, qu'aucun des trois carrés dont on vient de parler, ne sauroit contenir Σ^4 , que Σ^4 se trouve pourtant au troisième des membres sous le grand signe, & que $\Sigma^2 + S^2 = 1$, nous avons commencé par changer la somme du troisième & du sixième membres rationnels, savoir, $\Sigma^4\pi^4 + \Sigma^2S^2\pi^4$ en $\Sigma^2\pi^4$, ce qui a réduit le sextinome rationnel sous le grand signe, au quintinome rationnel aussi, $1 - 2\Sigma^2\pi^2 - s^2p^2 - S^2\sigma^2\pi^2 + \Sigma^2\pi^4$.

Nous avons de plus observé qu'aucun des trois mêmes carrés ne pouvoit avoir de coëfficient numérique; & combinant en conséquence de cela, l'un des deux $\Sigma^2\pi^2$, compris dans le second membre du quintinome que nous venions d'obtenir, avec le dernier membre $\Sigma^2\pi^4$ du même quintinome, nous avons changé ce quintinome en cet autre,

$1 - \Sigma^2 \pi^2 - s^2 p^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2 - \Sigma^2 \pi^2 p^2$; & comme le dernier membre $-\Sigma^2 \pi^2 p^2$ de ce quintinome, produit de $-\Sigma^2 \pi^2$, dernier membre de la quantité comprise sous le petit signe radical, par p^2 , carré d'un des facteurs du coefficient de ce petit radical, pouvoit représenter l'un des carrés dont nous avons besoin, nous l'avons mis à part, pour ne nous plus occuper que de tirer du quadrinome $1 - \Sigma^2 \pi^2 - s^2 p^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2$, restant, les deux autres carrés que nous avons encore à former, & qui étoient maintenant déterminés aux valeurs $\sigma^2 p^2$ & $S^2 s^2 \pi^2$.

Il ne nous falloit pour cela, ni le premier ni le troisième membres de notre quadrinome; & nous avons pensé d'après cette réflexion, à les chasser tous deux en même-temps, en substituant au dernier des deux, sa valeur $-(1 - \sigma^2) \times (1 - \pi^2) = 1 + \sigma^2 + \pi^2 - \sigma^2 \pi^2$; ce qui, au lieu du quadrinome que nous avions, nous a produit le nouveau quintinome suivant, $\sigma^2 + \pi^2 - \sigma^2 \pi^2 - \Sigma^2 \pi^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2$, non sans nous laisser d'abord quelque inquiétude au sujet de l'augmentation survenue dans le nombre des membres que nous avons à considérer, lequel il s'agissoit au contraire de réduire.

Continuant pourtant notre recherche, & observant qu'il ne nous falloit point de $-\Sigma^2 \pi^2$, nous avons substitué à ce quatrième membre de notre nouveau quintinome, sa valeur, $-\pi^2 + S^2 \pi^2$, ce qui nous a ramenés à un nouveau quadrinome, savoir, $\sigma^2 - \sigma^2 \pi^2 + S^2 \pi^2 - S^2 \sigma^2 \pi^2$, & nous avons alors remarqué avec satisfaction, que les deux premiers membres de ce nouveau quadrinome pouvoient évidemment se changer en l'un, $\sigma^2 p^2$, des carrés que nous desirions encore d'obtenir, & que les deux derniers étoient de leur côté, précisément équivalens à l'autre, $+ S^2 s^2 \pi^2$.

Or, notre expression de Γ , doublement radicale & compliquée, s'étant ainsi changée en

$$\frac{\sigma \sqrt{[\sigma^2 p^2 - \Sigma^2 \pi^2 p^2 + 2 s p S \pi \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2) + S^2 s^2 \pi^2}]}{\sigma \times (1 - \Sigma^2 \pi^2)},$$

du numérateur de laquelle le facteur radical se trouve, au moyen de l'extraction de racine, être

$$= \mp p \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)} + S s \pi,$$

nous avons conclu de-là une première formule d'une neuvième règle, savoir, $\Gamma = \frac{\Sigma \times [S s \pi \mp p \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}]}{\sigma \times (1 - \Sigma^2 \pi^2)}$.

Nous nous sommes encore bientôt aperçus, d'après la seconde partie du corollaire de notre quatrième demande, & conformément à l'emploi que nous avons déjà fait de la première partie du même corollaire, pour simplifier la première formule de notre cinquième règle, que l'angle auquel appartient ce sinus, a pour parties deux autres angles, dont les sinus sont $\frac{S}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\pm \sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, & les cosinus

sont respectivement $\frac{\Sigma p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\Sigma \pi s}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, quantités

de la première & la troisième desquelles, après y avoir substitué $1 - \Sigma^2$ au lieu de S^2 , & $1 - \pi^2$ au lieu de p^2 , & des carrés de la seconde & la quatrième desquelles, après la substitution de $1 - \sigma^2$ au lieu de s^2 , les deux sommes respectives se trouvent en effet être égales à l'unité; & nous en avons conclu que l'angle cherché devoit résulter de la différence ou de la somme de deux autres, qui auroient pour

sinus & cosinus, le premier $\frac{S}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\Sigma p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, & le second $\frac{\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$ & $\frac{\Sigma \pi s}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$.

Et comme il pouvoit le présenter ici un moyen de simplification par les tangentes, analogue à celui dont nous avons conclu la troisième formule de notre cinquième règle, nous nous sommes d'abord attachés à nous assurer si cette simplification seroit en effet possible.

Remarquant donc dans cette vue, que le quotient de la première des quatre fractions rapportées ci-dessus, par la troisième, devoit donner la tangente de la première partie

de l'angle cherché, ou de celle qui ne seroit susceptible que d'un seul signe, nous avons d'abord déterminé cette première partie d'angle, en lui assignant pour tangente le produit de la cotangente de l'angle S , par la sécante du côté opposé à l'angle P , ou en supposant cette tangente de première partie, $\equiv \tau S \mp \pi$.

Après quoi, & en conséquence de la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés opposés, ayant changé le numérateur de la seconde de nos fractions $\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}$ en $\sqrt{(\sigma^2 - \sigma^2 \Pi^2)}$, ou en $\sigma \sqrt{(1 - \Pi^2)}$, ou en σP , & celui de la quatrième & dernière en $\sigma s \Pi$, nous avons conclu que la tangente de la seconde partie de l'angle cherché ou de celle qui seroit susceptible de deux valeurs, devoit être représentée par $\frac{P}{s \Pi}$ ou par $\tau P \mp \sigma$, produit de la cotangente de l'angle P , dont on supposeroit avoir trouvé la valeur, par la sécante du côté opposé à l'angle S .

Prenant enfin dans les Tables, un sinus $\equiv \Sigma \pi$, que nous avons nommé ϕ , & dont nous avons supposé le cosinus $\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)} \equiv f$, & changeant l'expression de la troisième des fractions ci-dessus, en l'équivalente

$$\frac{\Sigma \pi p}{\pi \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} = \frac{\phi p}{\pi f},$$

nous avons exprimé les cosinus de nos deux parties d'angles, ou les deux dernières des fractions ci-dessus rapportées, par $\tau \phi \tau p$, appartenant à l'angle élémentaire susceptible de deux valeurs, & par $\tau \phi \tau s$ appartenant à l'autre; & en ayant conclu que l'angle cherché doit résulter de la somme ou de la différence de deux autres, dont les cosinus seroient $\tau \phi \tau s$ & $\pm \tau \phi \tau p$, nous avons avec d'autant plus de raison préféré cette 3.^{me} & dernière formule aux deux 1.^{eres}, quelque élégante même que soit aussi la seconde, qu'elle ne fait point, comme celle-ci, usage de la proportion des sinus des angles & des côtés, & que les cosinus des deux angles partiels, n'y ayant l'un & l'autre, comme leurs tangentes dans la seconde, que deux produisans, y ont de plus,
à la

à la différence de ce qui a lieu dans celle-ci, un produisant commun; ce qui doit faciliter beaucoup les constructions de Tables auxquelles on pourroit se proposer d'employer notre neuvième règle, c'est-à-dire, le principal usage de cette règle.

COROLLAIRE XII.

Par un raisonnement semblable à celui au moyen duquel nous avons conclu de la solution de notre problème unique & de ses corollaires I, VI, VII & IX, les règles & formules de règles, qu'offrent les corollaires IV, V, VIII & X, nous pourrions aussi inférer du corollaire précédent, trois nouvelles formules de règle, pour le cas où étant donnés deux angles & un côté opposé à l'un d'eux & adjacent à l'autre, par exemple, les angles S & P , & le côté GP , on chercheroit la valeur du côté SP , compris entre les deux angles donnés, savoir; 1.^o que les sinus des deux parties du côté cherché, sont $\frac{s}{\sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}} \& \frac{\pm \sqrt{(\Sigma^2 - \sigma^2 \Pi^2)}}{\Sigma \sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}}$, & que les cosinus en sont $\frac{\sigma P}{\sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}} \& \frac{-\sigma S \Pi}{\Sigma \sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}}$; 2.^o qu'on désigneroit également ces parties, en donnant pour tangentes à la première $\Gamma S \perp \Pi$, & à la seconde $\Gamma P \perp \Sigma$; 3.^o enfin que nommant ϕ un sinus $= \sigma \Pi$, & f son cosinus $= \sqrt{(1 - \sigma^2 \Pi^2)}$, on devroit préférer de donner respectivement à chacune, pour cosinus, $\Gamma \phi \Gamma P$ & $\Gamma \phi \Gamma S$.

COROLLAIRE XIII.

Quant aux autres règles, ou formules de règles, répandues dans divers ouvrages, & plus curieuses qu'utiles, qu'on auroit pu s'attendre que nous rapporterions & démontrerions dans celui-ci, il n'en est aucune que la combinaison de notre 4.^{me} demande avec son corollaire, l'observation que les radicaux employés dans les premières formules de notre 5.^{me} règle, & des suivantes, jusqu'à la 10.^{me} sont des moyennes proportionnelles entre des sommes & des différences de deux mêmes quantités, & la manière si connue dont deux quantités quelconques se forment de leur demi-

somme, plus ou moins leur demi-différence, ne donnaissent le moyen de déduire des formules ci-dessus rapportées; déduction dont le Mémoire déjà cité de F. C. Mayer, offre en particulier, quelques bons exemples: mais comme ces détails seroient trop recherchés, nous dirions même de luxe, dans une Science que nous nous flattons d'avoir désormais réduite d'une manière très-lumineuse, aux seules pratiques les plus simples qu'elle pût indiquer de suivre, nous nous contenterons de présenter ici les deux conclusions les plus élégantes de ce genre, auxquelles nos principes & notre méthode peuvent s'étendre, savoir; 1.^o celle qui, dans le cas du corollaire I.^{er} de notre problème unique & de notre seconde règle, où l'on connoît les trois côtés que nous nommerons f , h & k du triangle, & l'on cherche la valeur d'un de ses angles, par exemple, de celui qui seroit opposé au côté k , détermine une telle valeur par cette proportion, *la moyenne proportionnelle entre les sinus des deux côtés f & h , adjacens à l'angle cherché, est à la moyenne proportionnelle entre les sinus des demi-sommes de k & f — h & de k & h — f , comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle cherché;* 2.^o celle qui, dans le cas du corollaire VIII du même problème unique & de notre septième règle, où l'on connoît deux côtés du triangle & l'angle qu'ils comprennent entr'eux, enseigne à trouver chacun des deux autres angles, par ces deux proportions, *le sinus de la demi-somme des deux côtés connus, est à celui de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle donné, est à la tangente de la demi-différence des angles cherchés; & le cosinus de la demi-somme des côtés connus, est à celui de leur demi-différence, comme la même cotangente de la moitié de l'angle donné, est à la tangente de la demi-somme des angles cherchés.*

Nous observerons à ce sujet, comme un préalable nécessaire à l'une & à l'autre des démonstrations que nous annonçons, que si l'on nomme μ & m le sinus & le cosinus d'un arc ou angle, moitié d'un autre dont le sinus & le cosinus soient respectivement σ & s , notre quatrième demande &

l'égalité des deux parties de l'arc ou de l'angle dont σ & s sont le sinus & le cosinus, détermineront σ à être $m\mu + \mu m = 2m\mu$, & σ^2 à être $= 4m^2\mu^2 = 4m^2(1 - m^2)$, ou $= 4\mu^2(1 - \mu^2) = 4m^2 - 4m^4$, ou $4\mu^2 - 4\mu^4$; en sorte que s^2 ou $1 - \sigma^2$ sera $= 1 - 4m^2 + 4m^4 = 1 - 4\mu^2 + 4\mu^4$; que $\pm s$ sera $= \pm 1 - 2m^2 = \pm 1 - 2\mu^2$, & que m ainsi que μ , seront l'une & l'autre $= \sqrt{\left(\frac{1 \mp s}{2}\right)}$, c'est-à-dire, l'une & l'autre égales

à la racine de la moitié de l'un des sinus versés de l'angle à partager, savoir; pour l'arc ou angle de moins que 90° ou de plus que 270° , auquel pourroit se rapporter le cosinus s , & de la moitié duquel le cosinus est $>$ que le sinus, le cosinus

$m = \sqrt{\left(\frac{1+s}{2}\right)}$, & le sinus $\mu = \sqrt{\left(\frac{1-s}{2}\right)}$; & le contraire, ou le cosinus $m = \sqrt{\left(\frac{1-s}{2}\right)}$, & le sinus

$\mu = \sqrt{\left(\frac{1+s}{2}\right)}$, pour l'arc ou angle de plus que 90°

& de moins que 270° , auquel le même cosinus s seroit supposé appartenir, & de la moitié duquel le cosinus seroit $<$ que le sinus; ou qu'en général, le cosinus m doit être $= \sqrt{\left(\frac{1 \pm s}{2}\right)}$, & le sinus $= \sqrt{\left(\frac{1 \mp s}{2}\right)}$.

Et nous inférerons de-là ultérieurement, que la tangente, $T\mu$, de l'arc ou angle sous-double de celui dont s seroit le cosinus, doit, dans la supposition que ce dernier arc ou angle soit de moins que 90° ou de plus que 270° , être $= \sqrt{\left(\frac{1-s}{1+s}\right)}$, & dans la supposition contraire, ou que le même arc ou angle soit de plus que 90° & de moins que 270° , être $= \sqrt{\left(\frac{1+s}{1-s}\right)}$; ou en général $= \sqrt{\left(\frac{1 \mp s}{1 \pm s}\right)}$.

Passant de-là à la 1.^{re} des démonstrations que nous avons promises, l'observation précédente concernant les expressions des sinus & cosinus d'un arc ou angle moitié d'un autre, rapprochée de la première formule de notre seconde règle,

$S = \frac{s - gp}{\gamma \pi}$, nous apprendra que le sinus de la moitié de l'arc ou angle dont Σ & S seroient respectivement les sinus & cosinus, ou $\sqrt{\left(\frac{1 \mp S}{2}\right)}$ devroit, soit que le cosinus S fût positif ou négatif, être $= \sqrt{\left(\frac{\gamma \pi + gp - s}{2 \gamma \pi}\right)}$, expression dont la quantité qui compose le numérateur de la fraction sous le signe radical, a pour carré, $\gamma^2 \pi^2 + 2 \gamma \pi gp + g^2 p^2 - 2 s \gamma \pi - 2 s gp + s^2$, & est par conséquent moyenne proportionnelle entre tout couple de facteurs dont le produit peut représenter ce carré.

Mais si dans ce carré l'on change; 1.^o s^2 en $1 - \sigma^2$; 2.^o ce $— \sigma^2$ en $— \pi^2 \sigma^2 - p^2 \sigma^2$; 3.^o $\gamma^2 \pi^2$ & $g^2 p^2$ en $s^2 \gamma^2 \pi^2 + \sigma^2 \gamma^2 \pi^2$, & en $s^2 g^2 p^2 + \sigma^2 g^2 p^2$; 4.^o les $— p^2 \sigma^2$ & $+ g^2 p^2 \sigma^2$ trouvés dans le second & le troisième changemens, en $— p^2 \gamma^2 \sigma^2$, & les $— \pi^2 \sigma^2$ & $+ \gamma^2 \pi^2 \sigma^2$ trouvés aussi dans les deux mêmes changemens, en $— g^2 \pi^2 \sigma^2$; 5.^o enfin, que de $2 \gamma \pi gp$, on fasse, $2 s^2 \gamma \pi gp + 2 \sigma^2 \gamma \pi gp$; il viendra après tous ces changemens, pour valeur du même carré, $1 - 2 s gp - 2 s \gamma \pi + s^2 g^2 p^2 + 2 s^2 \gamma \pi gp + s^2 \gamma^2 \pi^2 - \gamma^2 \sigma^2 p^2 + 2 \sigma^2 \gamma \pi gp - \sigma^2 g^2 \pi^2$, polynome qui $= (1 - sgp - s \gamma \pi - \sigma \gamma p + \sigma g \pi) \times (1 - s \gamma \pi - sgp + \sigma \gamma p - \sigma g \pi)$.

La quatrième demande donne d'ailleurs, pour sinus & cosinus de la différence de f , dont nous supposons que les sinus & cosinus soient γ & g , à h , dont nous supposons en même temps que les sinus & cosinus soient π & p , ou pour le sinus & le cosinus de $f - h$, $p \gamma - \pi g$, & $pg + \pi \gamma$; & il s'ensuit de-là, par la même demande, que les cosinus de la somme & de la différence de k , dont nous supposons que les sinus & cosinus soient σ & s , à $f - h$, ou les cosinus de $k + f - h$ & de $k - f + h$, sont respectivement $sgp + s \gamma \pi - \sigma g \pi + \sigma \gamma p$, & $sgp + s \gamma \pi + \sigma g \pi - \sigma \gamma p$; que les deux produisans $1 - sgp - s \gamma \pi + \sigma g \pi$ & $— \sigma \gamma p$,

& $1 - sgp - s\gamma\pi - \sigma g\pi + \sigma\gamma p$, sont les deux sinus versés de $k + f - h$ & de $k - f + h$, & que le produit de leurs racines, divisé par $\sqrt{2}$, est celui des sinus des moitiés de $k + f - h$ & de $k - f + h$.

Or, d'après cela, le trinome $\gamma\pi + gp - s$, qui doit être égal au produit des racines de ces deux sinus versés, devra pareillement, étant divisé par 2, représenter le produit des sinus des deux moitiés de $k + f - h$ & de

$k - f + h$; d'où s'ensuit que $\sqrt{\frac{\gamma\pi + gp - s}{2}}$ représente de son côté, la moyenne proportionnelle entre ces deux sinus de moitiés; & comme on a vu que cette quantité

$\sqrt{\frac{\gamma\pi + gp - s}{2}}$, étant encore divisée par $\sqrt{\gamma\pi}$, devenoit $= \frac{\sqrt{1 \pm S}}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, égale au sinus de la moitié

de l'angle dont les sinus & cosinus sont Σ & S , on peut enfin conclure de toutes ces remarques, la première des trois proportions que nous nous sommes proposé ci-dessus de démontrer.

Quant à la démonstration des deux dernières des mêmes proportions, il faudra, pour en venir à bout, se rappeler d'abord, que relativement au cas dont il s'agit, nous avons trouvé dans le corollaire VIII, pour sinus & cosinus de l'angle dont nous y cherchions la valeur,

$$\frac{\Sigma \gamma}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp) \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}}} \quad \& \quad \frac{\mp g\pi \pm S\gamma p}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp) \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}}}.$$

On remarquera de plus, que nous aurions pu de même trouver pour sinus & cosinus de l'autre angle inconnu,

$$\frac{\Sigma \pi}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp) \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}}} \quad \& \quad \frac{\mp p\gamma \pm Sg\pi}{\sqrt{(1 - S\gamma\pi - gp) \times \sqrt{(1 + S\gamma\pi + gp)}}}.$$

& l'on concluera de-là & des formules de notre 3.^{me} demande, que dans les mêmes suppositions, les cosinus de la somme & de la différence des deux angles cherchés, sont respectivement,

$$\frac{(S^2 + 1)\gamma\pi gp - S\pi^2 g^2 - S\gamma^2 p^2 + (S^2 - 1)\gamma\pi}{(1 - gp - S\gamma\pi) \times (1 + gp + S\gamma\pi)} \quad \& \quad \frac{(S^2 + 1)\gamma\pi gp - S\pi^2 g^2 - S\gamma^2 p^2 - (S^2 - 1)\gamma\pi}{(1 - gp - S\gamma\pi) \times (1 + gp + S\gamma\pi)}.$$

On joindra d'ailleurs à cela, que si 1.^o l'on fait disparaître de l'un des deux membres du milieu de chacun des numérateurs de ces deux expressions, les cosinus g ou p , & de l'autre les sinus γ ou π , respectivement, & à volonté, en changeant dès-lors, leurs sommes en $— S\pi^2 + S\gamma^2\pi^2$ — $Sp^2 + Sg^2p^2$, ou en $— S\gamma^2 + S\gamma^2\pi^2 - Sg^2 + Sg^2p^2$, & que 2.^o au lieu des $— S\pi^2 - Sp^2$, ou de $— S\gamma^2 - Sg^2$, qu'on aura ainsi trouvés, on substitue $— S$, les mêmes numérateurs se trouveront après ces deux changemens, être les produits respectifs de $(1 - gp - S\gamma\pi)$ par $(-S - \gamma\pi - Sgp)$, & de $(1 + gp + S\gamma\pi)$ par $(-S + \gamma\pi + Sgp)$; & les fractions mêmes, ou les valeurs des cosinus de somme & de différence des deux angles cherchés, se réduiront à

$$\frac{-S - \gamma\pi - Sgp}{1 + gp + S\gamma\pi} \text{ \& \& } \frac{-S + \gamma\pi + Sgp}{1 - gp - S\gamma\pi}.$$

On aura donc, d'après la seconde partie de l'observation faite préalablement ci-dessus, les tangentes des moitiés de la somme & de la différence des angles cherchés,

$$= \frac{\sqrt{(1 + S) \times (1 + gp + \gamma\pi)}}{\sqrt{(1 - S) \times (1 + gp - \gamma\pi)}},$$

$$\& \quad = \frac{\sqrt{(1 + S) \times (1 - gp - \gamma\pi)}}{\sqrt{(1 - S) \times (1 - gp + \gamma\pi)}};$$

valeurs qui se décomposent en

$$\sqrt{\left(\frac{1 + S}{1 - S}\right)} \times \frac{\sqrt{(1 + gp + \gamma\pi)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(1 + gp - \gamma\pi)}},$$

$$\& \sqrt{\left(\frac{1 + S}{1 - S}\right)} \times \frac{\sqrt{(1 - gp - \gamma\pi)}}{\sqrt{(2)}} \times \frac{\sqrt{(2)}}{\sqrt{(1 - gp + \gamma\pi)}};$$

& d'après les deux parties à la fois de la même observation, sont en effet les quatrièmes termes des deux proportions énoncées ci-dessus, & qui nous restoient à démontrer.

Du reste, quelque élégantes que soient ces sortes de dernières solutions, nous penserions que feu M. Léonard Euler n'a pu, dans son Mémoire de 1753, les préférer, comme

il a fait, à toutes sortes d'autres, qu'autant qu'il aura négligé de s'occuper de la recherche des divers abrégés de celles-ci.

Pour mettre enfin le lecteur à portée de juger combien la pratique des règles qu'on tire d'ordinaire de la première & des deux dernières proportions dont nous parlons, est moins aisée que celle que nous leur préférons, & le garantir en même-temps, d'une erreur où l'autorité & l'exemple d'un Astronome, célèbre durant sa vie, à divers justes titres, pourroit l'entraîner, il nous semble à propos d'observer en cet endroit, quoique nous abstenant d'ailleurs de toute application de nos règles à des exemples, que ce Savant s'étant proposé à la page 13 de son Introduction aux Éphémérides de 1745 & des années suivantes, d'enseigner l'usage de la règle déduite de la première de ces trois mêmes proportions, par la détermination de l'heure à laquelle le Soleil doit se lever à Londres, lorsqu'il a $17^{\circ} 32'$ de déclinaison australe, employa à cet effet, par méprise sur les signes, un angle de $72^{\circ} 28'$, au lieu de son supplément, ou d'un de $107^{\circ} 32'$, & en tira la conclusion erronée, que le Soleil, dans la circonstance supposée, paroîtroit se lever à Londres à $7^h 37' 43''$, tandis que c'est à $7^h 29' 41''$ qu'il doit en effet paroître s'y lever; erreur du reste qui n'influa en rien sur ses Éphémérides mêmes, calculées sans doute par une méthode plus facile & plus simple, qui ne sauroit guère avoir été autre que celle de Viète & de M.^{rs} Mayer & de Maupertuis, que nous avons donnée dans le premier corollaire du problème unique de notre Trigonométrie sphérique; sans quoi on ne pourroit guère reconnoître les divers & nombreux calculs que ses Éphémérides contiennent, pour avoir été faits par lui-même.

Première Observation générale.

On peut comprendre dans les deux registres parallèles suivans, toutes les simplifications que la Trigonométrie sphérique générale peut recevoir dans les cas particuliers où le triangle qu'on y considère, auroit, ou un ou deux côtés, ou un ou deux angles, de 90° .

336 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
PREMIER REGISTRE.

RÈGLES ou formules de Règles, désignées par N. ^{os}	SUPPOSITIONS à faire sur les Données.	RÉDUCTIONS, des Règles qui en résultent, & Remarques.
1. ^{re} Savoir, $s = S, \pi + g p.$	$\Sigma = 1, \& S = 0.$ $\gamma = 1, \& g = 0.$ $\pi = 1, \& p = 0.$ $\Sigma \& \gamma$ ou $\pi = 1.$ $\gamma \& \pi = 1.$	$s = g p.$ $s = S \pi.$ $s = S \gamma.$ $s = 0.$ $s = S$, d'où $\sigma = \Sigma$, & d'après la proportion des sinus des angles & de ceux des côtés, $\gamma = \Gamma$, & $\pi = \Pi$, & le triangle est équilateral & équiangle.
2. ^{me} Savoir, $S = s \mp g \mp p$ $- \Gamma g \Gamma p.$	$\sigma = 1, \& s = 0.$ $\gamma = 1, \& g = 0.$ $\pi = 1, \& p = 0.$ σ , & γ ou π , $= 1.$ $\gamma \& \pi = 1.$	$S = - \Gamma g \Gamma p.$ $S = s \mp p.$ $S = s \mp g.$ $S = 0$, & $\Sigma = 1$, & l'angle $= 90^\circ.$ $S = s$, d'où $\sigma = \Sigma$ &c. comme ci-dessus.
3. ^{me} Savoir, cosinus de la première partie du côté cherché, $= p \mp n$, & cosinus de la seconde, $= s \mp n.$	$\Sigma = 1$, d'où $n = \pi$, & $h = p.$ $\pi = 1$, d'où $n = \Sigma$, & $h = S.$ $\sigma = 1.$ $\pi \& \sigma = 1.$	cos. de première partie $= 1$, & sin. ainsi que l'arc, $= 0$; cos. de seconde partie $= s \mp \pi$, & l'arc cherché, différence ou somme des deux, $= \mp$ le second. cos. de première partie $= 0$, sin. $= 1$, & arc de 90° ; cos. de seconde $= s \mp \Sigma$, & l'arc cherché est complément ou supplément de la seconde partie. cos. de première partie $= p \mp n$, & cos. de l'autre $= 0$, d'où sin. $= 1$, & arc de 90° ; & l'arc cherché est, ou complément de la première partie, pris négati- vement, ou son supplément. cos. des deux parties $= 0$, & l'arc $= 0$, ou bien $= 180^\circ.$

Suite

Suite du premier Registre.

R È G L E S ou formules de Règles, désignées par N. ^{os}	SUPPOSITIONS à faire sur les Données.	R É D U C T I O N S . Règles qui en résultent, & Remarques.
7. ^{me} Savoir , $\text{tg} = \pm p \text{tg} S$ $\mp \pi \text{tg} \mp S$	$\Sigma = 1 \text{ \& } S = 0$. $\pi = 1$. $\gamma = 1$. $\Sigma \text{ \& } \pi = 1$. $\Sigma \text{ \& } \gamma = 1$. $\pi \text{ \& } \gamma = 1$.	$\text{tg} = \mp \pi \text{tg}$. $\text{tg} = \mp \text{tg} \mp S$. $\text{tg} = \pm p \text{tg}$. $\text{tg} = \pm \text{tg}$. $\text{tg} = 0$. $\text{tg} = 0$.
9. ^{me} Savoir , cof. de première partie de l'angle cherché = $\text{tg} \varphi$ $\text{tg} S$, & cosinus de seconde = $\text{tg} \varphi \text{tg} P$.	$\Sigma = 1$, d'où $\varphi = \pi$, & $f = p$. $\pi = 1$, d'où $p = 0$, $\varphi = \Sigma$, & $f = S$. $\sigma = 1$. $\pi \text{ \& } \sigma = 1$.	cof. de première partie = $\text{tg} \pi \text{tg} S$, & cof. de seconde = 1; d'où sinus de la même = 0, & l'angle cherché = sa première partie. cof. de première partie = $\text{tg} \Sigma \text{tg} S$, & cof. de seconde = 0, la seconde = 90° , & l'angle cherché est, ou complément, pris négativement, de sa pre- mière partie, devenant rentrante, ou son supplément. cof. de première partie = 0, & cette partie = 90° , & cof. de seconde = $\text{tg} \varphi \text{tg} P$; d'où l'angle cherché est, ou com- plément, ou supplément de sa seconde partie. cof. des deux parties à la fois = 0, les parties mêmes = 90° , & l'angle cherché = 0° ou 180° .

338 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
SECOND REGISTRE.

R È G L E S ou formules de Règles, désignées par <i>N.º</i>	SUPPOSITIONS à faire sur les Données.	R É D U C T I O N S, des Règles qui en résultent, & Remarques.
3. ^{me} Savoir, S $= s \Gamma \Pi - G P.$	$\sigma = 1, \& s = 0.$ $\Gamma = 1, \& G = 0.$ $\Pi = 1, \& P = 0.$ $\sigma \& \Gamma$ ou $\Pi = 1.$ $\Gamma \& \Pi = 1.$	$S = - G P.$ $S = s \Pi.$ $S = s \Gamma.$ $S = 0.$ $S = s$; d'où $\Sigma = \sigma, \Gamma = \gamma,$ $\Pi = \pi$, & le triangle est équi- latéral & équilatéral.
4. ^{me} Savoir, s $= S \vdash G \vdash P$ $\vdash \Gamma G \Gamma P.$	$\Sigma = 1, \& S = 0.$ $\Gamma = 1, \& G = 0.$ $\Pi = 1, \& P = 0.$ $\Sigma \& \Gamma$ ou $\Pi,$ $= 1.$ $\Gamma \& \Pi = 1.$	$s = + \Gamma G \Gamma P.$ $s = S \vdash P.$ $s = S \vdash G.$ $s = 0, \& \sigma = 1, \& \text{le côté}$ $= 90^\circ.$ $s = S$, d'où $\sigma = \Sigma$, &c. comme ci-dessus.
6. ^{me} Savoir, cof. de première partie $= P \vdash \pi$, & cof. de l'autre $= - S \vdash \pi.$	$\sigma = 1$, d'où π $= \Pi, \& h = P.$ $\Pi = 1$, d'où π $= \sigma, \& h = s.$ $\Sigma = 1.$ $\Pi \& \Sigma = 1.$	cof. de première partie $= 1$, & sinus, ainsi que l'angle, $= G$; cof. de seconde partie $= - S$ $\vdash \Pi$, & l'angle cherché, diffé- rence ou somme des deux, $=$ \mp la seconde. cosinus de première partie $= 0$, sin. $= 1$, & angle droit; cof. de seconde $= S \vdash \sigma$, & l'angle cherché complément ou supplé- ment de la seconde partie. cof. de première partie $= P \vdash \pi$, & cof. de l'autre $= 0$, d'où sin. $= 1$ & angle droit, & l'angle cherché est, ou complément, ou supplément de la première partie, pris négativement. cosinus de chaque partie $= 0$; & l'angle cherché, ou $= 0$, ou $= 180^\circ.$

Suite du second Registre.

R È G L E S ou formules de Règles, désignées par <i>N.º</i>	SUPPOSITIONS à faire sur les Données.	R É D U C T I O N S , Règles qui en résultent, & Remarques.
<p><i>S.º</i> Savoir, $\Gamma g = \pm P \Gamma s$ $\mp \Pi \Gamma G \Gamma s$.</p>	<p> $\sigma = 1$ & $s = 0$. $\Pi = 1$. $\Gamma = 1$. σ & $\Pi = 1$. σ & $\Gamma = 1$. Π & $\Gamma = 1$. </p>	<p> $\Gamma g = \mp \Pi \Gamma G$. $\Gamma g = \mp \Gamma G \Gamma s$. $\Gamma g = \pm P \Gamma s$. $\Gamma g = \mp \Gamma G$. $\Gamma g = 0$. $\Gamma g = 0$. </p>
<p><i>1.º</i> Savoir, cof. de première partie de l'arc cherché = $\Gamma \varphi$ ΓS, & cof. de seconde = $\Gamma \varphi$ ΓP.</p>	<p> $\Sigma = 1$, d'où φ $= \Pi$ & $f = p$. $\Pi = 1$, d'où p $= 0$ & $f = \sigma$, & f $= S$. $\Sigma = 1$ & $S = 0$. Π & $\Sigma = 1$. </p>	<p> cof. de première partie = $\Gamma \Pi \Gamma S$, & cof. de seconde = 1; d'où sin. de la même = 0, & l'arc cherché = sa première partie. cof. de première partie = $\Gamma \sigma \Gamma S$, & cof. de seconde = 0, la seconde = 90°; & l'angle cherché, est, ou complément pris négativement de sa première partie, devenant rentrante, ou son supplémen cof. de première partie = 0, & cette partie = 90°, & cof. de seconde = $\Gamma \varphi \Gamma P$; d'où l'arc cherché est, ou com- plément, ou supplément de sa seconde partie. cof. des deux parties à-la-fois = 0, les parties mêmes = 90°, & l'angle cherché = 0°, ou 180°. </p>

Seconde Observation générale.

Les réductions des deux Registres précédens, peuvent servir à construire généralement dans la sphère même, & par la seule figure dont nous avons fait jusqu'ici usage, mais aux deux arcs ponctués de laquelle il sera désormais nécessaire d'être attentif, nos formules 3.^{me}, 6.^{me}, 8.^{me} & 10.^{me}, les seules qui offrent chacune une double solution.

En effet, 1.^o abaissant dans le cas de la formule 3, de l'angle G un arc GE perpendiculaire sur SP , prolongée s'il le falloit, on aura dans le triangle rectangle GES , $\sin. E$, ou $1 : \sin. S$, ou $\Sigma :: \sin. SG$, ou $\pi : \sin. GE = \Sigma \pi$, $= n$, & par conséquent $\cos. GE = \sqrt{1 - \Sigma^2 \pi^2} = h$; & la première, $s = gp$, des réductions du premier Registre précédent, relative à la formule 1.^{ere} dans le triangle rectangle, donnera encore $\cos. SG$, ou p , divisé par $\cos. GE$, ou par h , $= \cos. SE$, $= \frac{p}{h} = p \mp n$; & de même $\cos. GP$, ou s , divisé par $\cos. GE$, ou par h , $= \cos. PE$, $= \frac{s}{h}$, $= s \mp n$; en sorte que nous avons assigné à propos dans la règle 3.^{me}, pour les deux parties du côté cherché SP , les arcs SE , PE , dont les cosinus seroient $p \mp n$, & $s \mp n$, & leur somme pour ce côté même.

2. Traçant dans le cas de la formule 6.^{me}, un arc de 90° qui se termine en F , au côté SP prolongé, s'il est nécessaire, on aura dans le triangle à un côté de 90° , GSF , $\sin. GF$, ou $1 : \sin. GS$, ou $\pi :: \sin. GSF$, ou $\Sigma : \sin. GFS$, $= \Sigma \pi$, $= n$, & par conséquent $\cos. GFS = \sqrt{1 - \Sigma^2 \pi^2} = h$; & la première, $S = - GP$, des réductions du second Registre précédent, relative à la formule 3.^{me} dans le triangle à un côté de 90° , donnera encore $\cos. GSF$, ou S , divisé par $\cos. GFS$, ou par h , $= \cos. FGS$, $= \frac{-S}{h}$, $= -S \mp n$; & de même $\cos. GPS$, ou P , divisé par $\cos. GFS$

ou par $+h = \cos. FGP = \frac{1}{h} = P \text{ tang.}$; en sorte que nous avons assigné à propos dans notre 6.^{me} règle, les deux expressions $-S \text{ tang.}$ & $+P \text{ tang.}$, pour les cosinus des deux parties SGF, FGP , de l'angle SGP , ou G , dont cette formule de la même règle étoit destinée à nous faire connoître la valeur, & la somme de ces deux parties, pour l'angle même.

3.^o Dans le cas de la règle 9.^{me}, les deux triangles rectangles SGE, PGE donneront lieu à ces deux proportions, $\sin. GE$, ou $\Sigma \pi$ (comme on a montré au premier article), ou $\phi : \sin. SE = \sqrt{(1 - \frac{p^2}{1 - \Sigma^2 \pi^2})} = \frac{\pi \sqrt{(1 - \Sigma^2)}}{f}$, $= \frac{\pi S}{f} :: \Sigma : \sin. SGE = \frac{\Sigma \pi S}{\phi f} = \frac{\phi S}{\phi f} = \frac{S}{f}$; & $\sin. GE$, ou $\Sigma \pi$, ou $\sigma \Pi$ son équivalent : $\sin. PE = \sqrt{(1 - \frac{s^2}{1 - \Sigma^2 \pi^2})} = \frac{\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} :: \Pi : \sin. PGE = \frac{\sqrt{(\sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$; de la première desquelles s'ensuit $\cos. SGE = \frac{\sqrt{(\Sigma^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} = \frac{\Sigma p}{f} = \frac{\Sigma \pi p}{f \pi} = \frac{\phi}{f} \times \frac{p}{\pi}$, & dont la seconde donne $\cos. PGE = \frac{\sqrt{(\sigma^2 - \sigma^2 \Sigma^2 \pi^2 - \sigma^2 + \Sigma^2 \pi^2)}}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, $= \frac{\Sigma \pi s}{\sigma \sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} = \frac{\phi s}{f \sigma}$; & c'est par conséquent avec raison que nous avons assigné, dans notre 9.^{me} règle, les valeurs $\pm \text{tang. } \phi$ & $\text{tang. } s$, aux cosinus des deux parties SGE & PGE de l'angle PGS , que nous cherchions alors.

4.^o Enfin, dans le cas de la règle 10.^{me}, les deux triangles à un côté de 90° SGF, PGF , donneront lieu aux proportions suivantes, $\sin. S$, ou $\Sigma : \sin. SGF =$ (d'après l'article II), $\frac{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2 - 1 + \Sigma^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} = \frac{\Sigma p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}} :: \sin. GF$, ou $1 : \sin. SF = \frac{p}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}$, dont le cosinus

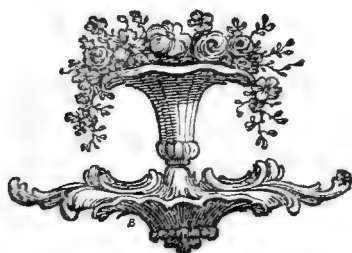
$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(\pi^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, = \frac{S \pi}{f}, = \frac{S \Sigma \pi}{\Sigma f}, = \frac{S \phi}{\Sigma f}; \& \sin. \\
GPS, \text{ ou } \Pi : \sin. PGF, &= \frac{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2 - 1 + \Pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, = \frac{\sqrt{(\Pi^2 - \Sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, \\
&= \frac{\sqrt{(\Pi^2 - \sigma^2 \pi^2)}}{\sqrt{(1 - \Sigma^2 \pi^2)}}, = \frac{\Pi \sigma}{f} :: \sin. GF, \text{ ou } 1 : \sin. PF, \\
&= \frac{\sigma}{f}, \text{ dont le cosinus } = \frac{\sqrt{(1 - \sigma^2 \pi^2 - 1 + \sigma^2)}}{f}, = \frac{\sigma P}{f}, \\
&= \frac{\sigma \Pi P}{f \Pi}, = \frac{\Sigma \pi P}{f \Pi}, = \frac{\phi P}{f \Pi}. \text{ Or, les deux valeurs } \frac{S \phi}{\Sigma f} \\
&\& \frac{P \phi}{\Pi f}, \text{ ou } \Gamma S \Gamma \phi \& \Gamma P \Gamma \phi \text{ étant en effet celles que}
\end{aligned}$$

nous avons assignées aux cosinus des deux parties SF, PF , du côté SP que nous cherchions, nous avons donc donné à propos à ce côté, pour valeur, la somme ou la différence des arcs auxquels de tels cosinus appartiendroient.

Troisième Observation générale.

La simplification qui résulte dans la résolution des triangles sphériques, de la supposition qu'une des données quelconque de tout problème concernant ces triangles, soit de 90° , s'étendant également, suivant la première des deux observations précédentes, aux côtés & aux angles; l'une de ces simplifications se changeant même toujours en l'autre, par l'inversion qu'on peut faire d'un côté en supplément d'angle, ou d'un angle en supplément de côté, & l'angle nouvellement introduit GFS , que forme dans la seconde des mêmes observations, le côté nouvellement introduit aussi GF , de 90° , n'ayant pas moins aux articles II & IV de cette Observation, la quantité $\Sigma \pi$ pour sinus, que ne l'a aux articles I & III, l'arc nouvellement introduit aussi GE , l'un des côtés de l'angle droit E ; il s'ensuit de tout cela que la supposition d'un côté de 90° n'est pas moins propre que celle d'un angle de 90° , ou droit, à la simplification des triangles sphériques; que les triangles sphériques à un ou deux ou trois côtés de 90° ne méritoient donc pas moins d'être considérés, selon qu'ils l'auroient pu, par eux-

mêmes & au long, que ceux à un ou deux ou trois angles, de 90° aussi; que les premiers auteurs de Trigonométrie sphérique ne sauroient donc avoir eu plus de raison d'adopter les résultats qu'ils ont déduits de l'une de ces suppositions, plutôt que ceux qu'ils auroient conclu de l'autre, comme des degrés nécessaires pour s'élever de-là aux énoncés généraux des triangles obliques, & qu'étant néanmoins tous, partis à cet effet, de la théorie du triangle sphérique rectangle, qu'ils ont seule traitée au long, à l'exclusion de celle des triangles sphériques à des côtés de 90° , ils doivent s'être laissés en cela, guider mal-à-propos, par une analogie de la Trigonométrie rectiligne, telle qu'elle est présentée dans la plupart des livres élémentaires, à la sphérique, laquelle n'astreignoit nullement à suivre une pareille méthode, & ne se soutenant d'ailleurs qu'imparfaitement, auroit dû, même par cette seule raison, être absolument abandonnée.



DIVERSES MESURES,

En partie neuves , des Aires sphériques & des Angles solides , triangulaires & polygones , dont on est supposé connoître des élémens en nombre suffisant , avec des Remarques qu'on croit pouvoir contribuer à simplifier les intégrations de plusieurs Équations différentielles à inconnues actuellement séparées.

Par M. l'Abbé DE G U A.

ALBERT GIRARD, Samiélois (a), Géomètre du commencement du dernier siècle, & le même qui a commenté Stevin, est le premier auteur qui se soit proposé la recherche de la mesure des angles solides, & fit pour y parvenir deux pas différens.

Le premier (que les analogies de l'angle plan à l'angle solide, & de la circonférence circulaire à la superficie sphérique, rendoient très-facile) de s'apercevoir que la mesure qu'il cherchoit, dépendoit de celle des aires des triangles sphériques.

Le second, d'assigner au juste la valeur des mêmes aires, en donnant une règle très-simple, d'où elle dérive en effet.

Très-jaloux de la découverte qu'il crut d'après cela, pouvoir s'attribuer, il eut grand soin de remarquer dans sa Brochure sur ce sujet, intitulée *Invention nouvelle en Algèbre*, qui date de 1629, & dont il y a un exemplaire à la Bibliothèque du Roi, qu'elle n'avoit jusqu'à lui été connue de qui

(a) Cet auteur paroît avoir voulu indiquer, en se donnant cette qualification, qu'il étoit natif de la ville de Saint-Michel, ou Saint-Mihel en Barrois, qu'on auroit autrefois appelée *San-Mihel* ou *Sa-Miel*.

que ce fût, à moins, ajouta-t-il, *que ce ne n'eût été avant le Déluge.*

Mais quoiqu'il fût dès-lors tombé véritablement sur une solution générale, exacte & très-belle, d'un des problèmes des plus curieux qu'il pût se proposer, on ne sauroit en même temps disconvenir que la gloire qu'il ambitionnoit à cet égard, fût plus qu'obscurcie par un défaut essentiel qui régna dans la démonstration qu'il prétendit donner de la même solution, relativement au triangle sphérique rectangle en particulier ; cas duquel il faisoit du reste fort bien voir que la vérité devoit s'étendre à tous les autres.

Ayant en effet comparé d'abord, au moyen d'une déduction très-embrouillée & très-difficile à suivre, l'aire d'un triangle sphérique rectangle qu'il considère, à une portion de surface sphérique comprise dans une même inclinaison de plans, & terminée par un petit cercle perpendiculaire aux deux plans qui forment l'inclinaison, il conclut l'égalité des deux, *de cela seul que la base de l'un croîsiera, dit-il, toujours la base de l'autre ; d'où, continue-t-il, on doit inférer que l'un veut continuellement égaler l'autre, que cela accorde avec son théorème incessamment, que la vérité en est donc manifeste & probable.*

Et ce fut du reste, avec raison, qu'il donna ensuite à l'énoncé de sa proposition, une extension qui la rend propre à tous les polygones sphériques, & dont je parlerai plus bas ; diverses choses sur lesquelles on peut consulter son petit ouvrage.

Le P. Bonaventure Cavallieri, Jésuite italien, professeur d'Astronomie à Bologne, & si connu par l'Introduction de la méthode des Indivisibles dans les Mathématiques, qu'on lui dut, selon bien des Géomètres du dernier siècle ou du commencement de celui-ci, mais qu'on doit plutôt lui reprocher, selon d'autres plus nombreux, récents pour la plupart, & d'un poids beaucoup plus grand, donna & démontra d'ailleurs très-élegamment, la même règle, dans le *Directorium generale uranometricum*, qu'il fit imprimer à Bologne en 1632 ; & n'ayant point eu sans doute connoissance de la petite brochure

qu'Albert Girard avoit mise au jour trois ans auparavant, en Hollande, il témoigna aussi la regarder comme absolument neuve, en se servant de ces termes, *quod (inventum) a nemine huc usque quem sciam traditum fuit*.

Il laissa de plus entendre à quel point il étoit flatté de croire l'avoir découverte, non-seulement en l'appelant *inventum pulcherrimum, novâ nec adhuc auditâ ratione, licet non sit ex facilioribus (b) detegendum*, mais encore en la plaçant à dessein, dans le dernier chapitre de son Livre, comme pour y laisser ses lecteurs sur la bonne bouche; *illudque, dit-il, hoc postremo capite non incongruè fuit reservatum, quò sublati dapibus quibus in mensâ communiter vesci consuevimus, his exempta (c) fames, novo hoc cibo restituta, famelici potiùs quàm saturi ab astronomicâ mensâ discedamus*.

Enfin il fut attentif à rendre compte, & même dans quelque détail, des divers usages auxquels elle pourroit servir.

La même mesure fut depuis donnée, démontrée à la manière de Cavalieri, & attribuée, tant à ce Jésuite qu'à Girard, par Jean Caswel, Maître ès Arts Anglois, dans sa Trigonométrie sphérique, insérée à la suite du Recueil des Œuvres de Wallis; & Lagny en fit depuis mention, sans dire qu'elle fût déjà connue, à la fin d'un Mémoire qu'on trouve dans le Recueil de ceux de l'Académie, de l'année 1714.

Mais une si curieuse invention, qui comprend dans le plus simple sans comparaison, de tous ses cas, celle dont les symboles furent autrefois gravés sur le tombeau d'Archimède, ne m'en avoit pas moins absolument échappé jusqu'après le temps où j'eus découvert la plupart des propositions neuves & nombreuses sur le tétraèdre, que j'ai dit, au commencement de ma Trigonométrie sphérique, devoir faire la matière du troisième

(b) Il faut lire sans doute ici, *difficilioribus*; car la facilité, qui est un des caractères de la démonstration dont il y est question, contribue beaucoup à en relever le prix.

(c) Il faudroit ajouter ici *cum fuerit*, ou lire à l'ablatif absolu, *exemptâ fame*; mais je me fais un devoir de rapporter le passage tel qu'il se trouve dans le Livre.

Mémoire qui me reste à insérer dans ce Volume; ce qui remonte à environ trente années.

L'analogie de ces matières, avec l'objet sur lequel elle roule, m'ayant vers cette époque, déterminé à en entreprendre la recherche, je pensai de plus, mais mal-à-propos, qu'il ne seroit possible d'y réussir que par le secours des calculs différentiel & intégral; & après y avoir en effet employé ces calculs, en prenant pour données, selon qu'il m'avoit paru convenir le mieux, les cosinus des côtés du triangle sphérique, ou des angles plans des faces de l'angle solide à trois faces, je m'aperçus bientôt avec satisfaction, que la combinaison des règles de différentiation & d'intégration, avec la seconde des formules que j'ai données dans la Trigonométrie sphérique, me menoit à une solution très-simple, mais énoncée, contre mon attente, par les angles du triangle sphérique, ou les inclinaisons de faces de l'angle solide, qui ne m'avoient pourtant point fourni de données, laquelle est en effet la même que celle de Girard & Cavallieri.

Je me croyois donc, d'après cela, inventeur de cette belle règle lorsqu'un de nos Confrères à qui j'en fis part, & qui se trouva l'avoir déjà connue, me mit sur la voie de revenir à cet égard de mon erreur; & en même temps que j'en fus détrompé, je m'aperçus avec quelque surprise, que bien que la solution que j'avois trouvée, fût une des meilleures, & vraisemblablement la meilleure, que les calculs différentiel & intégral pussent offrir, celle de Cavallieri, qui, contre ce que j'avois cru possible, n'employoit que la super-position jointe aux propriétés élémentaires de la sphère, étoit au moins aussi élégante.

M'étant d'ailleurs remis, après une très-longue interruption, aux travaux mathématiques, j'ai reconnu que Jacques Bernoulli, dans le 1.^{er} volume de ses Œuvres, qui n'a paru qu'en 1744, page 448, & feu M. Léonard Euler, dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, de l'année 1753, page 233, s'étoient successivement proposé de résoudre, & avoient en effet résolu le cas du même

problème, où le triangle seroit supposé rectangle; & que M. Euler en particulier, en avoit facilement déduit une solution générale, outre une autre de cette dernière espèce, ou indépendante de la supposition d'un angle droit, qu'il donne à la suite; qu'enfin M. l'abbé Bossut en avoit inséré dans ses élémens de Géométrie, une dernière, élémentaire comme celle de Cavallieri, & du reste très-différente de celle-ci.

Diverses considérations me déterminent pourtant, à ne point m'abstenir de présenter la mienne à l'Académie.

La première, que Jacques Bernoulli se bornant dans la sienne, comme je viens de remarquer, à la considération du seul triangle sphérique rectangle, ne parvient malgré cela, à son but, qu'au moyen d'une déduction très-compiquée, & ne construit ensuite la solution de ce cas si particulier, qu'en employant une courbe qu'il enseigne à tracer; tandis que le problème peut être construit dans toute sa généralité, comme on le verra plus bas, par un simple secteur de grand cercle de la sphère; & quant aux deux solutions de M. Euler, tirées l'une & l'autre, ainsi que l'ouvrage dont la dernière fait partie, de la méthode très-indirecte en cette matière, *des plus grands & des plus petits*, qu'elles n'ont pu ne point participer du défaut que j'ai reproché au commencement de ma Trigonométrie sphérique, à l'emploi à de tels égards, de cette méthode, & duquel j'ai remarqué alors, que l'auteur même convenoit.

La seconde, que j'en conclurai successivement, deux règles neuves fort simples; l'une pour passer de la connoissance des cosinus des trois angles plans de l'angle solide, c'est-à-dire, des fonctions trigonométriques les plus simples, de ses trois élémens les plus simples aussi, à celle de la tangente de la moitié de l'arc d'où dépend sa mesure; l'autre pour employer semblablement la connoissance des cotangentes de moitié des angles plans de deux faces du même angle solide, & celle de la cosécante & de la cotangente de l'inclinaison de ces deux faces, à la détermination de la cotangente de l'arc ou angle d'où doit résulter la même mesure, & cela sans

recherche préalable, ni d'aucune fonction trigonométrique des inclinaisons de faces, ni des arcs que les Tables donnent en conséquence, pour mesures de ces inclinaisons mêmes; deux choses qu'on verra que la règle ordinaire suppose nécessairement.

La troisième, qu'elle donnera lieu à deux remarques qui me semblent importantes, sur les simplifications que des considérations particulières aux divers problèmes qu'on se propose à résoudre, & l'emploi, tant des propositions de Trigonométrie sphérique, que de la mesure supposée de l'angle solide, seroient propres à faire naître dans des intégrations qu'on auroit jugées sans ce secours, d'un plus haut degré de difficulté.

A quoi j'ajouterai qu'on aura encore, d'après la lecture de ce Mémoire, l'avantage d'être à portée de comparer ensemble, plusieurs méthodes de solution d'un des plus beaux problèmes de Géométrie, aussi différentes l'une de l'autre que le sont celles de Cavalieri, de Jacques Bernoulli, de M. Léonard Euler & de M. l'abbé Bossut, lesquelles on connoissoit déjà, & celle que je vais présenter.

PROBLÈME.

Mesurer l'aire d'un triangle sphérique quelconque, & dès-lors aussi, l'angle solide composé de trois angles plans, quelconques, qui, ayant son sommet au centre de la sphère, se termineroit par ses trois inclinaisons de plans, aux trois angles du triangle sphérique proposé.

SOLUTION.

Que le côté GP du triangle sphérique GSP (planche I, figure 2) reste constant, soit de quantité, soit de position, tandis que le côté PS restant aussi constant de quantité, mais variant de position, passera dans la situation infiniment voisine PY , & que le troisième côté GS , variant tout-à-la-fois, & de position, & de quantité, passera dans la situation infiniment voisine GY , & s'accourcira d'ailleurs,

350 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
de la droite infiniment petite SZ , à l'extrémité Z de
laquelle aboutit la perpendiculaire infiniment petite YZ ,
tirée de Y sur GS .

Cela posé, — ZS sera la différence de l'arc GS ,
opposé à l'angle en P , dont nous supposons, comme dans
notre Trigonométrie sphérique, que p & π soient respecti-
vement le cosinus & le sinus, différence qu'on fait être

$$= \frac{-dp}{\pi}, = \frac{-dp}{\sqrt{(1-p^2)}}.$$

L'angle ZYS du triangle infiniment petit YSZ , aura
de plus, pour complément, l'angle YSZ ; & l'égalité
supposée des deux arcs finis PS & PY , emportant avec
elle, que la droite infiniment petite YS , soit perpendiculaire
à l'un & à l'autre de ces deux mêmes arcs, l'angle YSZ
sera aussi complément de GSP ; en sorte qu'on aura
 $YZS = GSP$, & que si l'on nomme toujours comme
dans la Trigonométrie sphérique, respectivement, S & Σ ,
le cosinus & le sinus de l'angle sphérique GSP , tels seront
aussi le cosinus & le sinus de ZYS .

D'où s'ensuivront ces deux proportions,

$$\sin. ZYS, \text{ ou } \Sigma : \sin. YSZ, \text{ ou } 1 :: ZS,$$

$$\text{ou } \frac{-dp}{\sqrt{(1-p^2)}} : YS = \frac{-dp}{\Sigma \sqrt{(1-p^2)}};$$

$$\text{Et } \sin. ZYS, \text{ ou } \Sigma : \sin. YSZ, \text{ ou } S :: ZS,$$

$$\text{ou } \frac{-dp}{\sqrt{(1-p^2)}} : YZ = \frac{-Sdp}{\Sigma \sqrt{(1-p^2)}}.$$

Les bandes sphériques infiniment petites PYS , GYZ ,
prolongées l'une & l'autre jusqu'aux grands cercles dont
leurs sommets P & G seroient respectivement les pôles, cou-
peraient d'ailleurs évidemment dans ces grands cercles, des
portions infiniment petites aussi, qui seroient respectivement
à YS & à YZ , comme le rayon de la sphère seroit aux rayons
des petits cercles auxquels appartiendroient respectivement

YS & YZ , c'est-à-dire aux sinus γ & π des arcs PS , & GY ou GS ; & ces deux portions coupées dans deux différens grands cercles, devroient être par conséquent, la première $= \frac{-dp}{\gamma \Sigma \sqrt{(1-pp)}}$, & la seconde $= \frac{-Sdp}{\Sigma.(1-pp)}$.

Or puisque les bandes mêmes PYS & GYZ , sont évidemment égales aux mêmes portions, multipliées, la première par $(1-g)$, & la seconde par $(1-p)$, ces mêmes bandes seront donc, la première $= \frac{-(1-g).dp}{\gamma \Sigma \sqrt{(1-pp)}}$, & la seconde $= \frac{-S.(1-p).dp}{\Sigma.(1-pp)}$; en sorte que l'excès de la seconde de ces expressions sur la première,

$$\text{ou } \frac{-\gamma.S.(1-p) + (1-g).\gamma.(1-pp)}{\gamma \Sigma.(1-pp)} dp,$$

devra être égal à la différence de la surface triangulaire sphérique; équation différentielle dont je remarquerai d'abord, que l'intégrale, quelle qu'elle puisse être, doit contenir les mêmes fonctions de chacun des trois côtés ou des trois angles du triangle sphérique, & que le cosinus p , qui y est différencié, ne sauroit d'ailleurs être exclu préalablement à l'intégration; d'où s'ensuit qu'il ne faudra penser à y substituer avant l'intégration, que les seules valeurs de Σ , de S , de π & de γ , en s , g & p .

Pour remplir ce dernier objet, on emploiera donc ici, les valeurs de S & de Σ , en s , g & p , qu'on trouve par la première des règles de la Trigonométrie sphérique, savoir,

$$S = \frac{s-gp}{\gamma \pi}, \text{ \& } \Sigma = \frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{\gamma \pi}$$

lesquelles donneront $\frac{1}{\Sigma}$, ou $\frac{1}{\Sigma} S = \frac{\gamma \sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}$

& $\frac{S}{\Sigma}$, ou $\frac{S}{\Sigma} = \frac{s-gp}{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}$, & substituées dans la différentielle ci-dessus, la changeront en

$$\frac{1-g}{\gamma \sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}} dp - \frac{s+gp}{(1+p) \gamma \sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}} dp,$$

ou en $\frac{1+p-g-gp-s+gp}{(1+p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}} dp$, ou enfin en

$$\frac{1}{\sqrt{(1-sg-eg-p^2+2sgp)}} dp \frac{-g-s}{(1+p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}} dp,$$

dont il ne s'agira plus que d'intégrer les deux parties.

On changera, pour faciliter l'intégration de la première ; le radical $\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}$, d'abord en $\sqrt{(1-s^2-g^2+s^2g^2-p^2+2sgp-s^2g^2)}$, puis en $\sqrt{[\gamma^2\sigma^2-(p-gs)^2]}$; puis, dans la vue de réduire le premier des deux membres sous le signe, à l'unité, en $\gamma\sigma\sqrt{[1-\frac{(p-gs)^2}{\gamma^2\sigma^2}]}$; & d'après cela, la différence même à laquelle ce dénominateur appartient, en

$$\frac{\frac{dp}{\gamma\sigma}}{\sqrt{[1-\frac{(p-gs)^2}{\gamma^2\sigma^2}]}}$$
, laquelle a évidemment pour intégrale

l'arc de cercle décrit du rayon 1, duquel le cosinus seroit $1 - \frac{p-gs}{\gamma\sigma}$, c'est-à-dire, suivant la seconde règle du Mémoire précédent, qui mesurerait l'angle en P du triangle sphérique GSP .

Quant à l'intégration de la seconde partie de différence, nous la tirerons principalement de cette réflexion, que nous n'avons pu, en faisant varier p , & p seulement, trouver pour première partie d'intégrale, l'arc qui mesure l'angle en P , du triangle sphérique GSP , qu'autant qu'en faisant varier, ou g ou s , & une de ces deux lettres seulement, nous eussions dû trouver pour première partie de la même intégrale, les arcs qui mesurent respectivement les angles en G & en S du même triangle sphérique ; en sorte que les cosinus & sinus de ces angles, dont je nommerai respectivement, & toujours d'après ma Trigonométrie sphérique, les premiers G & Γ , de même que j'ai déjà nommé les derniers S & Σ , doivent entrer à même titre que les cosinus & sinus de l'angle en P , que je nommerai

nommerai de même P & Π , dans l'intégrale, quelle qu'elle puisse être, de la différencielle proposée.

En effet, le premier pas que cette remarque nous indique de faire dans la recherche dont nous nous occupons, c'est de différencier la somme des deux arcs, dont G & Γ & S & Σ sont respectivement les cosinus & sinus, c'est-à-dire, de ceux qui ont pour cosinus $\frac{g-sp}{\pi}$ & $\frac{s-gp}{\pi}$, & pour sinus $\frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+sgp)}}{\pi}$ & $\frac{\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}}{\pi}$, & de soustraire ensuite la différence qui en proviendra, de la seconde partie qui nous sera restée ci-dessus, avec l'espérance bien fondée, que si nous n'épuisons pas tout-à-fait par-là, cette seconde partie, nous la simplifierons du moins beaucoup.

Or, dG , par exemple, étant $= \frac{-s}{\sqrt{(1-s^2)} \cdot \sqrt{(1-p^2)}} dp$,
 $+ \frac{gp}{\sqrt{(1-s^2)} \cdot \sqrt{(1-p^2)^3}} dp - \frac{s p^2}{\sqrt{(1-s^2)} \cdot \sqrt{(1-p^2)^3}} dp$
 $= \frac{-s+gp}{\sqrt{(1-s^2)} \cdot \sqrt{(1-p^2)^3}} dp$, on aura par conséquent $\frac{dG}{r}$
 $= \frac{-s+gp}{(1-p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}} dp$, & par la même
raison, $\frac{dP}{\pi} = \frac{-g+sp}{(1-p)\sqrt{(1-s^2-g^2-p^2+2sgp)}} dp$, & dès-
lors $\frac{dG}{r} + \frac{dP}{\pi} = \frac{(-g-s) \times (1-p)}{(1-p)\sqrt{(1-s^2-gg-pp+2sgp)}} dp$
 $= \frac{-g-s}{(1+p)\sqrt{(1-s^2-gg-pp+2sgp)}} dp$, ou égale à la seconde
partie de la même différencielle, laquelle étoit restée ci-dessus à intégrer, ce qui seul fait voir que l'intégrale cherchée ne doit être autre chose que la somme des trois arcs qui mesurent respectivement les trois angles du triangle sphérique proposé, multipliée, pour la porter à deux dimensions, par le rayon 1, & d'une constante C , de deux dimensions aussi, qui reste à déterminer.

J'observerai à l'égard de ce dernier objet, que dans le cas où les trois côtés du triangle sphérique proposé GSP ,

seroient chacun de 90° , & où les trois angles le deviendroient par conséquent aussi, l'intégrale devroit évidemment être $\frac{1}{8}$ de la surface sphérique entière, ou une demi-aire de grand cercle, & la somme des trois arcs propres à mesurer les trois angles du triangle, multipliée par le rayon, deviendrait de son côté, égale à trois demi-aires de grands cercles; d'où je conclurai que C doit être faite égale à une aire de grand cercle, prise négativement, ou au produit, pris négativement, d'une demi-circonférence par le rayon; & que la surface du triangle sphérique est par conséquent & généralement, égale au produit de la somme des trois arcs qui mesurent chacun des trois angles du triangle, moins une demi-circonférence, par le rayon, selon que l'ont dit Girard & Cavallieri.

Construction.

Du centre C , & d'un rayon égal à celui de la surface de sphère, dont celle du triangle proposé doit faire partie, décrivez (*fig. 3*) la circonférence $ABH DGE$: prenez-y, à commencer du point A , des arcs AH , HD , DE du même nombre de degrés respectivement, que les trois angles en S , en P & en G (*fig. 2*) du triangle sphérique proposé: prolongez ensuite les rayons extrêmes CA , CE en arrière jusqu'en G & B ; & le double de l'un des deux secteurs égaux, ACB , ECG , ou, ce qui est la même chose, la somme $ECABE$ de ces deux mêmes secteurs, sera égale à l'aire cherchée du triangle sphérique proposé, ou sera la mesure de l'angle solide dont les inclinaisons de faces aboutiront aux trois angles de ce triangle sphérique.

C O R O L L A I R E. I.^{er}

On peut inférer de-là, avec Albert Girard, que tout polygone sphérique est égal au produit de la somme des arcs propres à mesurer tous les angles, diminuée d'un nombre de demi-circonférences exprimé par la différence du nombre de côtés ou d'angles qu'il comprend, à 2, par le rayon.

En effet , tout polygone sphérique peut être décomposé en autant de triangles sphériques contigus les uns aux autres qu'il a de côtés moins deux , à la somme des aires desquels la sienne sera égale , & à la somme des angles desquels celle de ses propres angles le sera aussi ; & puisque l'aire de chaque triangle élémentaire a pour mesure , le produit de la somme des trois arcs qui mesurent ses angles , moins une demi-circonférence , par le rayon , celle du polygone doit donc être égale à la somme des arcs qui mesurent tous les angles de triangles élémentaires , c'est-à-dire , tous les angles du polygone , moins autant de demi-circonférences que la décomposition forme de triangles , c'est-à-dire , que le polygone a de côtés moins deux , multipliée par le rayon.

COROLLAIRE II.

La règle de Girard & de Cavallieri pour la mesure de l'aire du triangle sphérique , & pour celle de l'angle solide , laquelle nous avons démontrée d'une manière très-différente de celle de ces deux Auteurs & d'autres qui en ont traité après eux , n'est d'une exécution facile dans la pratique , qu'autant qu'on est supposé connoître les trois angles du triangle sphérique , ou , ce qui revient au même , les trois inclinaisons de faces de l'angle solide , ou du moins , des fonctions trigonométriques de ces trois angles sphériques , ou inclinaisons de faces , d'après lesquelles on puisse trouver aisément dans des Tables trigonométriques , ces angles sphériques , ou inclinaisons de faces mêmes ; & comme elle demande au contraire beaucoup de calculs de Trigonométrie sphérique , dans son application aux cas où l'on ne connoîtroit que les côtés du triangle sphérique , ou , ce qui revient au même , les angles plans de l'angle solide , ou encore des fonctions trigonométriques seulement , de ces derniers élémens , qui sont pourtant aussi simples au moins que les autres , & que l'imagination paroît même saisir les plus aisément de tous , j'ai pensé qu'il seroit à propos de chercher dans ce corollaire , à éviter un tel inconvénient , en y exprimant directement , s'il

étoit possible, l'aire du triangle sphérique, & dès-lors la mesure de l'angle solide, par des fonctions trigonométriques des seuls côtés du triangle sphérique, ou des seuls angles plans de l'angle solide.

J'ai dû commencer, & j'ai commencé en effet dans cette vue, par la recherche de l'expression du cosinus du quotient de la division de l'aire triangulaire sphérique, que je venois de trouver, par le rayon, en cosinus des côtés seulement; mais combien n'ai-je pas craint d'abord, d'avoir entrepris à cet effet, un travail inutile, lorsque j'ai eu trouvé d'après l'application des règles pour l'addition & soustraction, successives ou entre-mêlées, des arcs ou angles dont on connoît les cosinus & les sinus, & par un calcul assez long, mais facile, que je crois superflu de rapporter ici, qu'elle devoit consister en une fraction, dont le numérateur seroit $g + s + p$ — gs — gp — sp — g^3 — s^3 — p^3 — g^2s — g^2p — s^2g — s^2p — p^2g — p^2s — $gs p$ — g^2s^2 — g^2p^2 — s^2p^2 — $3g^2sp$ — $3s^2gp$ — $3p^2gs$ — g^3s — g^3p — s^3g — s^3p — p^3g — p^3s — $2g^2s^2p$ — $2g^2p^2s$ — $2p^2s^2g$ — g^3sp — s^3gp — p^3gs — $g^2s^2p^2$, & qui auroit pour dénominateur $(1 - g^2) \times (1 - s^2) \times (1 - p^2)$, produit qui ne peut évidemment avoir d'autres diviseurs que les sommes & les différences de l'unité & de chaque cosinus de côté.

Essayant pourtant si l'un de ces élémens du dénominateur ne lui seroit pas commun avec le numérateur, ce qui, d'après l'uniformité de composition des deux termes à-la-fois, par des g , des s & des p , emporteroit qu'il y en auroit au moins trois de tels, j'ai reconnu avec satisfaction, que le numérateur étoit en effet divisible, ainsi que le dénominateur, par $(1 - g) \times (1 - s) \times (1 - p)$, & qu'ayant fait subir cette division aux deux termes de la fraction tout-à-la-fois, & simplifié le premier des deux quotiens, je pouvois réduire la fraction même à

$$\frac{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p) - (1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p)} \text{ etc.}$$

de sorte que la différence du rayon au cosinus, ou le sinus versé du quotient cherché, devoit être

$$\frac{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p)},$$

en même-temps que le calcul ne feroit trouver respectivement, pour valeurs du sinus & de la tangente du même quotient, que les expressions plus compliquées,

$$\frac{(1 + g + s + p) \times \sqrt{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}}{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p)},$$

&

$$\frac{(1 + g + s + p) \times \sqrt{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}}{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p) - \sqrt{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}}.$$

La grande simplification de l'expression de la différence du rayon, au cosinus du quotient de la mesure de l'angle solide, par le rayon, m'a ensuite suggéré de chercher s'il ne s'en présenteroit pas de semblable pour l'expression de la somme des deux mêmes élémens, de laquelle on a vu dans le corollaire XIII de ma Trigonométrie sphérique, que la division par le résultat de la précédente, suivie de l'extraction de racine carrée du quotient, pourroit, en ce cas, représenter très-simplement la tangente de moitié de l'arc ou angle, qui, multiplié par le rayon, doit mesurer l'aire de triangle sphérique ou l'angle solide proposé.

Or, j'ai trouvé en effet que la somme du rayon & du cosinus étoit $= \frac{(1 + g + s + p)^2}{(1 + g) \times (1 + s) \times (1 + p)}$; que le quotient de la division de l'expression du sinus versé précédent, par celle-ci, étoit donc $\frac{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}{(1 + g + s + p)^2}$,

& que la racine carrée de ce quotient, ou l'expression de la tangente de moitié de l'arc qui, multiplié par le rayon, mesure l'aire triangulaire sphérique, ou l'angle solide, proposés,

$$= \frac{\sqrt{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp}}{1 + g + s + p},$$

& est ainsi plus simple que celle de la tangente de l'arc entier même.

D'où j'ai enfin conclu la règle suivante , neuve encore , pour la mesure de l'aire triangulaire sphérique , des côtés seulement de laquelle on connoîtroit les cosinus , ou de l'angle solide , des angles plans seulement duquel on connoîtroit les cosinus.

Ajoutez à l'unité le double parallépipède des trois cosinus donnés : soustrayez de la somme , celle des carrés des trois mêmes cosinus : tirez la racine carrée du restant ; & ayant divisé cette racine par la somme de l'unité & des trois cosinus donnés , le quotient vous représentera la tangente d'un arc ou angle , dont le double , multiplié par le rayon , sera la mesure cherchée.

Et la pratique de cette règle m'a d'ailleurs semblé beaucoup plus simple pour le cas dont il y est question , que ne seroit l'application qu'on voudroit faire au même cas , de celle de Girard & Cavallieri , laquelle devoit consister en trois solutions préliminaires d'autant de cas particuliers , mais à la vérité , semblables entr'eux , d'un même triangle sphérique , en la recherche dans les tables , des trois arcs ou angles correspondans aux trois cosinus que chacune de ces solutions auroit fait trouver , & en l'addition de ces trois arcs ou angles , suivie de la soustraction d'une demi-circonférence ou de deux droits , & de la multiplication du restant , par le rayon.

C O R O L L A I R E I I I.

Cette règle , la remarque qu'on a faite ci-dessus , que $\sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2 g s p)} = \gamma \sigma \sqrt{1 - \frac{(p - g s)^2}{\gamma^2 \sigma^2}}$, & la proposition de Trigonométrie sphérique , qui apprend que $\frac{p - g s}{\gamma \sigma} = P$, en sorte que $\sqrt{1 - \frac{(p - g s)^2}{\gamma^2 \sigma^2}}$ doit être $= \Pi$, nous indiquent par leur réunion , que la fraction $\frac{\gamma \sigma \Pi}{1 + g + s + p}$ est aussi une expression de la tangente de moitié de l'arc ou angle cherché , qui , multiplié par le rayon , doit mesurer l'aire triangulaire sphérique , ou l'angle solide , proposés , & par conséquent , que $\frac{1 + g + s + p}{\gamma \sigma \Pi}$

est réciproquement l'expression de la cotangente de moitié du même arc ou angle.

De plus, $1 + g + s + p$ étant $= 1 + g + s + gs + p - gs = \sqrt{(1 + g)^2 \times \sqrt{(1 + s)^2} + \gamma \sigma P}$, & $\gamma \sigma$ étant $= \sqrt{(1 + g) \times \sqrt{(1 + s) \times \sqrt{(1 - g) \times \sqrt{(1 - s)}}$, la cotangente de moitié de la mesure cherchée sera donc

$$= \frac{\sqrt{(1 + g) \times \sqrt{(1 + s)}}}{\sqrt{(1 - g) \times \sqrt{(1 - s)}}} \times \frac{1}{\Pi} + \frac{P}{\Pi}, \text{ c'est-à-dire,}$$

égale au produit des cotangentes des moitiés des deux angles donnés, l'une par l'autre, & par la cosécante de l'angle donné, joint à la cotangente du même angle.

D'où résulte, pour la mesure des aires des triangles sphériques, dont on connoîtroit deux côtés & l'angle compris entre ces côtés, cette règle, neuve encore.

Formez un parallépipède des cotangentes des moitiés des deux côtés donnés, & de la cosécante de l'angle donné aussi, qu'ils sont supposés comprendre entr'eux : ajoutez-y la cotangente du même angle ; & la somme exprimera la valeur de la cotangente de moitié de l'arc ou angle, dont le double, multiplié par le rayon, devra être la mesure cherchée de l'aire triangulaire sphérique proposée ; règle d'une pratique fort simple encore, ainsi que d'une application facile à la mesure de l'angle solide.

Première Observation.

L'indice d'une différentielle exacte dans la première partie de la différentielle du problème, lequel nous a été offert, d'abord par l'introduction d'un même carré avec les deux signes $+$ & $-$, sous le radical du dénominateur, puis, au moyen de la division de la quantité comprise sous ce radical, par la partie constante, jointe à la multiplication hors du signe, par la racine de cette partie, enfin, par la transposition de cette dernière partie, du dénominateur au numérateur, nous semble assez propre à faire reconnoître à des Géomètres peu versés encore dans la pratique du calcul intégral, d'autres différentielles exactes, dans des cas pareils

ou analogues, où ils ne se seroient pas facilement doutés d'en devoir rencontrer ; & la remarque d'où nous avons tiré la conjecture qui nous a facilité l'intégration de la seconde partie de la même différentielle du problème, ainsi que l'usage que nous avons fait dans cette intégration, d'une proposition de Trigonométrie sphérique, pourront d'ailleurs leur servir d'exemple de la simplification prodigieuse que certaines circonstances particulières des problèmes peuvent, à l'aide nommément de cette science, produire dans des intégrations dont les différentielles auroient paru sans cela, compliquées au point d'en être à peine susceptibles.

Seconde Observation.

Quoiqu'en préférant les moyens d'intégration des deux parties de la différence de l'inconnue du problème précédent, que nous avons employés ci-dessus, à titre de nous avoir paru fort simples & assez adroits, nous n'ayons voulu nullement donner à entendre que nous regardassions l'intégration de ces deux parties, même de la seule dernière, qui est la plus compliquée, comme difficile à un certain degré, par toute autre voie, nous remarquerons pourtant ici, que ces deux différences échappent l'une & l'autre aux formes générales d'aires de courbes que Newton a carrées dans son *Traité de quadraturâ curvarum*; & que s'il en est autrement à l'égard des formes générales de Cotes, & à plus forte raison, de celles que Smith a calculées après la mort de Cotes, conformément aux principes & sur les papiers posthumes de cet Auteur, au nombre de 94, & que Dom Charles Worsley a ensuite insérées dans son *Analyse des mesures des raisons & des angles*, elles ne se rapportent du moins, la première qu'à la 89.^{me}, & la seconde qu'à la 91.^{me} de ces 94 dernières formes générales, desquelles 89.^{me} & 91.^{me} formes, les seconds cas en donnent respectivement, pour intégrales, l'arc dont

$$\frac{-p + g^s}{\sqrt{1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gps}}$$

seroit cotangente, & celui qui

auroit

auroit pour cotangente $\frac{(1+p) \times (1+gs) - 2g+s^2}{(g+s) \times \sqrt{1-g^2-s^2-p^2+2gsp}}$,

exprimés d'abord l'un & l'autre en degrés, minutes, secondes, &c. & divisés ensuite par $27^d 17' 44''$, &c. ou par le nombre de degrés, minutes, secondes, &c. que contiendrait le rayon fléchi en arc; expressions dont la première se rapporte évidemment à ce que nous avons établi, & la seconde se trouveroit y revenir pareillement, si, ayant cherché le cosinus & le sinus de la somme des deux arcs ou angles dont les cosinus & sinus particuliers seroient respectivement,

$$\frac{g-sp}{\sigma\pi}, \frac{\sqrt{1-g^2-s^2-p^2+2gsp}}{\sigma\pi} \text{ \& \& } \frac{s-gp}{\gamma\pi}, \frac{\sqrt{1-g^2-s^2-p^2+2gsp}}{\gamma\pi},$$

on en déduisoit la valeur de la cotangente de cette somme; sans que les Tables en offrent pourtant aucune de la somme même des deux parties de la différentielle, comme a fait au contraire notre second corollaire.

Or, ne seroit-on pas fondé à inférer de-là, que des intégrations qui, prises même par parties, se refusent à celles des formes générales calculées par Newton, ne sont même comprises en cet état, que dans les dernières de pareilles formes générales, que l'Éditeur de l'Ouvrage posthume de Cotes a jointes à celles que ce Géomètre avoit lui-même données, & n'admettent que des constructions très-compiquées de Géométrie plane, devenant pourtant d'une construction très-facile par l'emploi de la première des propositions générales de la Trigonométrie sphérique, réuni à la mesure de l'aire triangulaire sphérique, ou de l'angle solide; le même emploi réuni à la même mesure, & après avoir été généralisé par des transformations, seroit propre à en simplifier un grand nombre d'autres, & à reculer ainsi beaucoup, les bornes dans lesquelles l'intégration des différentielles à inconnues actuellement séparées, a été jusqu'ici resserrée?

De même en effet, qu'on reconnoît que l'intégration de telle ou telle différentielle, dépend des logarithmes, de la quadrature du cercle, de la rectification de la parabole ou de l'ellipse, &c. & qu'on se contente dès-lors de l'y rapporter,

ne pourroit-on pas aussi rapporter celle de telles ou telles autres, à la *planification* (qu'on me permette ce terme) d'une surface triangulaire sphérique, dont on connoîtroit tels ou tels élémens, par exemple, les trois cosinus de côtés, ou, ce qui seroit la même chose, à celle de l'angle solide dont on connoîtroit des élémens analogues, par exemple, les trois cosinus d'angles plans, en un mot, à l'intégration supposée de

$$\frac{1 - g - s + p}{(1 + p) \sqrt{(1 - g^2 - s^2 - p^2 + 2gsp)}} dp = dx, \text{ généralisée?}$$

Ou encore remarquant que cette différentielle doit, lorsqu'on y aura substitué $\gamma \sigma P + gs$ pour p , & $\gamma \sigma dP$ pour dp , se changer en

$$\frac{(1 - g - s + gs + \gamma \sigma P) \times \gamma \sigma dP}{(1 + gs + \gamma \sigma P) \times \sqrt{(1 - g^2) \times (1 - s^2) - \gamma^2 \sigma^2 P^2}}, = dx,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{[(1 - g) \times (1 - s) + \sqrt{(1 - g^2) \times \sqrt{(1 - s^2) P}}] \times \sqrt{(1 - g^2) \times \sqrt{(1 - s^2)}}}{[1 + gs + \sqrt{(1 - g^2) \sqrt{(1 - s^2) P}}] \times \sqrt{(1 - g^2) \times (1 - s^2) \times (1 - P^2)}} dp = dx,$$

ne pourroit-on pas, au moyen de cette formule généralisée, rapporter plusieurs autres différentielles à la planification d'une surface sphérique, dont on connoîtroit deux côtés & l'angle que ces côtés comprendroient, ou d'un angle solide dont on connoîtroit deux angles plans & leurs inclinaisons de plans?

Enfin, n'y auroit-il pas moyen d'en faire autant à l'égard de divers autres cas, ou même de tous les autres cas de résolution du triangle sphérique, dans chacun desquels on auroit exprimé la différence de l'aire triangulaire sphérique par les seules données dont il dépendroit?

Mais ce sont là des recherches que j'abandonne à de jeunes Géomètres; mon âge, & les infirmités qu'il peut entraîner, permettant à peine que je me flatte de réussir, avant le terme de ma carrière, à mettre en ordre & à porter à la perfection dont je les crois susceptibles, un assez grand nombre d'autres objets que je ne juge pas moins importans, & sur lesquels j'ai plus d'avances.



*PROPOSITIONS NEUVES,**Et non moins utiles que curieuses , sur le Tétraèdre ;
ou Essai de Tétraédométrie.*

Par M. l'Abbé DE GUA.

LA communication des lumières qui s'est multipliée à un si haut point entre les Gens de Lettres, vers la fin du dernier siècle & dans celui-ci, a été, & est sans doute encore, du plus grand avantage pour les Sciences. Mettant d'abord à profit la disposition à l'imitation que nous apportons en naissant, & qui influe ensuite si fort, sur diverses circonstances ou époques même, de notre vie, & donnant ainsi un heureux essor à notre indolence & notre nonchalance naturelles, elle nous excite d'ailleurs au travail, par la connoissance qu'elle nous donne des succès d'autrui, dans des occupations semblables aux nôtres, & nous y encourage bientôt après, par l'éguillon de l'émulation, le plus puissant de ceux qui agissent sur l'amour-propre: elle supplée dans les recherches mixtes ou compliquées, au défaut de certaines notions étrangères à leur objet principal, par où la discussion que des Savans, profonds d'ailleurs, se seroient proposé de faire des matières sur lesquelles elles rouleroient, auroit pu sans son secours, être arrêtée pour long-temps; par elle enfin, on a vu des sociétés littéraires exécuter facilement, au moyen de la réunion, des ouvrages qu'un ou deux des plus habiles même de ceux qui les composoient, auroient tenté vainement d'exécuter seuls.

Mais, semblable à toutes les autres institutions & pratiques humaines, même les meilleures, elle paroît d'un autre côté avoir été jusqu'ici sujette à un inconvénient propre à retarder à un égard, les progrès des Sciences, qu'elle auroit accélérés à tant d'autres, & contre lequel il eût été, ce semble, à

propos de se tenir plus en garde qu'on n'a fait. Ça été d'appeler, pour ainsi dire, un peu trop généralement, par l'attrait de la gloire, & peut-être même par celui d'une espèce de mode, les recherches de la plupart des Savans qui cultivent une même science, dans les mêmes routes, sur-tout dans les plus difficiles à tenir, & aux termes plus reculés desquelles ils jugeroient dès-lors, qu'il y auroit plus de lauriers à cueillir; tandis qu'ils laisseroient derrière eux, en friche, des terrains qui auroient pu aussi les dédommager amplement, des peines qu'ils auroient prises pour en tirer parti, & dont l'état inculte, à l'entrée le plus souvent d'une science, seroit de plus, peu honorable pour la science même.

Le sujet que je me propose de traiter dans ce Mémoire, offre, suivant que le titre le donne à entendre, un exemple bien frappant de ce que je remarque ici. Les figures solides rectilignes ne se réduisent pas moins toutes, en tétraèdres, que les planes, en trilignes ou triangles: la théorie complète du triangle ayant donc donné naissance à une science aussi utile que l'est la Trigonométrie rectiligne, on pouvoit s'attendre qu'il en seroit à peu-près de même de celle du tétraèdre, une fois qu'on seroit parvenu à en former une; & la recherche qu'on pourroit en faire, devoit même vraisemblablement devenir d'autant plus aisée qu'on y seroit continuellement guidé par l'analogie des propriétés des surfaces à celles des solides; or comment étoit-il au contraire arrivé que ce dernier objet, qui présentoit par lui-même, la perspective de la plus grande utilité, dans la fouille, & le déblai & remblai des terres, tant pour l'Agriculture & l'Architecture civile & militaire, que pour la direction des rivières, & la construction des canaux de navigation & d'arrosement; dans la coupe des pierres, dans la construction des vaisseaux, & l'arrimage; dans l'exploitation des mines, & dans la recherche des pesanteurs spécifiques des divers corps naturels, eût été négligé au point qu'on en fût, même encore, à trouver sur les bornes angulaires solides du tétraèdre, une propriété, analogue à celle de l'égalité des

trois angles du triangle à deux angles droits, & sur ses bornes superficielles, ou ses faces, des propriétés analogues à celle du carré de l'hypothénuse du triangle rectangle à la somme des carrés de ses côtés, ou aux deux autres qu'on déduit de celle-là, par rapport aux triangles obliques ou obtus-angles? Pourquoi, la Planimétrie joignant depuis si long-temps, à la mesure de l'aire triangulaire, au moyen de la moitié du produit de la base par la perpendiculaire tirée du sommet sur cette base, deux autres mesures, l'une au moyen du quart de la racine carrée du produit de la somme des trois côtés, par les trois différences des sommes de deux quelconques de ces côtés au troisième, l'autre au moyen de la moitié du produit de deux côtés quelconques, l'un par l'autre, & par le sinus de l'angle compris entre ces côtés; s'étoit-on contenté, comme on a fait dans la Stéréométrie, d'assigner pour mesure de la solidité du tétraèdre, le seul tiers du produit d'une quelconque de ses faces prise pour base, par la perpendiculaire tirée de l'angle solide opposé à cette base, sur cette même base (perpendiculaire qu'il est même souvent difficile de construire ou de parvenir à connoître d'aucune autre manière); & ne s'étoit-on pas, au-lieu de cela, proposé de mesurer le même solide, soit d'après la connoissance de ses six arêtes seulement, soit d'après celle, ou des élémens angulaires plans d'un de ses angles solides, & des trois arêtes qui concourent à former cet angle, ou des perpendiculaires tirées des sommets de deux faces quelconques, sur l'arête qui en est la commune section, prise pour base commune aux deux, & de leur inclinaison mutuelle, ou bien encore de trois faces quelconques, & des élémens angulaires de l'angle solide dans lequel elles se réunissent? N'étoit-il pas enfin surprenant que connoissant, à dater de l'origine des Sciences, & vraisemblablement de celle même des premiers Arts, des moyens faciles d'élever d'un point donné sur une droite ou sur un plan, une perpendiculaire à cette droite ou à ce plan, ou d'abaisser d'un point donné hors d'une droite ou d'un plan,

une perpendiculaire sur cette droite ou sur ce plan, on n'eût point encore pensé à chercher une méthode générale pour tirer entre deux droites qui ne sauroient concourir dans un même plan, la perpendiculaire unique qui peut toujours alors leur être commune; problème d'où dépend essentiellement la détermination de l'extériorité mutuelle des deux droites qu'on y considère, & de la solution duquel la recherche essentiellement relative à celle de la théorie du tétraèdre, auroit conduit à celle-ci?

Ces réflexions, qui comprennent l'objet entier de cinq paragraphes que ce Mémoire contiendra, s'étoient déjà présentées à moi il y a près de trente ans; & m'étant livré dans ce temps-là, aux recherches qu'elles exigeoient, j'avois dès-lors résolu les problèmes principaux du second, du troisième & du quatrième de mes paragraphes. Me trouvant bientôt après dans la nécessité d'interrompre ce travail, & avec quelque crainte d'y être devancé par une autre personne qui paroïssoit vouloir s'en occuper aussi, je démontrai il y a très-long-temps, sur la Planche de l'Académie, ces divers problèmes & quelques-uns de leurs corollaires, & requis alors, & obtins, que les titres & les énoncés en fussent insérés dans nos registres, avec mention de la démonstration que je venois d'en faire: j'annonçai encore dès cette époque, le Mémoire que je comptois en composer après quelques additions, mais duquel diverses circonstances que j'ai dit ailleurs m'avoient distrait long-temps de l'étude des Mathématiques, ne m'ont permis de m'occuper de nouveau, que dans ces derniers temps; & j'ai jugé depuis, vu l'importance dont ce Mémoire, que voici enfin, m'a paru être par le grand nombre de vérités neuves & utiles, je pourrois dire de vraies découvertes élémentaires qu'il renferme, devoir en faciliter de plus en plus l'intelligence, en le faisant précéder par mes deux Mémoires sur la Trigonométrie sphérique & sur l'angle solide, que ce volume offre déjà, & à l'un & l'autre desquels le premier, le second, le quatrième & le cinquième de ses paragraphes ont des rapports presque continuels.

Sur la propriété du Tétraèdre, analogue à l'égalité des trois angles du triangle rectiligne à deux angles droits.

De même que pour prouver l'égalité des trois angles du triangle rectiligne, à deux angles droits, on tire par un des angles du triangle pris pour sommet, une parallèle au côté opposé à cet angle ou à la base, & l'on rapporte ensuite à cette parallèle, les deux angles de la base, au moyen de leurs alternes, de manière à former de leur somme & de l'angle au sommet, deux droits; de même aussi j'ai jugé que pour découvrir dans le tétraèdre une propriété analogue à celle-là, il seroit à propos de tracer d'abord par un des angles solides du tétraèdre pris pour sommet, un plan parallèle à la face opposée à cet angle ou sommet, considérée comme base; & de faire en sorte de composer uniquement l'espace entier compris au-dessous de ce plan, ou quatre angles solides droits, d'éléments angulaires du tétraèdre proposé, que j'y rapporterois au moyen de leurs alternes.

Ayant donc fait passer par le sommet *O* (*Planche I, figure 4*) du tétraèdre *OPQR*, un tel plan *CAFODBG*, parallèle à la base *PQR* du même tétraèdre, & comprenant les droites *COD*, *AOB*, *FOG*, parallèles respectivement aux côtés *PQ*, *PR*, *QR*, de la base *PQR*, j'ai remarqué que l'espace entier inférieur au plan, & équivalent à quatre angles solides droits, renfermoit, outre l'angle solide *POQOR*, qui lui étoit commun avec le tétraèdre, six autres angles solides, dont trois, savoir *COAOP*, *FODOQ* & *BOGOR*, à trois côtés, & les trois autres, savoir *AOFOPQ*, *DOBOQOR* & *GOCOROP*, à quatre côtés; que de ces six angles solides, ceux à trois côtés étoient respectivement, & dans l'ordre selon lequel ils viennent d'être nommés, alternes & égaux aux trois angles en *P*, en *Q* & en *R* de la base, & qu'il ne restoit par conséquent, pour composer l'espace entier égal à quatre angles

solides droits, dont il étoit question, des seuls élémens angulaires solides du tétraèdre, qu'à transformer la somme des trois angles à quatre côtés, restans, en ces mêmes élémens.

J'ai encore observé dans cette dernière vue, que chacun des mêmes angles à quatre côtés, joint aux deux à trois côtés entre lesquels il étoit situé, formeroit une inclinaison de plans alterne & égale à l'inclinaison des faces du tétraèdre, qui auroient pour commune section, le côté de la base du même tétraèdre, terminé par les deux côtés qui lui seroient communs avec ce même tétraèdre, par exemple, que l'angle à quatre côtés $AOF'OPQ$, joint aux angles à trois côtés $COAOP$ & $FODOQ$ les voisins, formeroit l'inclinaison de plans $CAFDOCPQ$, laquelle seroit alterne & égale à l'inclinaison des faces POQ & QPR du tétraèdre, qui ont pour commune section le côté PQ de la base PQR du même tétraèdre, terminé en P & en Q par les deux côtés OP & OQ , communs à l'angle à quatre côtés dont il est question, & à ce même tétraèdre, & ainsi des autres; d'où s'ensuit que la somme des trois inclinaisons de faces de la base PQR , du tétraèdre $OPQR$, est égale à celle des trois angles à quatre côtés dont nous parlons, jointe au double de celle des trois angles de la base du tétraèdre; & par conséquent, que la même somme des trois angles à quatre côtés, est égale à celle des trois inclinaisons de la base du tétraèdre, diminuée du double de celle des trois angles de la même base.

Or on peut conclure de ces deux observations réunies ensemble, que les quatre angles solides du tétraèdre, joints aux trois inclinaisons de la base, moins le double des trois angles solides de la même base, composent ensemble quatre angles solides droits, ou enfin, cette première proposition neuve, de tétraédrométrie, que *la somme des trois inclinaisons de faces d'une des bases quelconque de tout tétraèdre, moins celle des trois angles solides de la même base, plus l'angle solide du sommet, forment toujours en total, quatre angles solides droits;* théorème assez curieux par lui-même, quoiqu'à raison de
se

se rapporter à une seule des bases du tétraèdre, il n'offre pas encore l'expression générale, & dès-lors la plus simple que nous cherchons principalement, du rapport mutuel des élémens angulaires solides du tétraèdre; mais important sur-tout, par les conséquences nombreuses qu'on en peut tirer immédiatement & facilement, & à la tête desquelles la propriété qui énonce ce rapport va se trouver.

En effet, la proposition que nous venons de démontrer ayant également lieu pour chaque face du tétraèdre prise pour base, & pour chaque angle opposé pris pour sommet, on pourra lui donner les quatre énoncés suivans :

Inclin. $PQ +$ inclin. $PR +$ inclin. $QR -$ ang. $P -$ ang. $Q -$ ang. $R +$ ang. $O = 4$ angles solides droits.

Inclin. $PQ +$ inclin. $QO +$ inclin. $PO -$ ang. $P -$ ang. $Q -$ ang. $O +$ ang. $R = 4$ ang. sol. droits.

Inclin. $QR +$ inclin. $QO +$ inclin. $RO -$ ang. $Q -$ ang. $R -$ ang. $O +$ ang. $P = 4$ ang. sol. droits.

Inclin. $PR +$ inclin. $PO +$ inclin. $OR -$ ang. $P -$ ang. $R -$ ang. $O +$ ang. $Q = 4$ ang. sol. droits.

Or, 1.^o si l'on ajoute ensemble ces quatre équations, il viendra 2 inclin. $PQ +$ 2 inclin. $PR +$ 2 inclin. $PO +$ 2 inclin. $QR +$ 2 inclin. $QO +$ 2 inclin. $RO -$ 4 ang. $P -$ 4 ang. $Q -$ 4 ang. $R -$ 4 ang. $O = 16$ ang. sol. dr.; ou divisant par 2, cette seconde proposition neuve, générale, & non moins simple que belle, énonçant en effet le rapport mutuel des élémens angulaires solides du tétraèdre, analogue par-là à l'égalité des trois angles du triangle rectiligne à deux droits, & qu'on aura spécialement cherchée; que la différence de la somme des six inclinaisons de faces de tout tétraèdre, à celle de ses quatre angles solides, est toujours égale à huit angles solides droits, & dès-lors, mesurée par la surface entière de la sphère; en sorte que de ces deux quantités, la somme des inclinaisons, & celle des angles solides, l'une étant connue, l'autre doit l'être aussi; que de ces dix quantités, les six inclinaisons de faces & les quatre angles solides, neuf étant connues, la dixième doit l'être aussi, &c.

2.^o N'ajoutant ensemble que trois seulement de nos quatre égalités, par exemple, les trois premières, il viendrait 2 inclin. $PQ +$ inclin. $PR +$ 2 inclin. $QR +$ 2 inclin. $QO +$ inclin. $PO +$ inclin. $RO -$ ang. $P -$ 3 ang. $Q -$ ang. $R -$ ang. $O = 12$ ang. sol. dr. qui n'annoncerait par elle-même rien de simple; mais si de cette somme de trois égalités, on ôte l'égalité qui n'y est point entrée (ici la quatrième ci-dessus), on aura; 2 inclin. $PQ +$ 2 inclin. $QR +$ 2 inclin. $QO -$ 4 ang. $Q = 8$ ang. sol. dr. & divisant par 4, & transposant, pour obtenir par-là, une valeur de l'angle Q , on aura; ang. sol. $Q = \frac{1}{2}$ incl. $PQ + \frac{1}{2}$ incl. $QR + \frac{1}{2}$ incl. $QO -$ 2 ang. sol. dr.; c'est-à-dire, que *chaque angle solide du tétraèdre est égal à la moitié de la somme des trois inclinaisons qui le forment, diminuée de deux angles solides droits, ou d'une inclinaison à angles droits, ou encore au produit du diamètre, par la moitié du complément pris négativement, de la somme de ses trois inclinaisons de faces*; ce qui revient à la mesure de l'angle solide, donnée déjà, sous un énoncé un peu différent, par Albert Girard & Cavallieri, qui le disent égal au produit du rayon par la somme même de ses trois inclinaisons, moins deux droits, & en fait une troisième démonstration élémentaire, à joindre aux deux de Cavallieri & de M. l'abbé Bossut, desquelles j'ai parlé dans mon Mémoire précédent, & aussi simple qu'aucune de ces deux-ci.

3.^o Si l'on n'ajoute d'abord ensemble que deux des mêmes équations, par exemple, la première & la seconde; mais qu'on ajoute encore ensemble les deux autres, que la somme déjà trouvée n'aura pas comprises (dans notre exemple, la troisième & la quatrième), ce qui donnera les deux sommes 2 inclin. $PQ +$ inclin. $QR +$ inclin. $PR +$ inclin. $QO +$ inclin. $PO -$ 2 ang. $P -$ 2 ang. $Q = 8$ ang. sol. dr., & inclin. $PR +$ inclin. $QR +$ inclin. $PO +$ inclin. $QO +$ 2 inclin. $RO -$ 2 ang. $R -$ 2 ang. $O = 8$ ang. sol. dr.; & qu'on ôte après cela, l'une des sommes trouvées de l'autre, par exemple, la seconde de la première, on aura; 2 inclin. $PQ +$ 2 inclin. $RO -$ 2 ang. $P -$ 2

ang. $Q + 2$ ang. $R + 2$ ang. $O = 0$; ce qui, après transposition & division par 2, donnera cette quatrième proposition, neuve encore & assez curieuse, que *la différence de deux inclinaisons de faces opposées l'une à l'autre (c'est-à-dire, qui n'aient point d'extrémité commune), d'un tétraèdre quelconque, est toujours égale à celle de la somme des deux angles solides qui terminent la première, à la somme des deux angles solides qui terminent la seconde, ou en d'autres termes, que deux inclinaisons opposées quelconques, de tout tétraèdre, & les sommes des deux angles solides qui les terminent respectivement, forment toujours une proportion arithmétique*; en sorte que de ces quatre quantités, deux inclinaisons opposées, & les deux sommes des angles solides qui les terminent respectivement, trois quelconques étant données, on connoîtra facilement la quatrième; que de ces six quantités, deux inclinaisons opposées quelconques, & les quatre angles solides qui les terminent deux à deux, cinq quelconques étant données, on connoîtra la sixième, &c.

On pourra alléguer ici, que la seconde de mes propositions, celle de la recherche de laquelle je m'occupois principalement, auroit pu aussi, être facilement déduite de la mesure qu'on connoissoit déjà, de l'angle solide, appliquée successivement à chacun des angles du tétraèdre, & de l'équation qu'une telle application auroit offerte; ce qu'on prétendroit peut-être encore, devoir en diminuer beaucoup le prix: mais outre que sa nouveauté réelle & sa simplicité, réunies ensemble, & jointes même à la manière directe & analogue à la preuve de l'égalité des trois angles du triangle rectiligne à deux angles droits, suivant laquelle je l'ai démontrée, me paroîtroient toujours devoir lui en laisser un assez grand; je croirois de plus, que le peu d'attention qu'on auroit fait jusqu'à présent, à l'homogénéité des inclinaisons de plans & des angles solides, si même, d'après les deux manières différentes l'une de l'autre, dont on s'étoit habitué à mesurer ces deux sortes de quantités, on ne l'avoit pas le plus souvent méconnue, a dû de tous les temps, apporter un grand

obstacle à la découverte qu'il y avoit à faire de la déduction particulière qu'on auroit ici en vue.

En effet, les mesures *immédiates* des inclinaisons de plans & des angles sphériques, sont également des portions de surfaces sphériques, savoir, celles des inclinaisons de plans dont la section commune est censée passer par le centre de la sphère, ou est un des diamètres de la sphère, les bandes sphériques comprises entre les deux plans, & celles des angles solides dont le sommet est censé au centre de la sphère, les aires triangulaires sphériques qui terminent ces angles; & ces mesures superficielles, *immédiates*, étant homogènes entr'elles, ou ayant entr'elles des rapports, les quantités qu'elles mesurent doivent en avoir aussi, & être des-lors semblablement homogènes les unes aux autres.

De plus, les bandes sphériques étant toutes le produit de l'arc qui les partage également, ou de la portion d'équateur qu'elles comprennent, par le diamètre, on a pu prendre, comme on a fait réellement, pour mesures linéaires, mais *médiates*, des inclinaisons de plans, ces arcs, ou ceux qui mesurent l'angle formé par les perpendiculaires élevées dans les deux plans, d'un même point de leur commune section, sur cette commune section, tant au moins qu'il n'a été question que de les comparer les unes aux autres.

De même, les aires triangulaires sphériques ayant été, *de fait*, désignées au moyen du produit de la somme des trois arcs qui mesurent leurs trois angles, diminuée de deux droits, par le rayon, on a pu & dû même en quelque sorte, après cela, prendre pour mesure *médiate* & linéaire des aires des triangles sphériques, & dès-lors des angles solides, tant au moins qu'il ne s'est agi que de comparer ensemble deux de ces quantités respectives, la somme des trois arcs qui mesurent leurs trois inclinaisons, moins deux droits.

Mais faudroit-il en conséquence, lorsqu'il sera question de comparer une inclinaison de plans & un angle solide, admettre que ces quantités soient entr'elles, comme l'arc qu'on prend généralement pour mesure *médiate* de la pre-

mière, est à celui qu'on aura pris généralement aussi, pour mesure *médiate* de la seconde? non sans doute; attendu que pour passer des mesures *immédiates* ou superficielles sphériques, justes quant à elles, à l'égard des deux, aux *médiates* ou linéaires, on auroit d'une part, divisé par le diamètre, tandis que de l'autre, on n'auroit divisé que par le rayon.

Or, quoique rien n'eût été plus facile que de donner, au lieu de cela, aux inclinaisons de plans & aux angles solides, une mesure médiate & linéaire commune; & qu'il n'eût fallu pour cet effet, que représenter, comme le calcul m'a conduit à faire, la surface triangulaire sphérique, au moyen du produit, non de la somme des arcs qui mesurent ses trois angles, diminuée de deux droits, par le rayon, mais de la demi-somme des mêmes arcs, diminuée d'un droit (ce qui revient au complément pris négativement de la même demi-somme), par le diamètre; d'après quoi on auroit pu dire généralement, qu'un angle solide quelconque est à une inclinaison de plans aussi quelconque, comme le complément pris négativement de la demi-somme des arcs qui mesurent les trois inclinaisons de l'angle solide, est à l'arc qui mesure l'inclinaison proposée; cependant, ces remarques très-fondées, quelque subtiles qu'elles puissent être jugées, ne paroissant pas avoir encore été faites, & l'homogénéité des angles solides & des inclinaisons de plans, n'ayant point, d'après cela, été explicitement, ou du moins généralement, reconnue, la déduction dont il vient d'être question, pouvoit en conséquence, n'être pas moins difficile à former que celle dont j'ai fait mention, ou l'être même davantage.

Ne seroit-il pas enfin assez juste, de se rappeler, au sujet du prix qu'on voudroit mettre à celles de mes trois dernières propositions qui sont neuves, savoir, la seconde & la troisième, le cas que j'ai dit au commencement de mon Mémoire précédent, avoir été fait de la seconde, leur compagne en quelque sorte, à titre de conséquence immédiate d'un même principe qu'elles, lorsque celle-ci fut découverte il y a environ un siècle & demi, n'importe par quelle voie?

Sur les propriétés du Tétraèdre, analogues à celle du carré de l'Hypothénuse du triangle rectiligne, rectangle, à la somme des carrés de ses côtés, & aux deux autres qu'on infère de celle-là, par rapport aux triangles rectilignes, obliquangles & obtus-angles.

Pour parvenir, s'il étoit possible, à découvrir dans le tétraèdre, des propriétés de ces espèces, j'ai formé (fig. 5) un tétraèdre $OABC$, à angle solide droit en O ; & ayant de plus nommé a, b & c les droites OA, OB & OC respectivement, j'ai eu pour valeurs des aires des trois faces latérales OAB, OAC, OBC , les expressions $\frac{1}{2}ab, \frac{1}{2}ac$ & $\frac{1}{2}bc$; & pour celle des carrés des nombres qui les désigneroient, $\frac{1}{4}a^2b^2, \frac{1}{4}a^2c^2$ & $\frac{1}{4}b^2c^2$,

Les hypothénuses des mêmes trois faces triangulaires rectangles, sont d'ailleurs évidemment représentées par $\sqrt{aa + bb}, \sqrt{aa + cc}$ & $\sqrt{bb + cc}$, respectivement.

Or, si l'on cherche d'après cela, & par la règle qui enseigne à trouver l'aire des triangles rectilignes dont on connoît les trois côtés, l'aire du triangle ABC , on trouvera que le carré en est aussi $= \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2$.

En effet, le produit de

$$[\sqrt{aa + bb} + \sqrt{aa + cc} + \sqrt{bb + cc}],$$

par

$$[\sqrt{aa + bb} + \sqrt{aa + cc} - \sqrt{bb + cc}],$$

est $[2\sqrt{aa + bb} \times \sqrt{aa + cc} + 2aa]:$

Le produit de

$$[\sqrt{aa + bb} - \sqrt{aa + cc} + \sqrt{bb + cc}],$$

par

$$[-\sqrt{aa + bb} + \sqrt{aa + cc} + \sqrt{bb + cc}],$$

est $[-2\sqrt{(aa+bb)} \times \sqrt{(aa+cc)} + 2aa]$;

Et le 16.^{ème} du produit de ces deux produits, l'un par l'autre, $= \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2$; d'où résulte la première & principale proposition, analogue à la 47.^{ème} d'Euclide, laquelle il s'agissoit de trouver, savoir que *dans tout tétraèdre à un angle solide droit, la somme des carrés des trois nombres propres à exprimer les aires des trois faces triangulaires qui comprennent l'angle solide droit, & qu'on peut nommer latérales, est toujours égale au carré du nombre par lequel doit être exprimée l'aire de la face opposée à l'angle solide droit, & qu'on peut nommer hypothénusale*; en sorte que des quatre faces d'un tétraèdre quelconque, trois, deux ou une, étant données, on peut respectivement connoître la dernière, ou les sommes des deux ou trois dernières.

L'analogie parfaite de cette proposition, la première de celles que je démontrai anciennement à l'Académie, & consignai alors dans ses Registres, avec celle dont Pythagore fut l'inventeur, pourra porter à juger, ainsi qu'on auroit déjà fait à l'égard de la seconde du *paragraphe précédent*, qu'elle étoit fort aisée à découvrir, une fois qu'on se seroit occupé d'en faire la recherche, je n'en disconviendrai même pas; mais si l'on passoit de-là, jusqu'à prétendre, conséquemment à une telle réflexion, la déprécier à un certain degré, on oublieroit donc qu'il se seroit néanmoins écoulé bien des siècles, avant que j'eusse seul pensé à franchir, & franchi en effet, ce petit degré de difficulté, par où la découverte en a été pour ainsi dire séparée de celle qui valut autrefois un Hécatombe aux Dieux du Paganisme, & à laquelle elle pourra dorénavant servir comme de pendant, ou bien encore, que la même remarque a souvent été faite à l'égard de diverses autres inventions, auxquelles elle n'a pourtant rien fait perdre, ni de leur mérite, ni même de leur éclat.

Mais si l'on supposoit de plus, à son désavantage, qu'on ne verroit pas de quel usage elle pourroit être dans la Géométrie,

en comparaison de la fécondité si reconue, de la quarante-septième d'Euclide, je pourrois répondre;

Premièrement, que de toutes les parties de la Géométrie; la seule Stéréométrie peut présenter de fréquentes occasions d'en faire usage; & que cette portion de science devant encore être censée au berceau, suivant que ce Mémoire même en donnera la preuve, la considération que l'utilité dont une telle proposition pourroit y être, ne se présenteroit pas d'abord à l'esprit, ne suffiroit pas pour conclure qu'elle ne devroit en effet être que peu utile.

En second lieu, que l'application de la même proposition devroit vraisemblablement s'étendre plus loin encore que la Géométrie rectiligne; par exemple, qu'il ne seroit pas surprenant qu'on tirât un jour dans l'intégration des équations différentielles à trois variables, & contenant des secondes différences, quelque parti de la connoissance que la face hypothénusale de ce qu'on auroit nommé le tétraèdre différentiel, seroit $= \frac{1}{4} \sqrt{(dx^2 dy^2 + dx^2 dz^2 + dy^2 dz^2)}$; qu'il ne faudroit peut-être pas négliger dans l'analyse, l'ouverture résultante de la même proposition, que, si l'on nomme a , b , & c , les trois racines d'une équation quelconque du troisième degré, le coëfficient de son troisième terme pourra toujours être exprimé par le produit qu'on formeroit en multipliant la somme des trois radicaux $2 \sqrt{(a + b)}$, $2 \sqrt{(a + c)}$, $2 \sqrt{(b + c)}$, par les trois différences de deux quelconques de ces radicaux au troisième; ou que, si le second terme de la même équation manque, le coëfficient du troisième sera dès-lors représenté par le produit résultant de la multiplication des trois radicaux imaginaires, $2 \sqrt{(-a)}$, $2 \sqrt{(-b)}$, $2 \sqrt{(-c)}$, par les trois différences de deux quelconques de ces radicaux au troisième, &c.

Quoi qu'il en soit au reste, de ces considérations, je me crois en état d'établir déjà moi-même, un préjugé avantageux, concernant les connoissances ultérieures qui peuvent dériver de ma proposition, en lui donnant une extension analogue

analogue à celle que la proposition de Pythagore, présentée sous l'énoncé que la somme des carrés des deux côtés de tout triangle rectiligne rectangle, moins celui de l'hypothénuse, $= 0$, reçoit de cette autre plus générale, & en renfermant deux d'Euclide, que la somme des carrés des deux côtés quelconques d'un triangle rectiligne aussi quelconque, moins le carré du troisième côté, est égale au produit du rectangle formé sur les deux premiers côtés, & du double du quotient du cosinus de l'angle que comprennent ces côtés, divisé par le rayon, ou, prenant le rayon pour unité, au produit du même rectangle, & du double du cosinus même.

Représentons à cet effet les trois côtés AO, BO, CO , d'un tétraèdre quelconque $OABC$ (*fig. 6*), par les lettres a, b & c ; & nommons de plus le cosinus de l'angle AOB , g ; le cosinus de l'angle AOC , p ; & celui de l'angle BOC , s ; en sorte que les sinus des mêmes angles soient respectivement, $\sqrt{1 - gg}$, $\sqrt{1 - pp}$ & $\sqrt{1 - ss}$; que les aires triangulaires des faces marquées par les mêmes lettres, soient respectivement aussi, $\frac{1}{2}ab\sqrt{1 - gg}$, $\frac{1}{2}ac\sqrt{1 - pp}$ & $\frac{1}{2}bc\sqrt{1 - ss}$, & que la somme de leurs trois carrés soit par conséquent, $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}gg)a^2b^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}pp)a^2c^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}ss)b^2c^2$, ou (nommant γ, π & σ , les sinus correspondans respectivement, aux cosinus g, p & s), $= \frac{1}{4}\gamma^2a^2b^2 + \frac{1}{4}\pi^2a^2c^2 + \frac{1}{4}\sigma^2b^2c^2$.

Les trois côtés AB, AC, BC , de la base du tétraèdre, seront d'ailleurs respectivement, suivant les propositions 12 & 13 du 2.^d livre d'Euclide, égaux à $\sqrt{aa + bb - 2gab}$, $\sqrt{aa + cc - 2pac}$ & $\sqrt{bb + cc - 2sbc}$; & prenant d'après cela, l'aire de cette base, d'une manière semblable à celle dont nous avons fait usage dans la proposition précédente, pour trouver celle de la face hypothénusale, désignée aussi par ABC , de la *figure 5*, & soustrayant le carré de la même aire de base, ainsi trouvée, de la

somme qu'on vient d'assigner, des carrés des trois faces AOB , AOC & BOC , le restant devra être =

$$\frac{1}{2} abc \times [(g - ps)a + (p - gs)b + (s - gp)c];$$

d'où l'on conclura enfin, cette seconde proposition, neuve comme la première, mais plus générale, & qui la renferme, que dans un tétraèdre quelconque, la différence de la somme des carrés des trois faces situées autour d'un même angle solide, au carré de la face opposée à ce même angle solide, est toujours égale à la moitié du produit du parallélépipède formé sur les trois côtés situés autour de l'angle solide, par la somme des trois produits qu'on trouvera en multipliant chacun de ces trois mêmes côtés, par la différence du cosinus de l'angle plan, qui, appartenant à l'angle solide, sera opposé à ce côté, au produit des cosinus des deux autres angles-plans appartenans au même angle solide, lesquels comprendront entr'eux ce même côté.

Puisque d'ailleurs la Trigonométrie sphérique nous apprend que nommant toujours γ , π & σ , les sinus correspondans respectivement, aux cosinus g , p & s , & désignant par G , P & S , les cosinus des angles opposés aux côtés auxquels appartiennent respectivement les mêmes cosinus g , p & s , on aura $\pi \sigma G = g - ps$, $\gamma \sigma P = p - gs$, & $\gamma \pi S = s - gp$, nous pourrons tirer de-là une seconde expression de la formule qui nous a fourni notre seconde proposition, savoir, que le restant dont il y est question, doit aussi être = $\frac{1}{2} abc \times (\pi \sigma G a + \gamma \sigma P b + \gamma \pi S c)$, & en former dès-lors une troisième proposition analogue à la seconde, mais qu'il seroit peu utile de rapporter ici au long, après la précédente.

De même, le corollaire III du Mémoire précédent; sur diverses mesures de l'angle solide, montrant que la tangente de moitié de la mesure de l'angle solide aux angles plans duquel se rapportent les cosinus g , p & s , multipliée par $(1 + g + p + s)$, & par la cotangente de l'inclinaison opposée au côté qui a s pour cosinus,

$= \gamma \pi S$, & ainsi des autres lettres, nous pourrions tirer de-là une troisième expression de la formule dont nous venons de parler, savoir, que la différence dont il est question $=$

$$\frac{1}{2} a b c \times (1 + g + p + s)$$

\times (la tangente de $\frac{1}{2}$ de l'arc qui mesure l'angle solide), &

\times (la somme des trois cotangentes des inclinaisons de cet angle),

& en conclure une quatrième proposition analogue encore à la seconde; choses sur lesquelles je croirois de même superflu de m'arrêter davantage.

J'observerai donc seulement ici, 1.^o que si les trois côtés de l'angle solide étoient supposés égaux entr'eux, la différence en question deviendrait égale à la quatrième puissance du nombre propre à désigner chacun de ces côtés, par la moitié de la différence des deux sommes de g, p & s linéaires & des mêmes lettres prises deux à deux; 2.^o que deux angles plans, par exemple, AOB & BOC , qui entrent dans l'angle solide, étant supposés droits, ou leurs cosinus g & s devenant égaux à zéro, le facteur de abc , dans la différence des deux aires, ne seroit plus que $\frac{1}{2}p$; en sorte que la formule de cette différence se réduiroit alors à $\frac{1}{2}pabc$.

Bien qu'au reste ce paragraphe comprenne déjà, ou désigne suffisamment, le petit nombre en entier, de propositions neuves que je me suis proposé d'y faire entrer, l'importance dont il m'a paru qu'il pourroit être, de présenter, s'il étoit possible, un théorème aussi simple & aussi curieux que le premier des précédens, relatif au tétraèdre rectangle en particulier, de manière à pouvoir être inféré dans les élémens même de Géométrie, m'ayant suggéré d'en chercher une démonstration qui l'y rendit en effet propre, j'espère qu'on me saura gré de joindre ici celle que j'ai trouvée.

Du point O , sommet de l'angle solide supposé droit (*Pl. II, fig. 7*), & prenant pour intervalle, la distance de ce même point O , au sommet C , de l'un des autres angles du tétraèdre $OABC$, soit donc décrit dans le plan de l'une des faces latérales, AOB , du même tétraèdre, un arc de cercle GH ,

jusqu'auquel soient prolongés en H & G respectivement, les côtés AO & BO , comprenant l'angle droit AOB , dans le plan de la même face ABO ; & du même point O , ainsi que de C , soient abaissées les perpendiculaires OP , CP , sur la droite AB , base commune, tant de la face latérale AOB , que de la face hypothénusale ACB , du même tétraèdre, lesquelles y tomberont en un même point P : soit de plus prolongée AB , de ses deux extrémités, en N & M ; & qu'on lui mène par le point O , & par conséquent dans le plan AOB , la parallèle indéfinie TOS : qu'on joigne ensuite par les points G & H , GA & HB ; & qu'on mène de plus sur AB , ou sur ses prolongations, les perpendiculaires HK & GF , qui coupent la parallèle SOT , de AB , en L & I .

Cela posé, les triangles AOB , ACB , qui forment l'une des faces latérales & la face hypothénusale du tétraèdre, seront évidemment des demi-rectangles, sur AB d'une part, & sur OP & CP respectivement, de l'autre.

De plus, les triangles COA , COB , qui forment les deux autres faces latérales du tétraèdre, seront par la construction, égaux respectivement, aux triangles GOA , HOB , dans le plan AOB ; & ceux-ci seront les différences des triangles GAB , HBA , (égaux à des demi-rectangles formés sur AB d'une part, & sur GF & HK respectivement, de l'autre), à leur partie commune AOB , demi-rectangle sur AB , & sur IF ou LK ; en sorte qu'ils seront respectivement égaux à des demi-rectangles formés sur AB d'une part, & sur GI ou HL de l'autre; d'où s'ensuit d'abord que les quatre faces AOB , AOC , BOC & ABC , du tétraèdre, seront proportionnelles aux quatre droites OP , GI , HL & CP ; & que les carrés des nombres propres à exprimer les dernières de ces quantités, seront aussi des carrés de nombres propres à représenter les premières.

Or, 1.^o l'angle HOG , opposé par son sommet à AOB , étant droit, & les deux droites HO , GO , étant des rayons d'un même cercle, & par conséquent égales entr'elles, les angles HOL , GOI , seront complémens l'un de l'autre,

& les triangles HOL , IGO , seront de plus égaux entr'eux, à tous égards; en sorte qu'on aura $HL = OI$, & $GI = OL$, & que d'après la propriété d'être rectangles de l'un & de l'autre, on pourra également conclure que la somme des carrés de HL & de GI , est égale au carré, soit de HO , soit de GO , ou, ce qui revient au même, au carré de OC : mais le triangle OCP étant rectangle en O , la somme des carrés de OC & de OP , est égal au carré de CP , & la somme des trois carrés de HL , de GI & de OP , est par conséquent égale au carré de CP .

Il s'enfuit donc élémentairement, de - là , & de ce qui avoit été remarqué déjà , que la somme des carrés des trois nombres propres à exprimer les trois faces de tout tétraèdre à un angle solide droit, est égale au carré du nombre propre à représenter en même temps, le carré de la face hypothénusale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je dois enfin ne pas omettre ici, 1.^o que lisant il y a quelques années le 9.^{me} volume des Mémoires des Savans Etrangers à l'Académie, qui venoit alors de paroître, je trouvai que l'Auteur d'un des Mémoires de ce volume, M. Tinseau, y avoit employé, *page 608*, dans un de ses Mémoires, la première des propositions de ce §. comme un résultat de sa théorie; 2.^o que je ne doute point, que conformément à son assertion, elle ne la lui ait en effet fournie; mais 3.^o que ma date dans les registres de l'Académie, après démonstration faite en pleine assemblée, doit toujours m'assurer sur cet auteur, à l'égard dont il est question, une priorité d'invention de plus de vingt années.

§. III.

Sur l'évaluation de la solidité d'un tétraèdre quelconque, d'après la connoissance de ses six côtés ou arêtes, seulement.

Soient les trois côtés ou arêtes OA , OB , OC , (*fig. 8*) qui descendent du sommet O , du tétraèdre $OABC$, nom-

mées respectivement a , b & c , & les arêtes BC , AC & AB de la base ABC , qui leur sont respectivement opposées, nommées respectivement aussi, par les lettres grecques analogues, α , β & γ : qu'on mène d'ailleurs du sommet O , du tétraèdre, sur la base, la perpendiculaire OP ; du pied P de cette perpendiculaire, sur l'arête AC , la perpendiculaire PQ , & du sommet O , sur la même arête, la perpendiculaire OQ , tombant, comme on le prouve dans les Éléments de Géométrie, sur le même point Q , que la précédente: soient encore, de l'angle B , de la base, opposé à l'arête AC , abaissée une autre perpendiculaire BT , sur le même côté AC , du point P , tirée la parallèle PR , à AC , & de B , en P , jointe la droite BP ; qu'on appelle enfin BT & OQ respectivement, m & n , QT , h , & PQ , x ; & l'on aura d'abord, $OP = \sqrt{nn - xx}$, & par conséquent $BP = \sqrt{bb - nn + xx}$, & $BR = \sqrt{bb - nn + xx - hh}$; d'où l'on conclura $\sqrt{bb - nn + xx - hh} + x = m$, ou $bb - nn + xx - hh = mm - 2mx + xx$, & par conséquent la hauteur OP du tétraèdre, ou $\sqrt{nn - xx} = \frac{\sqrt{[4m^2n^2 - (mm + nn - bb + hh)^2]}}{2m}$;

& multipliant la base ABC , $= \frac{1}{2} \beta m$, du même tétraèdre, par le tiers de cette valeur de sa hauteur, il viendra pour sa solidité, l'expression $\frac{1}{12} \beta \times \sqrt{[4m^2n^2 - (mm + nn - bb + hh)^2]}$, dans laquelle il ne s'agira plus que de substituer les valeurs de mm , de nn & de hh , en a , b & c , & en α , β & γ , pour déduire de-là, une formule propre à représenter en lettres supposées toutes connues, l'inconnue cherchée.

Or, 1.^o mm est le quadruple du quotient du carré de l'aire de la base ABC , par AC , ou

$$= \frac{-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2}{4\beta^2},$$

& $kk - mm$, ou AT^2 , est d'après cela, $= \frac{(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2}{4\beta^2}$;

$$\& AT = \frac{\pm \beta^2 \pm \gamma^2 \pm \alpha^2}{2\beta}.$$

2.^o nn est le quadruple du quotient du carré de l'aire de la face AOC , par AC , ou $= \frac{-a^2 - c^2 - \beta^2 + 2a^2c^2 + 2a^2\beta^2 + 2c^2\beta^2}{4\beta^2}$,

& $cc - nn$ ou CQ^2 , est par conséquent, $= \frac{(\beta^2 + c^2 - a^2)^2}{4\beta^2}$,

& $CQ = \frac{\pm \beta^2 + c^2 + a^2}{2\beta}$; & comme QT ou $h = AC$

$- AT - CQ$, on aura $h = \pm \frac{-x^2 + a^2 - c^2 + a^2}{2\beta}$,

& par conséquent, $hh = \frac{(-x^2 + a^2 - c^2 + a^2)^2}{4\beta^2}$.

Substituant enfin toutes ces valeurs en la place de mm , de nn & de hh (ce que je m'abstiens de faire ici, parce qu'une telle substitution consisteroit uniquement dans une opération de calcul, qui, sans offrir aucune difficulté à vaincre, feroit fort longue à suivre), ne négligeant aucune réduction qui puisse se présenter à faire en opérant, & arrangeant les termes du résultat du calcul, suivant le meilleur ordre, on parviendra enfin à cette formule de la valeur de la solidité cherchée, que je suppose représentée par la lettre z ,

$$z = \frac{1}{12} \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} a^2 a^2 x (b^2 + \beta^2 + c^2 + x^2 - a^2 - a^2) - a^2 b^2 x^2 \\ + b^2 \beta^2 x (a^2 + a^2 + c^2 + x^2 - b^2 - \beta^2) - a^2 c^2 \beta^2 \\ + c^2 x^2 x (a^2 + a^2 + b^2 + \beta^2 - c^2 - x^2) - b^2 c^2 a^2 \\ - a^2 \beta^2 x^2 \end{array} \right\}}$$

d'où l'on conclura la règle neuve suivante.

On assignera la valeur de la solidité du tétraèdre dont on connoîtra les six arêtes;

1.^o en carrant tous les nombres qui exprimeront les arêtes, & multipliant les uns par les autres, les carrés de ceux qui représenteront des arêtes opposées entr'elles, ce qui donnera trois produits de quatre dimensions chacun:

2.^o en multipliant chacun de ces trois produits par la somme des quatre carrés qui n'y entreront point, moins celle des deux qui y entreront, & ajoutant ensemble les nouveaux produits, ce qui donnera une somme de produits de six dimensions chacun:

3.^o en prenant les carrés des quatre parallépipèdes qu'on pourra former sur les trois arêtes appartenantes à une quelconque des faces du tétraèdre, & ajoutant ensemble ces quatre carrés, ce qui donnera une somme de carrés de six dimensions chacun :

4.^o en soustrayant cette somme de carrés de six dimensions, trouvée par l'article troisième, de celle de produits du même nombre de dimensions, trouvée par l'article second :

5.^o en tirant la racine carrée du restant de la soustraction précédente, & prenant le douzième de cette racine.

On trouveroit, par exemple, facilement, au moyen de cette règle, que, suivant qu'Euclide l'a démontré par une autre voie, le tétraèdre régulier est le tiers du cube dans lequel il peut être inscrit, ou des faces duquel ses six arêtes feroient les six diagonales ; & elle apprendroit de plus (ce qui peut n'avoir pas encore été remarqué) qu'il règne entre le même tétraèdre régulier, & un cube qui auroit la même arête, le même rapport qu'entre la diagonale du cube, & la somme de ses arêtes qui sont au nombre de 12.

Mais il est sur-tout important d'observer à son sujet, qu'avant que de s'engager dans le calcul de la solidité d'un tétraèdre quelconque, proposé par l'exhibition des six seules arêtes dont il seroit prétendu devoir être formé, il faut examiner avec soin, si la somme de deux arêtes d'une des faces quelconque, n'auroit pas été supposée mal-à-propos, plus petite que la troisième de la même face ; ce qui devoit rendre impossibles, & la face, & le tétraèdre, & conduire ainsi à une solution imaginaire.

Comme d'ailleurs la règle même n'est pas moins compliquée par sa nature, qu'elle peut être utile dans la pratique, je pense qu'il convient d'en joindre ici un exemple.

Soit donc proposé de mesurer la solidité du tétraèdre dont les trois arêtes descendantes du sommet à la base, seroient représentées par les nombres 20, 25, 25, & les trois de la base, opposées respectivement à celles-là, le seroient
par

par les nombres 18, 15, 15; tétraèdre des faces duquel l'examen n'en fait trouver aucune impossible; & l'on aura

$$1.^{\circ} \& 2.^{\circ} (20 \times 18)^2, \text{ ou } 129,600 \times (225 + 225 + 625 + 625 - 400 - 324), \\ \text{ou } \times 976 \dots \dots \dots = 126,489,600.$$

$$(25 \times 15)^2, \text{ ou } 140,625 \times (324 + 400 + 225 + 625 - 225 - 625), \\ \text{ou } \times 724 \dots \dots \dots = 101,812,500.$$

$$(25 \times 15)^2, \text{ ou } 140,625 \times (324 + 400 + 225 + 625 - 225 - 625), \\ \text{ou } \times 724 \dots \dots \dots = 101,812,500.$$

En sorte que la somme des trois produits, de laquelle il faudra soustraire, sera. 330,114,600.

$$3.^{\circ} (20 \times 15 \times 25)^2, \text{ ou } 3600 \times 15,625 \dots = 56,250,000.$$

$$(20 \times 15 \times 25)^2, \text{ ou } 3600 \times 15,625 \dots = 56,250,000.$$

$$(25 \times 25 \times 18)^2, \text{ ou } 15,625 \times 8100 \dots = 126,562,500.$$

$$(15 \times 15 \times 18)^2, \text{ ou } 6561 \times 2500 \dots = 16,402,500.$$

En sorte que la somme des carrés de parallépipèdes, ou le nombre à soustraire, sera. = 255,465,000.

$$4.^{\circ} \text{ Le restant sera donc. } \dots \dots \dots = 74,649,600.$$

$$5.^{\circ} \text{ La racine carrée de ce restant est. } \dots \dots \dots = 8,640.$$

$$\text{dont le } 12.^{\text{ème}}, \text{ qui. } \dots \dots \dots = 720.$$

exprimera la valeur cherchée du tétraèdre proposé.

En effet, les faces 20, 15, 25, sont des triangles rectangles, puisque $15^2 + 20^2$, ou $225 + 400 = 625 = 25^2$; le tétraèdre lui-même est donc rectangle par l'arête 20, & il est ainsi le produit du tiers de sa base, qui est l'aire du triangle 15, 15, 18, par la hauteur 20. Or l'aire du triangle 15, 15, 18

$$= \frac{1}{2} \sqrt{[(15 + 15 + 18) \times (15 + 15 - 18) \times (15 - 15 + 18) \times (-15 + 15 + 18)]}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(48 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18)} = \frac{18}{2} \sqrt{(48 \cdot 12)} = \frac{18 \cdot 12 \cdot 2}{4} = 108,$$

dont le tiers = 36; & $36 \times 20 = 720$, comme nous l'avons trouvé.

Mais si l'on nous eût proposé au lieu de cela, d'évaluer la solidité d'un tétraèdre dont on auroit prétendu que les arêtes descendantes du sommet, devroient être 4, 2 & 2, tandis que la base seroit un triangle équilatéral, qui auroit l'unité pour côté; l'observation que nous ferions, que l'une des faces d'un tel tétraèdre, & même deux, devroient avoir pour côtés 4, 2 & 1, des deux derniers desquels la somme est plus petite que le 1.^{er} seul, nous montrant qu'une telle face triangulaire seroit impossible, nous conclurions qu'il en devoit aussi être de même du tétraèdre, & nous nous abstenrions dès-lors de la recherche de son évaluation, qui, faite au long comme la précédente, ne pourroit en effet aboutir qu'à nous offrir une solidité $= \sqrt{(r-1)}$, ou impossible.

On peut encore remarquer au même sujet, que l'équation qu'on auroit en égalant à zéro la valeur de z donnée par notre formule, seroit, comme elle devoit l'être, la même qui seroit propre aussi à exprimer la relation des deux paires de côtés opposés, & de la paire de diagonales, d'un quadrilatère quelconque, lesquelles paires on supposeroit représentées par les trois paires de lettres latines & grecques semblables, qui sont employées dans la formule.

C'est ainsi qu'en prenant dans la même formule a & α , & b & β , pour les paires de côtés opposés, & c & κ pour la paire de diagonales, & supposant de plus que $a = \alpha = b = \beta$, d'où il résultera que le quadrilatère devra être un losange, la formule nous donnera $2 a^4 \times (c^2 + k^2) - 2 a^4 c^2 - c^2 k^2 \times (4 a^2 - c^2 - k^2) - 2 a^4 k^2 = 0$, ou bien $4 a^2 - c^2 - k^2 = 0$; ce qui montre que dans le quadrilatère que l'on considère ici, ou le losange, les deux diagonales peuvent être les deux côtés d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuse seroit le double du côté unique du même quadrilatère, comme la chose doit en effet arriver; & que les deux diagonales venant d'ailleurs à être supposées égales l'une à l'autre, le triangle rectangle dont on parle,

deviendrait encore isocèle, & le losange se changeroit ainsi en carré.

On m'objectera peut-être ici, que bien que le quadrilatère en question se montre clairement dans l'affaissement (*fig. 9*) du sommet *O* du tétraèdre, sur un point *P* du plan de la base, extérieur à cette base; il n'en est pas de même lorsque cet affaissement du sommet vient à tomber, ou sur un des côtés de la base (*fig. 10*), ou dans cette base même (*fig. 11*), & toujours aux points *P* de ces deux figures, dont la première paroît à l'inspection, formée uniquement d'un triangle *ABPC*, lié à une droite *AP*, partant d'un de ses angles *A*, & terminée au côté opposé *BC*, & la seconde représente le même triangle lié à trois droites, qui, partant toutes d'un même point de son aire, se terminent à chacun de ses angles.

Mais une telle objection n'auroit sa source que dans un défaut d'attention ou un préjugé sans fondement, d'après lesquels on supposeroit implicitement & faussement, qu'il fût essentiel aux diagonales des quadrilatères de se croiser l'une l'autre, ou à leurs angles, d'être tous saillans; & elle doit disparaître à la seule vue de la loi de continuité, d'abord de la *fig. 9* à la *fig. 10*, & puis de cette *fig. 10* à la *fig. 11*, suivant laquelle la *fig. 10* nous montre encore un quadrilatère, formé toujours, ainsi que celui de la *fig. 9*, des côtés *AB*, *AC*, *BP* & *CP* (derniers qui font ici un angle de 180°), & ayant toujours pour diagonales *AP* & *BC* (dernière qui coïncide avec la somme des deux derniers côtés, & ne croise pas *AP*, mais la termine en *P*); & la *figure 11* nous en montre encore un, formé toujours des côtés *AB*, *AC* & *BP*, *CP*, & ayant toujours pour diagonales *AP*, & *BC*, qui ne se croisent plus ni ne se touchent, ce qui rend l'angle *BPC* rentrant.

Il y a plus, l'admission nécessaire dans le quadrilatère, des angles rentrans, ainsi que des saillans, nous autoriseroit ici, à prendre à volonté pour diagonales, des droites que nous aurions prises auparavant pour côtés, & réciproquement.

Ainsi la même figure 11 peut être encore considérée comme représentant, par exemple, le quadrilatère formé des côtés BA , BC , AP & CP , dont le 2.^d & le 3.^{me} étoient employés dans l'autre pour diagonales, & ayant pour diagonales AC & BP , c'est-à-dire, deux des côtés de l'autre Z . Et c'est ce qui fait que les six lignes que comprend l'équation du quadrilatère, y dépendent toutes d'une manière semblable, les unes des autres, en tant que pouvant toutes également, désigner les mêmes fonctions de cette figure.

La comparaison enfin, d'une première idée qui m'étoit d'abord venue inutilement à l'esprit, pour la recherche que comprend ce paragraphe, avec celle au moyen de laquelle j'y ai ensuite réussi, & que je viens d'exposer, m'ayant fourni quelques autres réflexions que je juge assez utiles, j'espère qu'on me saura gré de les présenter succinctement en cet endroit.

Ayant donc tiré (*fig. 12*) du sommet O du tétraèdre, sur la base ABC , la perpendiculaire OP ; & du pied P , de cette perpendiculaire, à chaque angle A , B & C , de la base, les droites PA , PB & PC , & nommé OP , y , j'avois pensé que les triangles OPA , OPB & OPC , rectangles en P , & les côtés OA , OB & OC , connus, devant faire connoître PA , PB & PC , en y , & les aires des triangles APB , APC & BPC , ainsi que leur somme, devant aussi être connues en y ; l'égalité de la somme, avec l'expression toute connue de la base ABC , qu'on peut tirer des trois côtés connus de cette base, donneroit le moyen de connoître y , hauteur du tétraèdre, & d'après la multiplication de la même base ABC , par le tiers de cette ligne, d'évaluer la solidité du tétraèdre même.

Mais je m'aperçus incontinent après, que cette méthode me jetteroit dans de trop longs calculs, pour me permettre de continuer à la suivre: j'allai plus loin; curieux de pouvoir présumer jusqu'à quel point ces calculs devroient s'étendre, & quel temps ils demanderoient, je fis des calculs particuliers qu'il seroit inutile de rapporter ici, sur l'un &

l'autre de ces objets, & trouvai que le résultat (aux réductions près, qui auroient pu le présenter dans les élévations successives de polynomes irrationnels à des carrés, & dans les additions ou soustractions mutuelles de ces carrés, en quoi ils auroient consisté) auroit dû comprendre 60, 626, 968 membres de 32 dimensions chacun, & n'auroit pu être obtenu (sauf les mêmes réductions) par les plus prompts calculateurs, qu'en se remplaçant un à un successivement, dans un travail continu de dix heures au moins par jour, durant plus de seize siècles: conclusion plus que suffisante pour le regarder comme physiquement impossible, malgré même les réductions auxquelles il donneroit lieu.

La règle que je découvris ensuite pour la mesure que je cherchois, ou celle que je viens d'exposer, m'ayant alors bien prouvé que la longueur immense d'un tel calcul n'étoit pourtant pas essentielle à la question à laquelle je me proposois de satisfaire, & que la nature de la même question se rendoit au lieu de cela, susceptible d'une grande abréviation, je m'attachai à reconnoître, si je le pouvois, pourquoi il en devoit être ainsi; & à cette occasion, & par induction de cet exemple, je cherchai même la solution de ce problème bien plus général & vraiment philosophique : *parvenir dans tous les cas où la chose se trouveroit praticable, aux solutions abrégées de tous les problèmes dont d'autres solutions conduiroient à des énoncés fort compliqués, mais pourroient en même temps paroître susceptibles d'une simplification plus ou moins grande.*

Pour résoudre donc celui-ci, qu'on pourra envisager comme aussi important dans l'Analyse, que nouveau, & prendre même dans bien des circonstances, pour clé d'une des parties de ce grand art trop peu connu encore, je me représentai d'abord la déduction qu'on peut faire des données de tout problème, à l'inconnue dont la solution du problème doit faire trouver la valeur, sous l'apparence d'une espèce de distance que je me permettrai ici, d'appeler *logique*, & que mon esprit auroit à franchir.

Or, en supposant que mon esprit se trouvât hors d'état de s'élever, pour ainsi dire, d'un seul vol, au terme de la même distance logique, que pourrois-je avoir alors de mieux à faire que de rechercher avec soin, si dans tous les moyens qui seroient dès auparavant à ma disposition, il ne s'en trouveroit pas de propres à me transporter tout d'un coup, à un point de cette même distance, d'où il ne m'en restât plus à parcourir qu'une portion beaucoup moins considérable, & par conséquent, d'autant moins disproportionnée à mes forces?

La solution de ce problème me sembla donc devoir se réduire à faire une revue exacte de toutes les connoissances relatives à son objet, desquelles je pourrois être antérieurement muni, & que j'aurois acquises en les déduisant, du moins en partie, de principes sur lesquels le calcul que l'autre solution auroit exigé, & que la trop grande longueur dont il auroit dû être, auroit fait juger impossible dans l'exécution, ne porteroit nullement; à discerner après cela, entre de telles connoissances, celles qui pourroient aussi dériver des principes du même calcul, mais seulement avec le secours d'autres calculs qui devroient eux-mêmes devenir très-longs, à essayer enfin si l'emploi de celles-ci, obtenues & démontrées déjà par d'autres voies, ne seroit pas propre à réduire la solution cherchée à des bornes de calcul qui ne fussent plus hors de la portée, ni de mes forces, ni de ma patience.

Bien qu'on démontre aisément (pour nous en tenir à notre exemple) dans les élémens de Géométrie, par la voie du mouvement, de la superposition & de la réduction à l'absurde, non-seulement la première proposition de la Géométrie plane, que *si une droite située hors d'un plan, est perpendiculaire à deux autres droites situées dans ce plan, & se croisant au point où elle y tombe, elle doit dès-lors l'être aussi à toutes les autres droites situées dans le plan, & passant par le même point*; mais encore cette conséquence de la même proposition, que *les perpendiculaires tirées du sommet & du pied d'une perpendiculaire à un plan, sur une même droite de ce plan, tombent en un même point de cette droite*; la déduction de la première

de ces propositions, que j'employois dans la solution à laquelle j'avois d'abord pensé, à la seconde dont je n'y faisois point usage, ne sauroit cependant se faire algébriquement d'une manière complète, qu'au moyen d'une très-longue combinaison ou répétition de calculs & réductions, très-simples à la vérité les uns & les autres en particulier, telle que la suivante.

Soit OP (fig. 13) perpendiculaire sur le plan $PRTQS$, & PQ perpendiculaire sur RS ; soit de plus OT , perpendiculaire sur la même RS , supposée tomber en un point T de cette dernière droite, différent de Q ; en sorte que nommant OP , a , PQ , b , & QS , f , on pût avoir $TQ =$ à une quantité x ; & on conclura de ces suppositions, 1.^o par le triangle OPQ rectangle en P , $OQ^2 = aa + bb$; 2.^o par le triangle OQT , supposé rectangle en T , $OT^2 = aa + bb + xx$; 3.^o par le triangle OST rectangle en T , $OS^2 = aa + bb + xx + ff + 2fx + xx$, & par une première réduction $OS^2 = aa + bb + ff + 2fx$; 4.^o par le triangle OPS rectangle en P , $PS^2 = aa + bb + ff + 2fx - aa$, & par une seconde réduction $PS^2 = bb + ff + 2fx$; 5.^o par le triangle RSQ rectangle en Q , $bb + ff + 2fx = bb + ff$; 6.^o par une troisième & dernière réduction, $2fx = 0$, ou $x = 0$; d'où s'ensuivra que nous avons supposé mal-à-propos que x fût une quantité, ou qu'il y eût un intervalle x , entre les points T & Q , de la droite $RTQS$, & nous pourrons conclure que les points T & Q doivent coïncider, ou tomber exactement l'un sur l'autre.

Or, ce calcul assez long, y compris ses réductions, & sans compter la réduction de $aa + bb + 2ab = cc + 2ab$ en $aa + bb = cc$, ou quelque autre semblable, que supposeroit d'ailleurs, toute démonstration de la 47.^{me} d'Euclide, de laquelle on y a fait cinq fois usage, m'a paru en effet propre à m'avoir offert par la combinaison avec un autre, plus long encore, mais non immense, le résultat de calcul immense dans lequel je m'étois d'abord trouvé engagé; & j'ai jugé d'après cela, que c'étoit en même

temps l'emploi que j'avois fait dans ma démonstration, de la seule conclusion à laquelle ce calcul menoit, ou de la seconde des propositions élémentaires rapportées plus haut, qui avoit dû faire disparaître de cette démonstration, la partie la plus grande, sans comparaison, de la difficulté de la recherche que je m'étois proposée; opinion que des réflexions ultérieures sur la même démonstration, ne pourroient que confirmer.

§. I V.

Sur l'évaluation d'un Tétraèdre quelconque, d'après la connoissance, soit de trois de ses arêtes, jointe à celle des élémens angulaires solides de l'angle solide où ces arêtes se réunissent, soit d'une arête seulement, du sinus de l'inclinaison des deux faces dont cette arête forme la commune section, & des perpendiculaires tirées dans les deux faces, de l'angle opposé à cette commune section, sur la même commune section, soit enfin de trois faces quelconques, & des élémens angulaires de l'angle solide dans lequel elles concourent.

Pour remplir d'abord la première partie de l'objet de ce paragraphe, nous conserverons les noms que nous avons donnés dans le paragraphe précédent, aux diverses lignes de la figure 8, dont nous continuerons aussi à y faire usage; nous nommerons de plus, comme nous avons fait à l'égard de la seconde proposition du §. II, les cosinus des angles plans AOB , AOC & BOC du sommet, g , p & s respectivement; & les trois arêtes AB , AC & BC , ou α , β & α , de la base, feront, d'après les propositions 12 & 13 du 2.^d Livre des élémens d'Euclide, égales respectivement aux radicaux suivans,

$$\sqrt{aa + bb - 2gab},$$

$$\sqrt{aa + cc - 2pac},$$

$$\& \sqrt{bb + cc - 2sbc};$$

en sorte

en sorte qu'on aura

$$x^2 = aa + bb - 2gab,$$

$$y^2 = aa + cc - 2pac,$$

$$\& z^2 = bb + cc - 2sbc.$$

Or, substituant ces valeurs dans la formule du paragraphe précédent, je suis parvenu, au moyen d'un calcul un peu long, mais facile, & qu'il seroit par conséquent inutile de rapporter ici, à la nouvelle formule assez simple,

$$z = \frac{1}{6} abc \times \sqrt{(1 - g^2 - p^2 - s^2 + 2gps)};$$

& dès-lors à cette première proposition ou règle ; qu'on aura la solidité de tout tétraèdre dont on sera supposé connoître trois arêtes situées autour d'un même angle solide, & les trois angles plans compris entre ces arêtes ; 1.^o en formant un parallépipède des trois arêtes, & en en prenant le sixième ; 2.^o en formant un autre parallépipède sur les trois cosinus des angles plans donnés, le doublant & y ajoutant l'unité ; 3.^o en soustrayant de la somme trouvée, celle des carrés des trois mêmes cosinus ; 4.^o en tirant la racine carrée du restant ; 5.^o enfin en multipliant par cette racine, le sixième de parallépipède trouvé dans l'article premier.

Mes deux Mémoires précédens, compris dans ce même Volume, offriront d'ailleurs une conséquence bien simplifiée encore de cette règle, pour le cas où les élémens angulaires donnés de l'angle solide formé par les trois arêtes données aussi, consisteroient en deux angles plans, & l'inclinaison mutuelle de leurs plans.

En effet, le polynome $1 - g^2 - p^2 - s^2 + 2gps$, représentant également

$$(1 - gg) \times (1 - pp) - (s - gp)^2,$$

$$(1 - gg) \times (1 - ss) - (p - gs)^2,$$

$$\& (1 - pp) \times (1 - ss) - (g - ps)^2;$$

& ces quantités étant chacune, susceptibles d'autres énoncés, par la substitution aux cosinus g , p & s , de leurs valeurs ;

Mém. 1783.

D d d

en sinus correspondans, nommés dans le §. II, γ , π & σ ; la première, par exemple, prenant de-là, cette forme, $\gamma^2 \pi^2 - (s - gp)^2$; il en résulte d'abord, $z = \frac{1}{6} abc \times \sqrt{\gamma^2 \pi^2 - (s - gp)^2}$; & cette dernière équation se transforme, au moyen de la division sous le signe, par $\gamma^2 \pi^2$, & de la multiplication hors du signe par $\gamma \pi$, en $z = \frac{1}{6} abc \times \gamma \pi \sqrt{1 - \frac{(s - gp)^2}{\gamma^2 \pi^2}}$. La remarque tirée de la Trigonométrie sphérique, que $\frac{s - gp}{\gamma \pi}$ est égale au cosinus, que nous avons nommé ci-dessus S , de l'inclinaison des faces OAB , OAC , dans l'arête OA , & que $\sqrt{1 - \frac{(s - gp)^2}{\gamma^2 \pi^2}}$, est par conséquent l'expression du sinus de la même inclinaison, nommé ci-dessus Σ , change de plus, celle-ci en $z = \frac{1}{6} abc \gamma \pi \Sigma$. Tout cela enfin, donne lieu de conclure en quantités toutes données par l'énoncé du problème,

ou par les Tables des sinus, la règle seconde suivante, d'une simplicité vraiment étonnante, eu égard au grand nombre de données qu'elle emploie, & à la complication essentielle, autant que j'ai pu en juger, des calculs dont elle est le résultat.

Pour trouver la solidité d'un tétraèdre quelconque, dont on fera supposé connoître trois arêtes situées autour d'un même angle solide, ainsi que deux des trois angles plans compris entre ces arêtes, & l'inclinaison des plans de ces angles; il suffira de former deux parallélépipèdes, l'un sur les trois arêtes, l'autre sur les sinus de deux quelconques des trois angles plans, & celui de l'inclinaison mutuelle de leurs plans, de multiplier le premier de ces parallélépipèdes par le second, & de prendre le sixième du produit.

Les énoncés de ces deux premières règles, relatives au premier objet de notre problème, sont d'ailleurs l'un & l'autre trop simples pour avoir besoin d'être éclaircis par des exemples.

Passant donc à la seconde partie du même objet, je remar-

querai que la valeur de z tirée de la dernière de nos transformations, pouvant s'exprimer ainsi $z = c \times \gamma a \times \pi b \times \frac{1}{6} \Sigma$,

& les valeurs de γa & de πb désignant évidemment (*pl. III, fig. 14*) les perpendiculaires AR , BS , tirées de A & de B sur OC , il s'ensuit de-là ;

1.^o Cette troisième proposition ou règle, qu'on trouvera aussi la solidité du tétraèdre, en formant un parallépipède de la commune section de deux faces quelconques, & des perpendiculaires tirées dans les deux faces, de l'angle opposé à la commune section, sur cette commune section, & le multipliant par $\frac{1}{6}$ du sinus de l'inclinaison des deux faces.

2.^o Que pour construire la solidité du tétraèdre, il suffira de tracer (*fig. 15*) un triangle $\phi\lambda\psi$, dont les côtés $\phi\lambda$ & $\lambda\psi$, soient égaux aux perpendiculaires AR , BS , & comprennent entr'eux un angle $\phi\lambda\psi$, égal à celui qui mesurera l'inclinaison des plans, AOC , BOC , & d'élever sur l'aire de ce triangle, prise pour base, un prisme triangulaire droit, dont la hauteur soit $= \frac{1}{3}OC$, ou $= \frac{1}{3}c$.

3.^o Que la même solidité étant aussi égale à un prisme triangulaire droit, qui auroit la même base ABC (*fig. 16*) que le tétraèdre, & pour hauteur, le tiers de la hauteur OP du même tétraèdre, on construira facilement cette hauteur OP , en prenant une quatrième proportionnelle aux aires triangulaires ABC & $\phi\lambda\psi$, & au côté OC .

Quant au troisième objet de ce paragraphe, ou à l'évaluation de la solidité du tétraèdre, d'après la connoissance de trois de ses faces, ainsi que des trois angles plans situés autour de l'angle solide dans lequel elles se réunissent, c'est une suite de la seconde évaluation comprise dans ce paragraphe, ou de celle qui suppose que l'on connoisse trois arêtes, deux angles plans intermédiaires & l'inclinaison de leurs plans.

En effet, soient nommées les trois faces qu'on supposera connues, ee , ff & ll ; & conservant les noms donnés déjà aux cosinus & sinus des angles plans connus aussi, on aura

$\frac{1}{2}\gamma ab = ee$, ou $ab = \frac{2ee}{\gamma}$, & de même $ac = \frac{2ff}{\pi}$, &
 $bc = \frac{2ll}{\sigma}$; d'où l'on conclura $a^2 b^2 c^2 = \frac{8e^2 f^2 l^2}{\gamma \pi \sigma}$, &
 $abc = \frac{2\sqrt{2} \cdot e f l}{\sqrt{(\gamma \pi \sigma)}}$; valeur qui, étant substituée dans la
 formule de notre seconde règle, donnera pour la formule
 qu'on chercheroit, de celle-ci, $z = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\gamma \pi}}{\sqrt{(\sigma)}}$ $\times \Sigma \times e f l$,
 ou, substituant si l'on vouloit, pour $\gamma \pi \Sigma$, la valeur

$$\sqrt{[\gamma^2 \pi^2 - (gp - s)^2]},$$

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{[\gamma^2 \pi^2 - (gp - s)^2]}}{\sqrt{(\gamma \pi \sigma)}} \times e f l;$$

Mais ces formules, bien que représentant l'une & l'autre, dans les conditions supposées, la solidité cherchée, donneroient en même-temps, à la quatrième règle qu'elles pourroient fournir, des énoncés trop compliqués, pour que j'aie dû juger utile de les exposer ici au long.

Observation sur le Paragraphe précédent & celui-ci.

Durant la lecture que je fis de ce Mémoire, à l'Académie, on m'observa avec raison, que M. de la Grange avoit traité dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, de l'année 1773, la même matière qui fait l'objet de ces deux paragraphes; & je ne doutai guère dès-lors, qu'un Géomètre d'un si grand mérite, ne fût tombé sur les mêmes formules que moi, & que, frappé de leur utilité & de leur simplicité réunies ensemble, il ne les eût rendues publiques avant moi; en sorte qu'il ne me seroit resté à cet égard, que le seul droit de réclamer en ma faveur, d'après nos anciens registres, la très-grande antériorité de date de l'invention qui nous auroit été commune.

Je fus donc avec empressement, consulter sur cela, le volume des Mémoires de l'Académie de Berlin, qui m'avoit été indiqué, & que je n'avois point en ma possession, &

n'avois d'ailleurs pas lû dans la très-longue interruption de mes travaux mathématiques; mais je trouvai au contraire,

Premièrement, que M. de la Grange n'avoit employé dans le Mémoire dont il étoit question, que la méthode transcendante, & indirecte à un tel égard, des différences finies; & qu'il y avoit dès-lors lieu de croire que les problèmes qu'il s'étoit proposé d'y résoudre, ne lui avoient paru, ni soumis à des recherches élémentaires, ni susceptibles de solutions très-simples; sans quoi il n'auroit pas manqué de préférer celles-ci, dans une matière que les fréquens & importans usages, auxquels elle devoit s'étendre, demandoient qu'on mît autant qu'il seroit possible, à la portée des Géomètres de la moindre force, & de sujets même qui ne seroient en ce genre que praticiens seulement;

En second lieu, qu'il ne développoit pas en élémens propres & directs du tétraèdre, tels que ses côtés ou arêtes, ses faces, &c. les résultats, un peu obscurs en eux-mêmes, auxquels la méthode l'avoit conduit;

3.^o Que si, pour développer de la sorte, ces résultats, on représentoit la formule qu'il donne de la solidité du tétraèdre, par les lettres que j'ai employées dans mes deux paragraphes, on ne retrouveroit même pas la formule que j'ai de mon côté, déduite élémentairement & avec la plus grande évidence, des principes les plus clairs, & vérifiée d'ailleurs, dans un cas d'un calcul assez long.

S. V.

Sur la manière de tirer entre deux droites qui ne soient point situées dans un même plan, la perpendiculaire unique qui peut toujours alors leur être commune.

CETTE recherche, qu'autant que je puis savoir, aucun Géomètre ne s'est encore proposée, bien que ce soit de-là que dépende essentiellement, l'habitude ou extériorité mutuelle de deux droites situées chacune hors de tout plan où l'autre puisse se trouver, paroitra peut-être d'abord, étrangère

à la théorie du tétraèdre; mais elle n'en a pas moins pour cela un rapport immédiat & direct à l'examen de ce solide.

En effet (*fig. 17*) les droites $\omega\eta$, & $\delta\gamma$, étant données de position, on peut 1.^o prendre à volonté, sur chacune respectivement, deux points O & C , A & B , dont les distances OC , & AB , seront par conséquent, données aussi; 2.^o unir les deux extrémités de chacune aux deux extrémités de l'autre, par quatre nouvelles droites, OA & OB , CA & CB , qui seront aussi données, ainsi que leurs positions respectives, & leurs angles & leurs inclinaisons sur d'autres droites données semblablement.

Or, les six droites qui se trouveront ainsi tracées, & les faces, les angles & les inclinaisons de plans, qui résulteront de-là, formeront dès-lors un tétraèdre $OABC$, tout donné, & duquel OC & AB , seront une paire d'arêtes, opposées l'une à l'autre; en sorte que la recherche dont on s'occupera, reviendra à celle des *moyens de tirer dans un tétraèdre quelconque, la perpendiculaire unique qui peut toujours être commune, à deux quelconques de ses arêtes, opposées l'une à l'autre.*

Pour réussir donc, dans l'une ainsi que dans l'autre, j'ai pris d'abord sur OC , première des deux droites de directions données, une abscisse quelconque OX , que j'ai nommée x , & de l'extrémité X de laquelle j'ai supposé menées sur AB , seconde des droites de directions données, des perpendiculaires variables XZ , que j'ai nommées z ; & j'ai désigné les arêtes OA & OB , par a & b , & les cosinus & sinus des angles AOC , BOC & AOB , par les lettres g & γ , p & π , & s & σ , respectivement.

J'ai de plus remarqué que la plus courte des distances d'un point quelconque de l'une des droites données d'abord, à un point quelconque de l'autre, ne pouvoit manquer d'être en même-temps la perpendiculaire commune cherchée, puisque prenant KZ pour la plus courte distance de $O\eta$ & δB , il faudroit, pour que KZ ne fût pas en même-temps perpendiculaire à $O\eta$ & δB , qu'on pût tirer de K & de Z , sur δB & $O\eta$ respectivement, des perpendiculaires

différentes de XZ , c'est-à-dire, des droites plus courtes que XZ , ce qui contrediroit à notre supposition.

Ayant donc, d'après cela, réduit la recherche proposée à celle de la plus courte distance de On & de DB ; 1.^o dans la vue d'exprimer la perpendiculaire XZ , ou z , en connues & en x , j'ai fait attention que les côtés AX , BX & AB du triangle variable AXB , sont respectivement égaux à $\sqrt{(aa + 2gx + xx)}$, $\sqrt{(bb + 2px + xx)}$, & $\sqrt{(aa + 2sab + bb)}$, & que le double de la valeur de l'aire de ce triangle, en constantes & en x , laquelle on peut conclure de-là, divisé par la constante AB , ou par la base $\sqrt{(aa + 2sab + bb)}$ du même triangle, doit d'ailleurs donner cette perpendiculaire z .

2.^o Après avoir trouvé par un calcul assez long, mais trop facile pour devoir être rapporté ici, cette dernière valeur, je l'ai différenciée, j'en ai fait la différence $= 0$, j'ai tiré de-là, par un autre calcul qui auroit pu être long encore, mais que j'ai trouvé moyen d'abréger un peu, la valeur de x propre à faire devenir XZ un *minimum*, & cette valeur de x s'est trouvée être $\frac{(ga + pb)s - (pa + gb)}{\sqrt{[\gamma^2 a^2 + 2(gp - s)ab + \pi^2 b^2]}}$.

3.^o J'ai substitué par un autre calcul qu'il n'a pas été hors de propos de venir à bout d'abréger aussi un peu, cette valeur de x dans celle de z , ou de la perpendiculaire à la seconde $\Delta\gamma$ des droites données, afin de restreindre d'abord celle-ci à ne pouvoir plus convenir qu'à la seule perpendiculaire aux deux droites à-la-fois, & il m'est venu

$$z = \frac{\sqrt{(1 - gg - pp - ss + 2gps).ab}}{\sqrt{[\gamma^2 a^2 + 2(gp - s)ab + \pi^2 b^2]}}$$

ou, d'après la réduction employée déjà dans la 3.^e proposition du paragraphe précédent, $z = \frac{\gamma \pi \Sigma ab}{\sqrt{[\gamma^2 a^2 + 2(gp - s)ab + \pi^2 b^2]}}$.

4.^o Pour construire plus aisément ces deux valeurs, j'ai commencé par exprimer le polynôme qui se trouve dans les dénominateurs des deux, en cette sorte

$$(\gamma a)^2 + 2 \frac{(gp - s)}{\gamma \pi} \gamma a \cdot \pi b + (\pi b)^2,$$

& y substituer, suivant que la Trigonométrie sphérique y autorise, au lieu du coefficient numérique $2 \frac{(gp - s)}{\gamma \pi}$, du

terme du milieu, le double du cosinus S , de l'inclinaison des plans AOC , BOC , ou de l'angle plan $\phi \lambda \psi$ (fig. 14) tracé ci-dessus, vers la fin du paragraphe précédent; d'après quoi ce même polynome m'a évidemment représenté le carré du côté $\phi \psi$, opposé au même angle $\phi \lambda \psi$, dans le triangle rectiligne de même dénomination, & sa racine ce côté même.

5.° Nommant θ ce côté $\phi \psi$ construit ci-dessus, la valeur de z sera $= \frac{\gamma \pi \Sigma ab}{\theta}$; & sa construction se réduira en conséquence à des constructions réitérées de quatrièmes proportionnelles.

6.° Si, pour la construction de x , on tire (fig. 18), dans les faces AOC , BOC , & des points A & B respectivement, sur l'arête OC , de ces deux faces, des perpendiculaires AR , BS , sur la même arête, elles intercepteront évidemment sur OC , à prendre de O , des portions OR , OS , qui seront respectivement, $= ga$ & $= pb$; & si, ayant pris de plus, sur la direction OA , la quantité OB , & sur la direction OB , la quantité OA , on tire des extrémités b & a , auxquelles on aura abouti dans les deux directions, d'autres perpendiculaires bf , ar , sur OC , elles intercepteront semblablement sur cette arête, d'autres portions $= pa$ & $= gb$. Or, portant ensuite la somme $ga + pb$ des premières portions, sur OA jusqu'en e , ou sur OB jusqu'en f , & tirant de l'une à volonté, des extrémités auxquelles on aura abouti, dans l'une des faces AOB , AOC , respectivement, par exemple, de e dans AOB , une nouvelle perpendiculaire sur l'arête opposée, ici eg , sur OB , l'interceptée, à prendre de O jusqu'en g , sur la dernière ligne, représentera $(ga + pb)s$, dont soustrayant $pa + gp$, ou Om , prise égale à cette somme, on aura enfin construit par le résant $= mg$, le coefficient polynome total du numérateur

numérateur de x ; en sorte que désignant ce coefficient par la lettre n , ce qui donnera $x = \frac{nab}{b^2}$, le reste de la construction se réduira, ainsi qu'il est arrivé de la précédente, à de seules constructions successives de quatrièmes proportionnelles; & toutes les parties de construction des valeurs, tant de z que de x , assignées ci-dessus, se trouveront de plus, n'avoir été que très-peu compliquées.

On pourroit du reste trouver d'autres expressions de z , soit en comptant l'abscisse x , à commencer de l'origine C , & non de l'origine O , soit en la prenant sur la direction $\gamma\gamma$, à commencer, tant de A que de B , & tirant, dans ces deux derniers cas, des extrémités des x , les perpendiculaires sur la droite On ; diverses expressions dont les comparaisons donneroient des équations d'où résulteroient peut-être, au moyen de réductions algébriques, des propriétés ultérieures, simples & belles, du tétraèdre; on en concluroit vraisemblablement d'autres non moins curieuses, de la comparaison des perpendiculaires sur les trois paires différentes d'arêtes opposées d'un même tétraèdre; & peut-être en découvreroit-on une plus simple & plus belle encore, en comparant au parallélipède qu'on formeroit sur ces trois perpendiculaires, la solidité du tétraèdre auquel elles se rapporteroient.

La recherche de démonstrations uniquement élémentaires des propriétés curieuses du tétraèdre, que M. de la Grange a données à la fin du Mémoire que j'ai cité de lui, ou celles d'autres analogues, seroient encore des objets dont il pourroit être utile de s'occuper; & pourquoi la solution de ces divers problèmes ou d'autres, que la comparaison des angles solides au centre & à la surface de la sphère, auroit facilitée, ne pourroit-elle pas être de quelque usage dans la solution la meilleure à trouver, du problème important des trois corps.

Mais les mêmes raisons qui m'ont décidé à abandonner à d'autres tous les points que le sujet de mon Mémoire précédent auroit encore offerts à traiter, me déterminent à en faire autant à l'égard de celui-ci.

Mém. 1783.

E e e

*ÉCLAIRCISSEMENTS sur deux endroits du premier des trois
Mémoires précédens.*

LES quatre fractions rapportées, tant dans le corollaire VII, *page 316*, que dans le corollaire XI, *page 327*, ayant toutes pour dénominateurs un même radical pair; les trois premières de la *page 316*, & la première & les deux dernières du haut de la *page 327*, étoient également susceptibles du même signe +, & du même signe —; & nous ne nous sommes bornés à les représenter comme positives, qu'en sous-entendant que le Lecteur appliqueroit aisément nos principes aux cas où elles seroient supposées négatives, lesquels ne produiroient dans nos conclusions, que des changemens de certains nombres de degrés, en d'autres $>$ ou $<$ de 90° ou de 180° .

Nous pouvions d'ailleurs prendre aussi-bien les deux premières fractions de la *page 316*, & les deux dernières du haut de la *page 327*, pour sinus que pour cosinus des deux parties des nombres de degrés cherchés à chacune de ces deux pages; & en les prenant de préférence pour cosinus, nous avons eu principalement pour objet, d'introduire dans nos solutions, des sinus négatifs, ainsi que des positifs, ou des arcs plus grands que 180° , ainsi que de plus petits; chose dont nous avons annoncé à la fin de l'observation sur notre deuxième demande, devoir donner des exemples; mais ayant réfléchi depuis l'impression de ces Mémoires, que la supposition contraire auroit pu être plus du goût des Lecteurs, en ce que n'admettant que des sinus positifs, elle auroit offert d'une manière plus à leur portée, des résultats partiels, au moyen de règles analogues à celles qui sont admises; nous croyons à propos d'observer, qu'il suffira encore pour, obtenir ces derniers résultats, de prendre pour sinus des parties des nombres de degrés cherchés, les mêmes expressions que nous en avons adoptées préférablement pour cosinus, & réciproquement.

Ces remarques enfin doivent s'étendre des corollaires septième & onzième, aux huitième & douzième.

Errata du même premier Mémoire.

Page 316, depuis la ligne 6, *et pages 307 et 308*, arcs ou angles; *rayez* ou angles.
Page 328, au lieu de $\Gamma\Phi\Gamma\psi$, *lisez* $\Gamma\Phi\Gamma\varsigma$; & au lieu de $\Gamma\Phi\Gamma\varsigma$, *lisez* $\Gamma\Phi\Gamma\psi$.



Fig. 1.

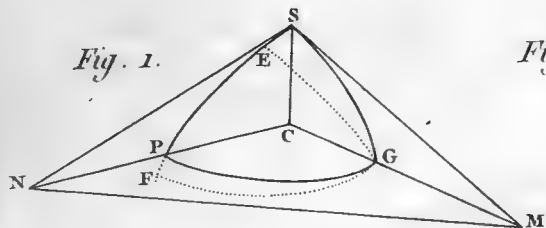


Fig. 2.

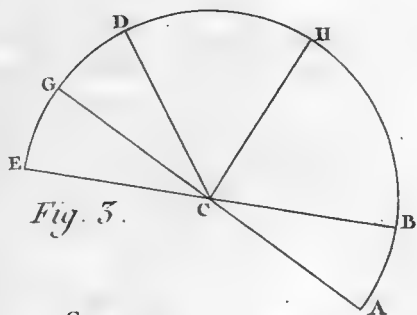
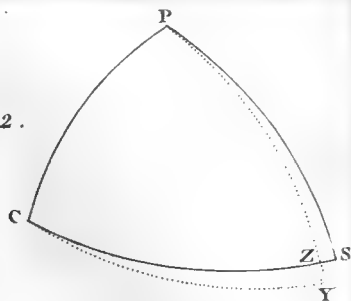


Fig. 3.

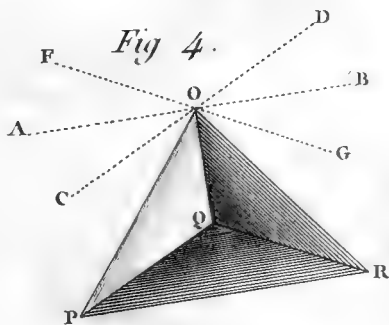


Fig. 4.

Fig. 5.

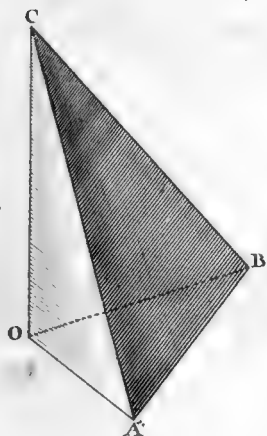
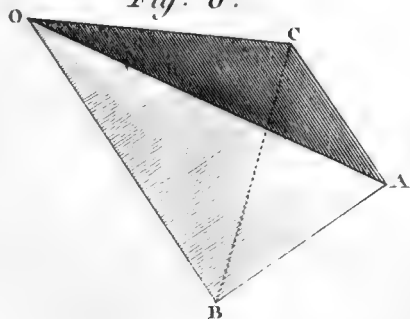
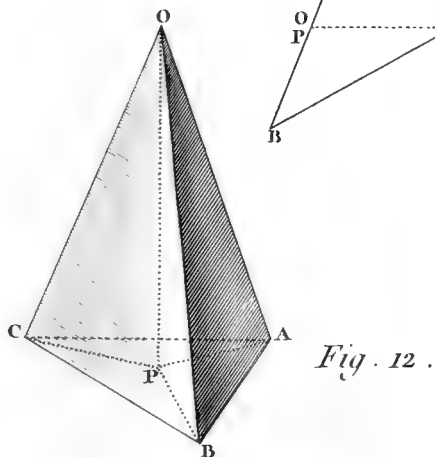
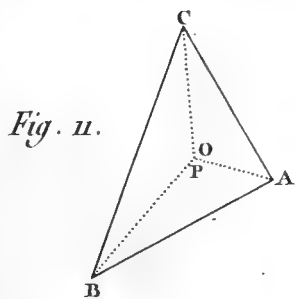
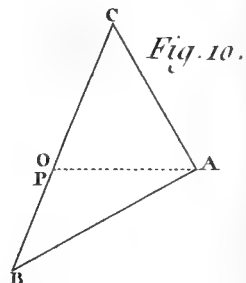
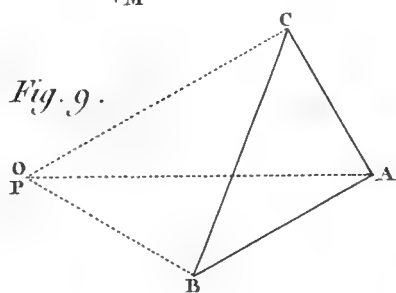
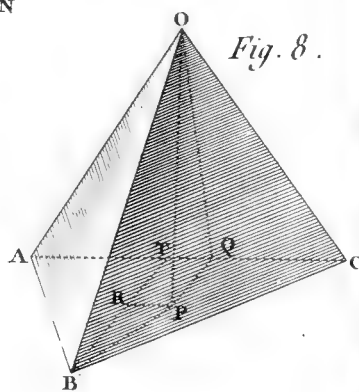
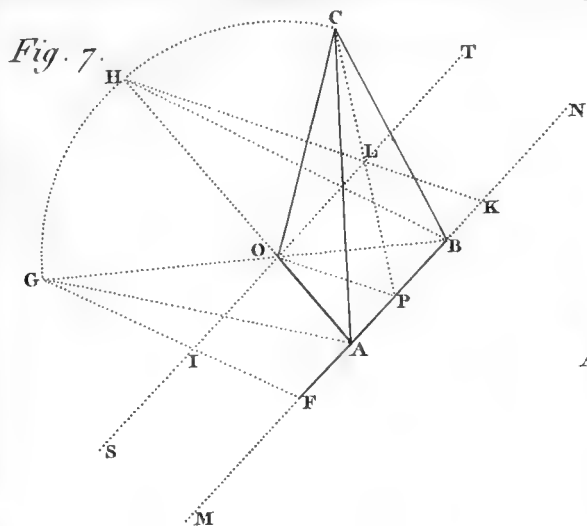


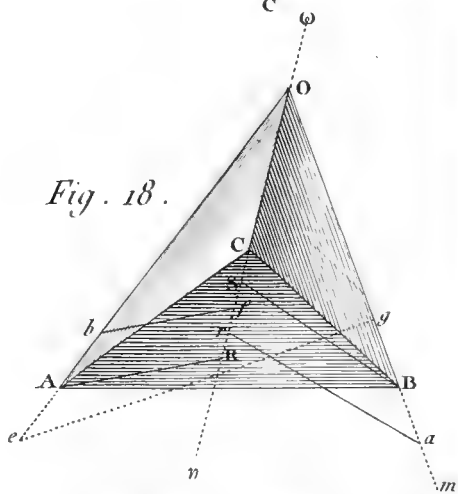
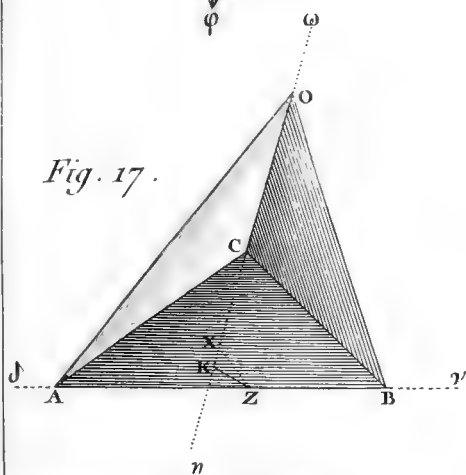
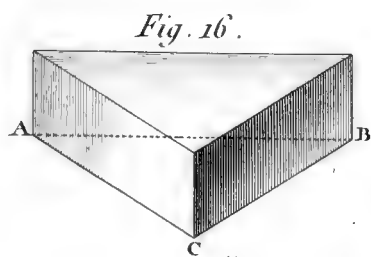
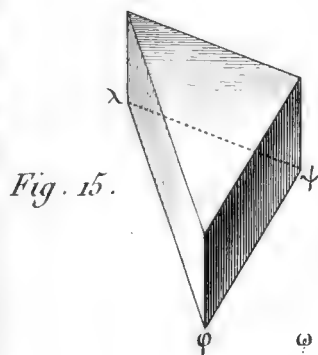
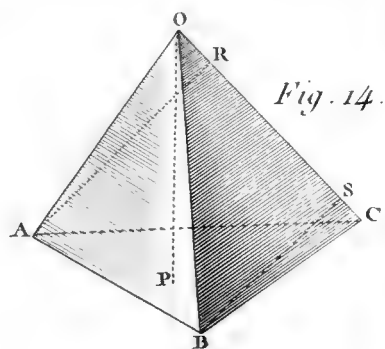
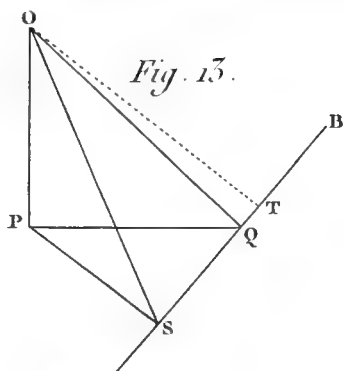
Fig. 6.













*M É M O I R E**S U R L A**DIFFÉRENCE DU VINAIGRE RADICAL
ET DE L'ACIDE ACÉTEUX.*

Par M. BERTHOLLET.

PLUSEURS Chimistes, & en particulier M. de Laffone, ont observé que le vinaigre radical avoit beaucoup plus d'action que le vinaigre distillé le plus concentré, mais l'on a attribué cette propriété à un plus grand degré de pureté & de concentration; j'ai examiné s'il n'y avoit pas des différences réelles entre ces deux liqueurs, & à quoi pouvoient tenir ces différences. La pesanteur spécifique d'un vinaigre distillé très-concentré par la gelée, & que M. Vandermonde a eu la bonté de déterminer, étoit à celle de l'eau distillée, comme 1,0178 à 1,0000; & celle du vinaigre radical qui a servi à mes expériences, comme 1,0404: il seroit peut-être possible de donner un plus grand degré de concentration au vinaigre distillé, mais il ne paroît pas qu'on pût l'amener au degré du vinaigre radical.

J'ai étendu d'eau distillée le vinaigre radical, & je lui ai donné, par le moyen d'un pèse-liqueur, la même pesanteur spécifique qu'au vinaigre distillé; malgré cet affoiblissement, j'ai trouvé dans le vinaigre radical, un piquant de saveur & d'odeur qui le faisoit distinguer facilement du vinaigre distillé.

M. de Laffone avoit observé que le vinaigre radical cristallisoit avec l'alkali volatil; j'ai fait la même observation sur l'alkali fixe végétal: le sel qui résulte de cette combinaison, forme des aiguilles aplaties & transparentes appliquées les unes aux autres, & flexibles comme celles du sel ammoniac: ce sel attire lentement l'humidité, & se résout en liqueur

si on le laisse exposé à l'air; il se dissout dans l'esprit-de-vin comme la terre foliée de tartre.

J'ai saturé trois gros d'alkali végétal cristallisé de vinaigre radical, & trois gros du même alkali de vinaigre distillé; j'ai mis l'une & l'autre combinaisons dans des capsules semblables sur le même bain de sable, & je les ai fait évaporer jusqu'à siccité; du point de cristallisation à celui de siccité, le sel radical perd beaucoup d'eau.

Le sel acéteux a pesé trois gros moins dix-huit grains, le sel radical a pesé trois gros; le premier a verdi le sirop violat; le second ne l'a point altéré, & même il faut qu'il éprouve un degré de feu assez considérable pour qu'il abandonne une partie de son acide. Il est dans cet état beaucoup plus blanc que le premier; il a une saveur beaucoup moins âcre, il cristallise sans difficulté si on lui rend de l'eau.

J'ai versé de l'acide radical sur le sel acéteux, la dissolution s'en est faite promptement, il s'en est séparé un dépôt brun; j'ai décanté la liqueur, & je l'ai fait un peu évaporer; il s'est formé, par le refroidissement, des cristaux parfaitement semblables à ceux que j'avois formés immédiatement par la combinaison de l'alkali & de l'acide radical, ils étoient seulement un peu jaunes; l'odeur qui s'exhaloit pendant l'évaporation, étoit celle de l'acide acéteux sans mélange de celle d'acide radical.

J'ai fait la même opération en retenant l'acide qui se dégageoit: j'ai mis pour cela deux onces de terre foliée dans une petite cornue, avec une once d'acide radical & une once d'eau; & j'ai distillé à une légère chaleur, jusqu'à ce que j'aie aperçu dans le récipient, environ une once de liqueur. J'ai saturé cette liqueur d'alkali; j'ai fait évaporer cette combinaison qui s'est trouvée de la véritable terre foliée de tartre.

La liqueur qui étoit restée dans la cornue, étoit d'un jaune foncé, il s'y est même fait un dépôt charbonneux, ce qui dépendoit sans doute d'une partie du vinaigre qui se décompose & se réduit en charbon dans la dessiccation trop forte de la terre foliée de tartre.

Ces expériences me paroissent prouver que l'acide radical a des différences essentielles qui le distinguent de l'acide acéteux, qu'il a avec les alkalis une affinité supérieure, qu'il forme avec eux une combinaison plus parfaite, & qu'il résiste mieux à l'action de la chaleur; je vais tâcher de déterminer comment l'acide acéteux peut acquérir ces propriétés, lorsqu'il se convertit en vinaigre radical.

Le cuivre ne se dissout dans l'acide acéteux qu'en se réduisant en chaux; de-là vient la difficulté qu'on a de dissoudre immédiatement ce métal dans cet acide, mais si l'on prend la chaux ou un précipité de cuivre, tel que le précipité du vitriol bleu par l'alkali fixe, la combinaison se fait très-facilement, & l'on a par ce moyen un sel parfaitement semblable aux cristaux de verdet. M. Monnet a fait cette combinaison avant moi; ce savant Chimiste attribue la dissolution qui se fait par les manipulations dont on se sert pour former ce sel, à une espèce de fermentation qu'excite, selon lui, l'acide du vinaigre dans les parties de ce métal, fermentation qui divise les parties métalliques, & les met en état d'être dissoutes ensuite facilement. *Traité de la dissolution des Métaux, page 112.*

Mais puisqu'on fait immédiatement avec la chaux de cuivre un sel acéteux, c'est l'état métallique qui s'oppose à la dissolution du cuivre dans les opérations dont on se sert pour faire le verdet, & dont on a ignoré l'éthiologie jusqu'à présent; on réduit le cuivre dans l'état de chaux dans lequel seulement il est dissoluble dans les acides végétaux. Pour confirmer cette théorie, & pour établir d'une façon positive la nature du vert-de-gris ou verdet, dont la fabrication se fait à Montpellier, & dont il se fait un assez grand usage dans les Arts, j'ai fait bouillir dans de l'eau distillée une once de cette substance, & j'ai séparé par le filtre la partie qui étoit dissoute de celle qui ne l'étoit pas, la dernière a pesé, après la dessiccation, près de 2 gros, elle s'est dissoute dans l'acide nitreux sans dégager de gaz nitreux; c'étoit une chaux de cuivre d'une couleur noire, & semblable à celle du départ de l'argent dont je parlerai plus bas.

La partie qui s'est dissoute a donné, par l'évaporation, des cristaux absolument semblables à ceux que m'a donné une dissolution acéteuse de chaux de cuivre, & de la même nature que les cristaux de verdet.

Le verdet est donc composé d'environ trois quarts de sel de cuivre acéteux & d'un quart de chaux de cuivre.

Lors donc qu'on le dissout dans le vinaigre distillé pour former les cristaux de verdet qu'on appelle improprement *verdet distillé*, on ne fait que donner l'eau nécessaire à la cristallisation de la partie saline, & l'on réduit, par le moyen du vinaigre, en sel acéteux, celle qui étoit en chaux.

3 gros 10 grains de précipité de la dissolution nitreuse du cuivre par l'alkali fixe effervescent, m'ont donné 5 gros 24 grains de sel cuivreux; mais il faut soustraire du poids de la chaux de cuivre, un peu d'acide crayeux qui s'en dégage pendant sa dissolution. Lorsqu'on distille les cristaux de verdet pour en retirer le vinaigre radical, le résidu cuivreux ne se trouve plus dans l'état de chaux, il refuse de se dissoudre dans l'acide acéteux concentré, quoique l'état de division où il est, égale celle du précipité; il donne du gaz nitreux avec l'acide nitreux; enfin il jouit des propriétés métalliques. Il a donc reçu du phlogistique de l'acide acéteux; & en même temps il a perdu le principe aérien qui se trouve dans les chaux métalliques; mais il ne peut devoir le phlogistique au charbon d'une partie de l'acide acéteux qui se décompose dans cette opération, & qu'on peut séparer en dissolvant le résidu dans de l'acide nitreux, car la revivification de la chaux de cuivre ne se fait pas sans fusion; j'en ai mêlé avec du charbon, & j'ai tenu ce mélange à une chaleur beaucoup plus forte que celle que l'on emploie dans la distillation des cristaux de verdet, sans qu'elle ait pris les propriétés métalliques (a).

Il paroît donc que lorsqu'on forme l'acide radical dans la

(a) Je reviens à cet objet dans un Mémoire sur l'eau regale, que j'ai lu le 25 Avril 1785.

Distillation des cristaux de verdet, il se fait un échange entre la chaux de cuivre & l'acide acéteux, que celui-ci donne du phlogistique à la chaux de cuivre, qu'il en reçoit du principe aérien; & que par-là ses propriétés acides se trouvent rehaussées.

Puisque le sel cuivreux qui constitue le verdet, est une combinaison de chaux de cuivre & d'acide acéteux, on pourroit abandonner les longs procédés qu'on emploie pour le former, & qui tendent à réduire par l'action combinée de l'air & de l'acide acéteux, les lames de cuivre en chaux soluble dans cet acide. On pourroit employer, outre le précipité du vitriol bleu, des chaux de cuivre que l'on forme dans d'autres Arts, telle que la chaux du cuivre qui a servi à la précipitation de l'argent dans l'opération du départ, & dont on a retiré l'acide nitreux par la distillation. On pourroit même se servir des mines de cuivre en chaux, pourvu toutefois qu'elles se trouvassent dans un assez grand degré de pureté. Il est probable que le verdet qu'on auroit par-là à bas prix, seroit préférable à celui dont on fait usage, parce que ce dernier contient, comme on l'a vu, une partie de chaux de cuivre qui n'est pas dans l'état salin. On peut aussi se passer de cristaux de verdet pour faire l'acide radical, & se contenter, comme je l'ai éprouvé, de mettre de la chaux de cuivre dans du vinaigre distillé, de faire évaporer la combinaison qui se forme, jusqu'à une dessiccation convenable, & de la soumettre alors à la distillation.



M É M O I R E

SUR LA

PRÉPARATION DE L'ALKALI CAUSTIQUE,

Sa cristallisation, & son action sur l'Esprit-de-vin.

Par M. BERTHOLLET.

Plus la Chimie acquiert de précision dans ses recherches, plus elle doit s'occuper à se procurer des agens, dont les propriétés ne soient point modifiées par des mélanges étrangers. L'alkali caustique est un de ceux dont on fait le plus d'usage, mais tel qu'il a été employé jusqu'à présent, il contient une portion d'alkali effervescent, de la terre calcaire, & ordinairement du fer & de la terre siliceuse.

J'avois imaginé, dans un Mémoire que je lus à l'Académie au mois de Février 1778, qu'en distillant dans une cornue de verre une solution d'alkali rendue caustique par suffisante quantité de chaux, & filtrée, on auroit un alkali caustique pur, parce que je supposois que ce qui empêchoit de l'obtenir tel, lorsqu'il étoit préparé à la manière ordinaire, n'étoit que l'acide crayeux que lui rendoit, dans l'évaporation, l'air atmosphérique avec lequel il se trouvoit en contact, mais quoique par ce moyen l'alkali soit plus caustique, il est cependant bien loin d'être dans l'état de pureté.

L'on fait que l'esprit-de-vin dissout l'alkali caustique, mais l'on n'a observé qu'imparfaitement les propriétés de cette dissolution; j'ai pensé que l'alkali devoit s'y trouver dégagé des autres principes sur lesquels s'étoit exercée son action dissolvante, & de cette idée j'ai été conduit aux observations suivantes.

J'ai préparé une lessive caustique avec du sel de tartre
&

& de la chaux dans un vaisseau de fer, je l'ai filtrée & je l'ai fait évaporer : quand elle a été rapprochée au point de prendre un peu de consistance, je l'ai mêlée avec de l'esprit-de-vin, & j'ai retiré une partie de cette liqueur par la distillation; la cornue étant refroidie, j'ai trouvé au fond, des cristaux bien formés, mêlés à une terre noirâtre, dans un peu de liqueur d'une couleur foncée qui étoit séparée de la teinture d'alkali caustique; celle-ci furnageoit comme une huile.

Les cristaux étoient de l'alkali saturé d'acide crayeux, la terre étoit composée d'une quantité assez considérable de terre calcaire, d'un peu de terre siliceuse & d'un peu de fer.

L'alkali effervescent avoit été séparé, parce que ce sel est insoluble dans l'esprit-de-vin; la liqueur dans laquelle il étoit cristallisé, étoit de l'eau saturée du même sel, & par-là immiscible à l'esprit-de-vin : la terre siliceuse du dépôt étoit fournie par le sel de tartre qui en contient une certaine quantité, lorsqu'il n'a pas été préparé avec des soins particuliers, comme M. Bergman l'a observé; la terre calcaire s'étoit combinée avec l'alkali caustique dans sa préparation, parce qu'aussitôt qu'il est privé d'acide crayeux, il tend fortement à se combiner avec d'autres substances; cette terre est précipitée dans la liqueur aqueuse, sous la forme effervescente, en raison de l'affinité supérieure qu'elle a avec l'acide crayeux, relativement à celle que l'alkali a avec ce même acide. Les parties de fer étoient dûes au vaisseau dans lequel s'étoit faite la préparation : une partie de ce fer s'est trouvée soluble dans l'acide acéteux, mais l'autre partie n'a pu se dissoudre que dans l'acide marin, & étoit par conséquent dans un état de chaux parfaite, je l'ai précipité de ces acides par l'alkali prussien : telles sont les parties étrangères que l'alkali caustique a abandonnées en s'unissant à l'esprit-de-vin. Je vais examiner à présent cette dissolution.

Elle ne faisoit point effervescence avec les acides, & elle ne précipitoit pas l'eau de chaux, mais elle ne résistoit pas à une épreuve plus délicate; elle troubloit la dissolution de

terre pesante par l'acide marin, & elle y formoit un petit précipité effervescent, de sorte qu'elle contenoit encore une petite portion d'acide crayeux : j'en continuai la distillation, & je la suspendis, lorsqu'une partie de l'esprit-de-vin eut passé dans le recipient : je trouvai alors la liqueur de la cornue divisée en deux portions, dont l'une furnageoit & avoit l'apparence d'une huile jaune qui demouroit constamment séparée, même après une forte agitation ; je séparai ces deux portions, la supérieure ne donnoit plus aucun indice d'acide crayeux, elle précipitoit à la vérité l'eau de chaux, mais ce précipité se redissolvoit dans l'eau, ce qui prouve que la chaux avoit été séparée de l'eau par l'esprit-de-vin, & non précipitée en terre calcaire effervescente par l'acide crayeux ; & effectivement, en mêlant la dissolution alkaline avec une certaine quantité d'eau, elle ne précipitoit plus l'eau de chaux ; cette liqueur étendue d'eau distillée, ne troubloit plus la dissolution de terre pesante ; lorsqu'elle étoit pure elle y formoit un précipité, mais il se redissolvoit entièrement dans l'eau distillée, de sorte que dans cette occasion c'est le sel de terre pesante qui est séparé de l'eau qui le tenoit en dissolution, & non la terre pesante qui est précipitée de son acide. L'on voit par-là, que l'alkali caustique a plus d'affinité avec l'eau que la chaux, & le sel muriatique de terre pesante.

Je fis évaporer la liqueur dont je viens de parler, dans un petit matras : sa couleur se fonçoit de plus en plus ; j'en arrêtai l'évaporation, dans le dessein d'examiner les changemens qui y étoient survenus. Le lendemain, je trouvai des cristaux très-transparens mêlés à un peu de liqueur d'un jaune-foncé que j'en séparai, je les examinai, & je trouvai que c'étoit l'alkali caustique pur qui avoit pris cette forme.

Ces cristaux prennent différentes figures, ils sont quelquefois en aiguilles, le plus ordinairement lamelleux ; mais l'on reconnoît dans ceux qui sont isolés, qu'ils sont formés de petites pyramides quadrangulaires implantées les unes sur les autres ; alors ils ressemblent assez aux cristaux de sel ammoniac ; ils se résolvent promptement en liqueur à l'air, ils

se dissolvent facilement dans l'eau & dans l'esprit-de-vin, on peut, en évaporant ce dernier, les ramener à l'état de cristaux, ils produisent du froid en se dissolvant comme ceux des autres sels.

La liqueur inférieure précipitoit la terre pesante : je l'ai fait évaporer, elle a également cristallisé, mais d'une façon moins régulière, & les cristaux paroissent moins purs; si l'on distille cette liqueur, c'est de l'eau qui passe pour la plus grande partie dans le récipient, sur-tout sur la fin.

J'ai dissous les premiers cristaux d'alkali caustique dans l'esprit-de-vin, la liqueur étoit claire & sans couleur, je l'ai fait bouillir, elle est devenue d'un jaune d'autant plus foncé que l'ébullition a été plus longue, à un certain degré elle ressembloit entièrement à la liqueur jaune dans laquelle l'alkali caustique avoit cristallisé; après une longue ébullition, elle n'a pu cristalliser, l'ayant évaporé jusque près de la dessiccation, & y ayant mêlé de l'eau distillée, il s'en est séparé des molécules d'un jaune-brun, & qui ne se redissolvoient qu'en partie dans l'esprit-de-vin.

Si l'on distille à siccité la dissolution caustique qui a l'apparence d'huile, elle devient noirâtre & effervescente, mais si les cristaux sont purs, ils ne prennent ni cette couleur ni la propriété de faire effervescence; il est vrai cependant que dans cet état l'alkali a tant d'activité, qu'il n'est pas possible de le priver de la liqueur qu'avoient retenue ses cristaux, sans qu'il attaque la cornue si elle est de verre, & alors il fait une gelée avec les acides.

L'esprit-de-vin qu'on distille avec l'alkali caustique, entraîne un peu avec lui, & verdit le sirop violat; il paroît en même temps devenir plus aqueux qu'il n'étoit.

Il résulte des expériences précédentes, 1.^o que lorsqu'on mêle une lessive caustique avec l'esprit-de-vin, celui-ci s'empare de l'alkali caustique, que cette dissolution retient une partie de l'eau, & par son moyen une partie d'alkali effervescent, & que l'autre partie de l'eau se sépare & tient en dissolution la plus grande partie de l'alkali effervescent,

ainsi que les sels étrangers qui auroient pu s'y trouver mêlés, pendant que les terres & le fer se précipitent.

2.^o Qu'il se fait dans la solution d'alkali caustique, en la concentrant par la distillation, une nouvelle séparation, que la liqueur qui surnage est une solution d'alkali très-pur dans l'esprit-de-vin, & que la liqueur inférieure est un mélange de cette dissolution avec une dissolution aqueuse d'un peu d'alkali effervescent; cependant, si l'on distille la première liqueur, il s'y fait encore une séparation, & il paroît que l'alkali dégage de l'eau de l'esprit-de-vin. Si l'on distille la liqueur inférieure, c'est de l'eau qui passe pour la plus grande partie dans le récipient.

3.^o Que l'alkali caustique décompose, par le moyen de la chaleur, l'esprit-de-vin, & qu'il en sépare une partie que j'appellerai *réjuncuse*, quoique j'en connoisse peu les propriétés; c'est cette partie qui colore la teinture d'alkali caustique, & c'est probablement elle qui a formé les cristaux d'acide saccharin que M. Bergman a retirés, en traitant l'esprit-de-vin avec l'acide nitreux.

4.^o Que l'alkali caustique privé d'eau par l'esprit-de-vin, prend une forme cristalline, comme la plupart des autres substances salines. Il est assez difficile d'avoir immédiatement ses cristaux, sans que leur pureté soit ternie par une portion de la résine: on peut les purifier par une nouvelle dissolution dans l'esprit-de-vin, & par une évaporation conduite de manière qu'il reste un peu d'eau-mère; mais pour les expériences, dont une très-petite portion de substance résineuse ne peut troubler la précision, on peut se servir de la liqueur qui a l'apparence d'huile, sans se donner la peine de la faire cristalliser. J'ai manqué assez souvent cette cristallisation, parce qu'elle n'est point annoncée par une pellicule, ni par les autres qualités de la liqueur.

Si l'on varie les circonstances de l'opération, l'on trouve aussi quelques variétés dans les apparences de la dissolution; ainsi, si l'on verse peu d'esprit-de-vin sur la lessive caustique amenée au point de dessiccation, cet esprit-de-vin prend une

couleur plus foncée, & il ne s'y fait de séparation de deux liqueurs qu'au moment où la cristallisation va commencer.

Meyer a observé une partie des phénomènes que je viens de décrire, mais le *causticum pingue* dont cet excellent Observateur étoit préoccupé, l'a empêché de bien voir ce qui se présente à lui; il a pris, par exemple, l'alkali saturé d'acide crayeux & cristallisé, pour un nitre imparfait, il a observé la teinture caustique que nous avons vu prendre une apparence d'huile, & il l'a décrite comme une matière épaisse rouge-obscur, qui a l'apparence d'une résine à demi-fluide, qu'il regarde comme formée par la décomposition totale de l'esprit-de-vin.

Une observation intéressante de Meyer, que j'ai vérifiée, c'est que si l'on met des fleurs de soufre dans la teinture alkaline, il s'en dissout promptement une partie considérable sans le secours de la chaleur.

M. Macquer a observé, avec encore plus d'exactitude, les phénomènes que présente l'alkali fixe qu'on traite avec l'esprit-de-vin, & il les a décrits dans un Mémoire imprimé dans le cinquième *Volume des mélanges de la Société de Turin*; après avoir fait bouillir de l'esprit-de-vin sur du sel de tartre fortement desséché, il en a fait évaporer une partie, & il en a obtenu des cristaux dont il décrit la figure, & qui sont précisément des cristaux d'alkali caustique; l'alkali qui s'étoit dissous par l'action de la chaleur, au-dessous de l'esprit-de-vin, s'est coagulé par le refroidissement en une masse blanche saline cristallisée confusément, qu'il a redissout dans l'eau, & dont il a obtenu une cristallisation plus régulière.

Il a fait évaporer une préparation, nommée en Pharmacie, *Teinture de sel de tartre*, & qui n'est qu'une dissolution d'alkali caustique dans l'esprit-de-vin; après que la liqueur a été évaporée à peu-près aux trois quarts, il a observé qu'elle paroïtoit un mélange de deux liqueurs très-différentes & très-distinctes; l'une sans couleur, comme de l'eau, & l'autre d'un jaune-foncé qu'il compare à une huile; après l'évaporation totale, il est resté dans la capsule un enduit d'un jaune-brun cristallisé confusément. Mais cet illustre Chimiste explique

tous les faits qu'il avoit observés, par une altération & une décomposition réciproque de l'esprit-de-vin & de l'alkali fixe.

Des deux cristallisations qu'il a obtenues, l'une étoit la partie caustique du sel de tartre qui s'étoit dissoute dans l'esprit-de-vin, & l'autre l'alkali saturé d'acide crayeux qui avoit été séparé de la partie caustique; la première s'est faite par le moyen de l'esprit-de-vin, & la seconde par le moyen de l'eau.

J'ai cru qu'on pourroit, par l'esprit-de-vin, se procurer en même temps une teinture caustique & de l'alkali saturé d'acide crayeux, mais jusqu'à présent l'expérience ne m'a réussi qu'imparfaitement. L'alkali sur lequel on a fait bouillir de l'esprit-de-vin, dissous après cela dans l'eau, cristallise effectivement d'une façon régulière; mais les cristaux exposés à l'air, tombent en déliquescence, parce qu'ils retiennent une portion d'alkali caustique dont je n'ai pu les priver, même en les faisant bouillir une seconde fois dans l'esprit-de-vin (a).

Si c'est un moyen de diminuer les incertitudes de la Médecine, que d'employer des agens uniformes & dont on puisse apprécier exactement les effets généraux, on pourra faire une application utile des observations que je viens de présenter, en substituant une teinture caustique, dont la force déterminée par un aréomètre, seroit constante, à la teinture des métaux ou *lilium de Paracelse*, à la teinture de régule d'antimoine, à celle d'antimoine diaphorétique, à celle de tartre, & à plusieurs autres préparations pharmaceutiques dont les noms ont souvent induit en erreur les Praticiens qui ont cru satisfaire par leur moyen à différentes indications: quoique toutes ces teintures ne soient, dans la réalité, qu'une dissolution d'alkali caustique par l'esprit-de-vin, plus ou moins chargée, selon le procédé & selon les circonstances inégales

(a) Je n'ai parlé jusqu'à présent que de l'alkali végétal; j'ai tenté pareillement de faire cristalliser, par l'esprit-de-vin, l'alkali minéral caustique, mais cette opération réussit beaucoup plus difficilement, la sépa-

ration des deux liqueurs ne se fait que sur la fin de l'évaporation, celle qui prend l'apparence d'huile est proportionnellement en beaucoup plus petite quantité, & je n'en ai obtenu qu'une cristallisation confuse.

de l'opération. Il me paroît qu'on doit attribuer peu d'effets à la résine séparée de l'esprit-de-vin qui colore ces teintures, que M.^{rs} Macquer, Spielman & Meyer ont vue se déposer sur les parois des vaisseaux dans lesquels on conserve la teinture de tartre (*Spiel. & Boehm exam. acid. ping.*), & à laquelle M. Monnet a attribué toutes les propriétés médicales du *lilium de Paracelse* (*Journal de Médecine*, 1764).

Il seroit peut-être avantageux de substituer encore la teinture alkaline, rapprochée à un point déterminé, à la pierre à cautère, qui a dissout plus ou moins du creuset, dans lequel on l'a fondue, & qui est plus ou moins effervescente : on pourroit modérer à volonté la causticité très-grande de cette teinture, par différentes proportions d'argile.

J'ai essayé sur d'autres sels déliquesceus, le moyen dont je me suis servi pour faire cristalliser l'alkali caustique ; & j'ai obtenu facilement la cristallisation de quelques-uns de ces sels : par exemple, j'ai saturé de terre calcaire l'acide nitreux, j'ai fait évaporer jusqu'à siccité, le résidu dissous dans l'esprit-de-vin & évaporé jusqu'au point convenable, m'a donné des cristaux réguliers qui forment une prisme tétraèdre, dont deux faces paroissent divisées par un sillon, & terminé par deux sommets dièdres : le sel muriatique calcaire, traité de même, a cristallisé en aiguilles fines transparentes, & qui paroissent pyramidales, il tombe plus promptement en déliquescence que le nitre calcaire ; le sel muriatique de fer donne, par ce moyen, des cristaux jaunes & transparens, ce sont des prismes tétraèdres dont les bales sont inclinées.

Cependant tous les sels déliquesceus ne cristallisent pas par ce procédé ; ainsi je n'ai pu faire cristalliser la terre soliée de tartre, elle s'est seulement coagulée en formant des couches peu distinctes & qu'on ne peut regarder comme le résultat de la cristallisation. La différence que j'ai établie entre le sel formé avec l'alkali fixe & les acides acéteux & radical, *page 403*, est donc confirmée par cette épreuve : je n'ai pu pareillement obtenir des cristaux de la dissolution muriatique du zinc.



NOUVELLES RÉFLEXIONS

*Sur l'augmentation de poids qu'acquièrent, en brûlant,
le Soufre & le Phosphore ; & sur la cause
à laquelle on doit l'attribuer.*

Par M. LAVOISIER.

LORSQU'ON brûle du phosphore dans une quantité d'air vital renfermée par du mercure, il y a pendant la combustion une absorption considérable de cet air, & on retrouve dans l'acide phosphorique qui s'est formé, une augmentation de poids fort exactement correspondante à la quantité d'air vital qui a été absorbée.

Si l'air vital qu'on a employé étoit parfaitement pur, la portion qui reste après la combustion est encore à peu-près du même degré de pureté qu'auparavant ; & si on laisse condenser les vapeurs acides qui se sont formées, on peut y brûler une nouvelle quantité de phosphore, & ainsi successivement jusqu'à ce que la totalité de l'air vital ait disparu.

J'ai conclu de ces expériences, dans différens Mémoires imprimés dans les Recueils de 1776, 1777 & 1778, que dans l'acte de la combustion il se combinait une portion considérable d'air vital avec le phosphore, que ce principe devenoit une partie constituante de l'acide phosphorique, & que c'étoit principalement & peut-être uniquement à lui qu'il devoit sa qualité acide.

M. Bergman, dans une nouvelle édition de son Mémoire sur les Attractions électives, qu'il a inséré dans le troisième volume de ses Opuscules, cite les expériences que je viens de rapporter, mais il combat les conséquences que j'en ai tirées ; il convient bien que le phosphore, ainsi que le soufre & plusieurs autres substances, acquièrent du poids en brûlant ;
mais

mais il observe en même temps que la chaleur spécifique des acides qui se sont formés, est plus grande que n'étoit celle du phosphore, & en général de la substance brûlée, & c'est à cette augmentation de chaleur spécifique qu'il attribue l'augmentation de poids qu'on observe.

À l'égard de la diminution qui a lieu dans la quantité d'air vital dans lequel s'opère la combustion, il l'attribue, avec M. Schéele, à la combinaison qui s'est faite de l'air vital avec le phlogistique pour former la chaleur.

Je ferai d'abord remarquer que M. Bergman, en paroissant s'éloigner de mon opinion, se trouve cependant forcé de l'adopter en partie. En effet, j'attribue l'augmentation de poids qu'acquiert le phosphore en brûlant, à l'absorption & à la fixation de l'air vital; M. Bergman au contraire l'attribue à la fixation de la chaleur : or, puisque dans le système de M. Bergman l'air vital est un des élémens du principe de la chaleur, mon assertion est implicitement contenue dans la sienne. Il n'est donc plus question entre nous de discuter si l'air vital se fixe dans les acides pendant leur combustion, puisque nous sommes d'accord sur ce point, mais s'il se combine auparavant avec le phlogistique pour se changer en chaleur.

La question ramenée à ce point de simplicité, m'a paru susceptible d'être terminée par des expériences décisives : d'abord, en supposant même avec M. Bergman, qu'une portion de chaleur spécifique se fixe dans l'acide phosphorique pendant la combustion du phosphore, on ne peut se dispenser de convenir avec M. Schéele, qu'une portion très-considérable de cette même chaleur se dissipe & s'échappe à travers les pores des vaisseaux : le témoignage des sens suffit seul pour établir cette vérité; nous avons d'ailleurs fait voir, M. de la Place & moi, dans un Mémoire lu à l'Académie, & imprimé dans le Recueil de 1780, comment il étoit possible de retenir cette chaleur, & d'en mesurer la quantité par le poids de la glace qu'elle peut fondre; nous avons reconnu que celle qui s'échappe d'une once de phosphore qui brûle,

Mém. 1783.

Ggg

pouvoit fondre 6 livres 4 onces 0 gros 48 grains de glace.

Mais si l'on admettoit, avec M. Bergman, que la chaleur a une pesanteur appréciable & sensible, comme on est forcé de convenir qu'une partie s'échappe à travers les pores des vaisseaux pendant la combustion, il s'ensuivroit, par une conséquence nécessaire, qu'en opérant une combustion de soufre & de phosphore dans des vaisseaux scellés hermétiquement, on devroit observer une diminution de poids à mesure que la chaleur se dégage & se met en équilibre avec les corps environnans. Si donc l'expérience & l'observation démentent cette conséquence, il faudra en conclure que le principe dont elle a été déduite est faux : c'est cette vérification du principe par la conséquence que j'ai eu en vue dans l'expérience suivante.

J'ai introduit dans un flacon de cristal très-fort, une petite capsule d'agate qui contenoit 6 grains de phosphore ; j'ai bouché très-exactement le vaisseau avec un bouchon de cristal que j'ai ficelé solidement avec du fil de laiton : j'ai pesé le tout avec une grande exactitude, puis j'ai allumé le phosphore par le moyen des rayons du soleil, avec une petite lentille de verre : lorsque la combustion a été finie & que le vaisseau a été refroidi, je l'ai repesé, & j'ai retrouvé très-exactement le même poids qu'auparavant ; la balance dont je me suis servi trébuchoit très-sensiblement à un quart de grain.

Je prévient ceux qui pourroient se proposer de répéter cette expérience, qu'elle doit être faite avec beaucoup de précautions, qu'on doit employer un vaisseau très-fort & capable de résister à la dilatation de l'air qui est très-considérable ; qu'il faut bien prendre garde qu'il ne s'éclabousse, pendant la combustion, de petits morceaux de phosphore allumé, qui, s'attachant aux parois du vase, le feroient inmanquablement casser, & occasionneroient une explosion dangereuse *.

* On prévient une partie de ce danger, en mettant au fond du flacon un peu de sablon très-pur & très-sec, ou de verre pilé.

Quoique d'après cette expérience il parût suffisamment prouvé que la chaleur n'a pas de pesanteur sensible, j'ai bien conçu que pour avoir un résultat plus satisfaisant, il seroit important d'opérer sur des quantités plus considérables. Le premier moyen qui se présentoit, étoit d'employer des vaisseaux plus grands, & de substituer l'air vital à l'air commun; alors j'aurois pu opérer la combustion d'une quantité beaucoup plus grande de phosphore, & avoir un résultat plus sensible: mais d'un autre côté le risque de l'explosion auroit considérablement augmenté, & l'expérience auroit été très-dangereuse: d'ailleurs, en augmentant la grandeur des vaisseaux, leur poids seroit devenu plus grand; j'aurois été obligé de me servir d'une balance moins sensible, & j'aurois perdu d'un côté plus que je n'aurois gagné de l'autre: j'ai donc été obligé d'adopter un autre plan.

Il résulte des expériences faites par M. de la Place & par moi, que la quantité de chaleur qui se dégage de 92 grains de phosphore qui brûle, est capable de faire fondre juste une livre de glace; ainsi la différence de chaleur qui se trouve entre une livre de glace à zéro du thermomètre, & une livre d'eau également à zéro, est égale à celle qui se dégage de 92 grains de phosphore qui brûle; donc par une conséquence nécessaire, si la chaleur avoit une pesanteur appréciable, en enfermant une livre d'eau dans un vaisseau de verre scellé hermétiquement, & en la faisant geler, j'aurois dû obtenir une diminution de poids égale à celle que j'aurois éprouvée en brûlant 92 grains de phosphore.

Pour vérifier ce fait, j'ai pris de petits matras de verre très-minces, dont j'ai tiré le col à la lampe d'émailleux, pour le réduire en un tube très-fin; j'y ai introduit une livre d'eau, puis j'ai fondu avec un chalumeau l'extrémité du tube, pour sceller hermétiquement le vaisseau; j'ai ensuite pesé avec une scrupuleuse exactitude le vase & l'eau qu'il contenoit: je me suis servi à cet effet d'une balance de Meignié, qui, chargée

de 18 à 20 onces, trébuche au dixième de grain. Ce poids bien déterminé, j'ai fait geler l'eau du matras en le plaçant dans un bain de sel & de glace, puis l'ayant repesé bien sec en dehors, j'ai retrouvé exactement le même poids qu'auparavant : ayant refondu & reformé la glace à plusieurs reprises, je n'ai pas éprouvé la plus légère différence de poids, soit que je la pesasse dans l'état d'eau, soit que je la pesasse dans l'état de glace.

Puisque d'après l'exactitude de ma balance, je puis répondre des pesées à un dixième de grain près, il en résulte que la chaleur qui se dégage d'une livre d'eau à zéro, lorsqu'elle se convertit en glace, ou ce qui est la même chose, que la quantité de chaleur qui se dégage de 92 grains de phosphore qui brûle, ne pèse pas un dixième de grain, & que par conséquent la matière de la chaleur peut être considérée comme n'ayant pas de pesanteur sensible dans les expériences de Chimie.

Il est vrai que dans cette expérience on ne pèse que la quantité de chaleur qui se dégage pendant la combustion : M. Bergman pourroit donc encore objecter que la chaleur qui se dégage est infiniment moindre que celle qui se fixe, & qu'il n'est par conséquent pas extraordinaire que sa pesanteur soit au-dessous d'un dixième de grain, tandis que celle qui se fixe pèse beaucoup davantage ; mais cette dernière assertion ne cadre pas mieux avec les faits, & c'est ce dont on peut s'assurer par un calcul fort simple.

92 grains de phosphore acquièrent, en brûlant, une augmentation de poids de 1 gros 62 grains $\frac{1}{6}$, ou de 134 grains $\frac{1}{6}$, en supposant donc que la pesanteur de la chaleur qui s'échappe soit d'un dixième de grain, il faudroit supposer que celle qui reste dans l'acide est treize cents quarante-deux fois plus considérable ; or, nos expériences, celles de M. Crawford, celles de M. Wilke, prouvent que la chaleur qui se fixe dans les acides, loin d'être plus forte, est au contraire beaucoup moindre que celle qui se dégage dans l'acte de la combustion.

Concluons de tout ceci, que la quantité de chaleur qui s'échappe de 92 grains de phosphore qui brûle, quelque considérable qu'elle paroisse à nos sens, n'a point de pesanteur sensible, ou au moins que cette chaleur ne pèse pas $\frac{1}{10}$ de grain; que le principe de la chaleur n'est pas par conséquent composé, comme le suppose M. Schéele, & d'après lui M. Bergman, d'air vital & de phlogistique, puisqu'un corps qui pèse ne peut pas entrer dans la composition d'un corps qui ne pèse pas :

Que l'augmentation très-considérable & de près de cent cinquante pour cent que prend le phosphore en brûlant, & celle qu'acquiert le soufre ainsi que plusieurs autres corps, ne peuvent pas être expliquées par la fixation de la chaleur, à moins qu'on ne parte de suppositions évidemment fausses & démenties par les faits :

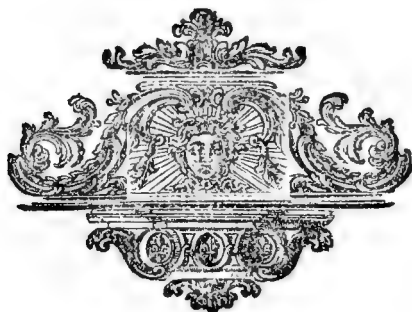
Qu'il faut donc en revenir aux conséquences que j'ai déduites des mes premiers Mémoires, & reconnoître que le soufre & le phosphore absorbent, en brûlant, de l'air vital, ou plutôt qu'ils le décomposent; qu'ils s'emparent de la base que j'ai désignée dans de précédens Mémoires, sous le nom de *principe oxygène*; & que la matière de la chaleur qui existe en une extrême abondance dans l'air vital, devenue libre par la nouvelle combinaison que la base a subie, se répand dans tous les corps environnans.

Ces explications si simples, si naturellement liées avec les faits, seroient adoptées depuis long-temps, si les Chimistes préoccupés de l'existence d'un principe phlogistique dont on n'a pu donner jusqu'ici que des idées très-confuses, que chacun définit à sa manière, ou plutôt que le même Chimiste définit souvent très-différemment, suivant la nature des faits qu'il veut expliquer, si les Chimistes, dis-je, n'avoient fait les plus grands efforts pour accorder la théorie ancienne avec les expériences modernes.

Ce qui s'observe au surplus dans la combustion du soufre

& du phosphore, arrive également dans toutes les combustions, mais avec cette différence que dans celles où le résultat demeure dans l'état de gaz, par exemple dans toutes les combustions que je nomme *charbonneuses*, il faut, pour retrouver l'augmentation de poids qui résulte de la fixation de l'air, tenir compte du poids de l'air fixe ou acide crayeux qui s'est formé, & qui reste dans l'état gazeux.

J'ai détaillé ailleurs les phénomènes qui accompagnent la combustion de l'air inflammable, & de celles en général dont le résultat est de l'eau.



SUITE DU MÉMOIRE

Sur les approximations des Formules qui sont fonctions de très-grands Nombres.

Par M. DE LA PLACE.

C E Mémoire étant une suite de celui qui a paru sur le même objet, dans le Volume précédent, je conserverai l'ordre des articles & des numéros. J'ai donné dans le premier article, une méthode générale pour réduire en séries très-convergentes, les fonctions différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. Dans le second article, j'ai ramené à ce genre d'intégrales, toutes les fonctions données par des équations linéaires aux différences ordinaires ou partielles, finies & infiniment petites; & je suis ainsi parvenu dans le troisième article, à déterminer les valeurs approchées de plusieurs formules qui se rencontrent fréquemment dans l'analyse, mais dont l'application devient très-pénible, lorsque les nombres dont elles sont fonctions, sont considérables. Il me reste présentement à faire voir l'usage de cette analyse dans la théorie des hasards.

ARTICLE IV.

Application de l'analyse précédente à la théorie des hasards.

XX XII.

Tous les évènements, ceux même qui, par leur petitesse & leur irrégularité, semblent ne pas tenir au système général de la Nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du Soleil. Nous les attribuons au hasard, parce que nous ignorons les causes qui les produisent & les loix qui les

enchaînent aux grands phénomènes de l'Univers: ainsi l'apparition & le mouvement des Comètes, que nous savons aujourd'hui dépendre de la même loi qui ramène les saisons, étoient regardés autrefois comme l'effet du hasard, par ceux qui rangeoient ces astres parmi les météores. Le mot *hasard* n'exprime donc que notre ignorance sur les causes des phénomènes que nous voyons arriver & se succéder sans aucun ordre apparent.

La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connoissances. Nous savons, par exemple, que sur trois, ou un plus grand nombre d'événemens, un seul doit exister; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision, il est impossible de prononcer avec certitude sur leur existence. Il nous paroît cependant probable qu'un de ces événemens, pris à volonté, n'existera pas; parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste donc à réduire tous les événemens qui peuvent avoir lieu relativement à un objet, dans un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence, & à déterminer le nombre des cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité.

Tous nos jugemens sur les choses qui ne sont que vraisemblables, sont fondés sur un pareil rapport: la différence des données que chaque homme a sur elles, & les erreurs que l'on commet en évaluant ce rapport, donnent naissance à cette foule d'opinions que l'on voit régner sur les mêmes objets: les combinaisons en ce genre sont si délicates, & les illusions si fréquentes, qu'il faut souvent une grande attention pour échapper à l'erreur.

La théorie des hasards offre un grand nombre d'exemples, dans lesquels les résultats de l'analyse sont entièrement
contraires

contraires à ceux qui se présentent au premier coup-d'œil, ce qui prouve combien il est utile d'appliquer le calcul aux objets importans de la vie civile; & quand même la possibilité de ces applications obligeroit de faire des hypothèses qui ne seroient qu'approchées, la précision de l'analyse en rendroit toujours les résultats préférables aux raisonnemens vagues que l'on emploie souvent pour traiter ces objets.

La notion précédente de la probabilité, donne une solution fort simple d'une question agitée par quelques Philosophes, & qui consiste à savoir si les évènements passés influent sur la probabilité des évènements futurs. Supposons qu'au jeu de *croix & pile*, on ait amené *croix* plus souvent que *pile*; par cela seul nous serons portés à croire que, soit dans la constitution de la pièce, soit dans la manière de la projeter, il existe une cause constante qui favorise le premier de ces évènements; les coups passés ont alors une influence sur la probabilité des coups futurs: mais si nous sommes assurés que les deux faces de la pièce sont parfaitement semblables, & si d'ailleurs les circonstances de sa projection sont à chaque coup, variées de manière que nous soyons ramenés sans cesse à l'état d'une indécision absolue sur ce qui doit arriver; le passé ne peut avoir aucune influence sur la probabilité de l'avenir, & il seroit évidemment absurde d'en tenir compte.

Lorsque la possibilité des évènements simples est connue, la probabilité des évènements composés peut souvent se déterminer par la seule théorie des combinaisons; mais la méthode la plus générale pour y parvenir, consiste à observer la loi des variations qu'elle éprouve par la multiplication des évènements simples, & à la faire dépendre d'une équation aux différences finies ordinaires ou partielles; l'intégrale de cette équation donnera l'expression analytique de la probabilité cherchée. Si l'évènement est tellement composé que l'usage de cette expression devienne impossible, à cause du grand nombre de ses termes & de ses facteurs; on aura sa valeur approchée par la méthode exposée dans les articles précédens. Nous en verrons un exemple à la fin de ce Mémoire.

Dans un grand nombre de cas, & ce sont les plus intéressans de l'analyse des hasards, les possibilités des événemens simples sont inconnues, & nous sommes réduits à chercher dans les événemens passés, quelques indices qui puissent nous guider dans nos conjectures sur l'avenir. Mais de quelle manière ces événemens nous dévoilent-ils, en se développant, leur possibilité respective? suivant quelles loix influent-ils sur la probabilité des événemens futurs? ce sont des questions difficiles, dont la solution exige des considérations métaphysiques très-déli-cates & une analyse épineuse. La difficulté de les résoudre se fait principalement sentir lorsqu'il s'agit de constater de légères différences par les observations; car alors un nombre considérable d'événemens observés, peut n'indiquer ces différences qu'avec une très-petite probabilité; & si l'on emploie ces événemens en très-grand nombre, on est conduit à des formules dont il est impossible de faire usage. Il est donc indispensable alors d'avoir un moyen simple d'obtenir la loi suivant laquelle la probabilité d'un résultat indiqué par les observations, croît avec elles, & le nombre auquel les événemens observés doivent s'élever, pour que ce résultat acquérant une grande vraisemblance, on soit fondé à rechercher les causes qui le produisent. J'ai donné ailleurs les principes & la méthode nécessaires pour cet objet, & cette méthode a l'avantage d'être d'autant plus précise, que les événemens observés sont en plus grand nombre: l'analyse exposée dans les articles précédens, m'ayant conduit à la généraliser & à la simplifier; je vais la présenter ici dans un nouveau jour, en donnant des formules très-commodes pour déterminer, d'après l'observation de résultats composés d'un grand nombre d'événemens simples, les possibilités de ces événemens, les différences que le temps, le climat, ou d'autres causes peuvent y produire, & la probabilité des événemens futurs.

Pour éclaircir cette méthode par un exemple, je l'appliquerai à quelques problèmes sur les naissances; c'est un objet important dans l'histoire naturelle de l'homme, & l'observation offre à cet égard des variétés remarquables relativement à la

différence des sexes- & des climats : mais elles sont si petites en elles-mêmes, qu'elles ne peuvent devenir sensibles que par un grand nombre de naissances. En comparant celles qui ont été observées dans les grandes villes, je trouve que du nord au midi de l'Europe, elles indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des garçons que dans celles des filles, avec une probabilité si fort approchante de la certitude, qu'il n'existe dans la philosophie naturelle, aucun résultat mieux établi par les observations. Cette supériorité dans la possibilité des naissances des garçons, est donc une loi générale de la Nature, du moins dans la partie du Globe que nous habitons ; & si l'on considère qu'elle subsiste malgré la grande variété des climats & des productions, qui a lieu de Naples à Pétersbourg, il paroîtra vraisemblable que cette loi s'étend à la Terre entière.

Un résultat également intéressant, & que les observations indiquent avec beaucoup de vraisemblance, est que la possibilité des naissances des garçons, relativement à celle des naissances des filles, n'est pas par-tout la même. C'est ici sur-tout qu'il importe d'avoir une méthode facile, pour comparer un très-grand nombre de naissances, & pour déterminer la probabilité qui en résulte, que les différences observées ne sont pas dûes au hasard : ces différences sont si peu considérables, qu'il faut souvent plusieurs millions de naissances pour constater qu'elles sont le résultat de causes toujours agissantes, & qu'on doit les distinguer de ces petites variétés que le hasard seul amène dans la succession des évènements également possibles. Je donne, pour obtenir cette probabilité, des formules très-simples, au moyen desquelles on pourra sur le champ juger de sa grandeur : ces formules appliquées aux naissances observées à Londres & à Paris, donnent une probabilité de plus de quatre cents mille contre un, que la possibilité des naissances des garçons, comparée à celle des naissances des filles, est plus grande dans la première de ces deux villes que dans la seconde ; d'où il suit qu'il existe très-probablement à Londres une cause de plus qu'à Paris,

qui rend les naissances des garçons supérieures à celles des filles. Les naissances observées dans le royaume de Naples, semblent indiquer pareillement dans ce royaume, une plus grande possibilité qu'à Paris, dans les naissances des garçons; mais quoique la somme des naissances observées dans ces deux endroits, s'élève à plus de deux millions; ce résultat est à peine indiqué avec une probabilité de cent contre un; ainsi pour prononcer irrévocablement sur cet objet, il faut attendre un plus grand nombre de naissances.

XXXIII.

Quelle que soit la manière dont deux évènements sont liés l'un à l'autre, il est clair que la probabilité de leur somme est égale à la probabilité du premier, multipliée par la probabilité que, celui-ci ayant lieu, le second doit pareillement exister; on aura donc cette dernière probabilité, en déterminant *à priori* la probabilité de la somme de deux évènements, & en la divisant par la probabilité du premier évènement, déterminée *à priori*.

Pour exprimer analytiquement ce résultat, nommons E & e les deux évènements; $E + e$ leur somme, V la probabilité de E , v celle de $E + e$, & p la probabilité de e , en supposant que E existe; nous aurons, cela posé,

$$p = \frac{v}{V}.$$

Cette équation fort simple est la base des recherches suivantes, & toute la théorie de la probabilité des causes & des évènements futurs, prise des évènements passés, en découle avec une grande facilité. Voyons d'abord comment elle donne les probabilités respectives des différentes causes auxquelles on peut attribuer un évènement observé.

XXXIV.

SOIT E cet évènement, & supposons qu'il puisse être attribué aux n causes $e, e^{(1)}, e^{(2)} \dots e^{(n-1)}$; si l'on nomme $p^{(r)}$ la probabilité de la cause $e^{(r)}$ prise de l'évènement E , V

la probabilité de E , & v celle de $E + e^{(r)}$; on aura par le n° précédent,

$$p^{(r)} = \frac{v}{V}.$$

Il faut maintenant déterminer v & V ; pour cela nous observerons que la probabilité *à priori* de l'existence de la cause $e^{(r)}$ est $\frac{1}{n}$; en nommant donc $a, a^{(1)}, a^{(2)} \dots a^{(n-1)}$ les probabilités respectives que les causes $e, e^{(1)}, e^{(2)}, \&c.$ étant supposées exister, l'évènement E aura lieu; $\frac{a^{(r)}}{n}$ sera la probabilité de $E + e^{(r)}$ déterminée *à priori*, c'est la quantité que nous avons nommée v .

La somme de toutes ces probabilités relatives à chacune de n causes, sera évidemment la probabilité de E , puisque cet évènement ne peut arriver que par une de ces causes; on aura donc

$$V = \frac{1}{n} \cdot [a + a^{(1)} + \dots + a^{(n-1)}];$$

partant

$$p^{(r)} = \frac{a^{(r)}}{a + a^{(1)} + a^{(2)} + \dots + a^{(n-1)}}.$$

c'est-à-dire, que l'on aura la probabilité d'une cause, prise de l'évènement, en divisant la probabilité de l'évènement, prise de cette cause, par la somme de toutes les probabilités semblables.

Supposons, par exemple, qu'une urne renferme trois boules qui ne puissent être que blanches ou noires; qu'après en avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage, & qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches: il est visible que l'on ne peut faire *à priori* que quatre hypothèses; car les boules seront toutes blanches ou toutes noires, ou deux seront blanches, & une noire, ou deux seront noires, & une blanche. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes différentes $e, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$, de l'évènement observé; les probabilités respectives de cet

évènement, prises de ces causes, feront 1 , $(\frac{2}{3})^m$, $(\frac{1}{3})^m$, &c; ce sont les quantités que nous avons nommées a , $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$; les probabilités respectives de ces hypothèses, prises de l'évènement, seront donc, par la formule précédente,

$$\frac{3^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{2^m}{3^m + 2^m + 1}, \quad \frac{1}{3^m + 2^m + 1}, \quad 0.$$

On voit au reste qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'évènement, parce que la probabilité de l'évènement, résultante de ces hypothèses, étant nulle, leur omission ne change point la valeur de $p^{(e)}$.

XXXV.

LA possibilité de la plupart des évènements simples est inconnue, & considérée *à priori*, elle nous paroît également susceptible de toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'unité; mais si l'on a observé un résultat composé de plusieurs de ces évènements, la manière dont ils y entrent, rend quelques-unes de ces valeurs plus probables que les autres; ainsi à mesure que le résultat observé se compose par le développement des évènements simples, leur vraie possibilité se fait de plus en plus connoître, & il devient de plus en plus probable qu'elle tombe dans des limites qui se resserrent sans cesse, & finissent par coïncider, lorsque le nombre des évènements simples est infini. Pour déterminer les loix suivant lesquelles cette possibilité se découvre, nous la nommerons x ; la théorie connue des hasards donnera la probabilité du résultat observé, en fonction de x ; soit y cette fonction. Si l'on regarde les différentes valeurs de x , comme autant de causes du résultat observé, la probabilité de x sera, par le *n.º 34*, égale à une fraction dont le numérateur est y , & dont le dénominateur est la somme de toutes les valeurs de y ; en multipliant donc les deux termes de cette fraction par ∂x , cette probabilité sera $\frac{y \partial x}{\int y \partial x}$, l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La probabilité que x est compris entre les deux limites $x = \theta$ & $x = \theta'$, est par conséquent égale à $\frac{\int y^{\partial x}}{\int y^{\partial x}}$, l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à $x = \theta'$, & celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

La valeur de x , la plus probable est celle qui rend y un *maximum*; nous la désignerons par a : les valeurs les moins probables sont celles qui rendent y nul; dans presque tous les cas, cela arrive aux deux limites $x = 0$ & $x = 1$; ainsi nous supposons y nul à ces limites, & alors chaque valeur de y , aura une valeur correspondante qui lui sera égale, de l'autre côté du *maximum*.

Si les valeurs de x , considérées indépendamment du résultat observé, ne sont pas toutes également possibles, mais que leur probabilité soit exprimée par une fonction z , de x ; il suffira de changer dans les formules précédentes, y dans yz : ce qui revient à supposer toutes les valeurs de x également possibles, & à considérer le résultat observé, comme étant formé de deux résultats indépendans, dont les probabilités sont y & z . On peut donc ramener de cette manière tous les cas, à celui où l'on suppose une égale possibilité aux différentes valeurs de x ; & par cette raison, nous adopterons cette hypothèse dans les recherches suivantes.

X X X V I.

CONSIDÉRONS un résultat composé d'un très-grand nombre d'événemens simples, & supposons que d'après l'observation de ce résultat, on veuille avoir la probabilité que la possibilité x de ces événemens ne surpasse pas une quantité quelconque θ , moindre que a ; cette probabilité est par le *numéro précédent*, égale à la fraction $\frac{\int y^{\partial x}}{\int y^{\partial x}}$, l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$, & celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à

$x = 1$. On aura ces intégrales en séries très-convergentes, par les formules du n.^o 6. Si l'on fait d'abord $-\frac{y^{\partial x}}{\partial y} = v$, & que l'on désigne par U & J ce que deviennent v & y , lorsqu'on y change x en θ ; la formule (a) de ce numéro donnera pour l'expression en série, de l'intégrale $\int y \partial x$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$,

$$\int y \partial x = -UJ. [1 + (\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{\partial(U \partial U)}{\partial \theta^2} + \&c.]$$

Si l'on nomme ensuite Y , le *maximum* de y , ou ce que devient cette fonction lorsqu'on y change x en a ; que l'on fasse

$$\frac{x - a}{\sqrt{\log. Y - \log. y}} = u,$$

ces logarithmes étant hyperboliques; & que l'on désigne par u , $\frac{\partial \cdot u^2}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}$, &c. ce que deviennent u , $\frac{\partial u^2}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}$, &c. lorsqu'on y change x en a ; la formule (d) du même numéro donnera pour l'expression en série, de l'intégrale $\int y \partial x$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$\int y \partial x = Y. \sqrt{(\pi)}. [u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^3}{1.2. \partial x^2} + \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{\partial^4 u^5}{1.2.3.4. \partial x^4} + \&c.]$$

π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon. La probabilité que x est égal ou moindre que θ , sera donc

$$\frac{-UJ. [1 + (\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{\partial(U \partial U)}{\partial \theta^2} + \&c.]}{Y. \sqrt{(\pi)}. [u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2} + \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{\partial^4 u^5}{\partial x^4} + \&c.]}; (a')$$

Le numérateur de cette série forme une suite divergente, si θ est très-voisin de a ; dans ce cas, on aura l'intégrale $\int y \partial x$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$, par la formule (e) du

du n.^o 6; & l'on trouvera pour l'expression en serie de cette intégrale,

$$\int y \, dx = Y. \left(u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^3}{1.2. \partial x^2} + \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{\partial^4 u^5}{\partial x^4} + \&c. \right) \\ \cdot \int \partial t. e^{-t^2} = \frac{Y e^{-T^2}}{2} \cdot \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + T \cdot \frac{\partial^2 u^3}{1.2. \partial x^2} + \&c. \right),$$

l'intégrale relative à t , étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = \log. Y - \log. J,$$

dans laquelle les logarithmes sont hyperboliques; & e , étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. La probabilité que x est égal ou moindre que θ , sera donc alors donnée par cette formule,

$$\left. \frac{\int \partial t. e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} = \frac{e^{-T^2} \cdot \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + T \cdot \frac{\partial^2 u^3}{1.2. \partial x^2} + \&c. \right)}{2 \sqrt{(\pi)} \cdot \left(u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^3}{1.2. \partial x^2} + \&c. \right)} \right\}; (b')$$

On pourra dans tous les cas, déterminer au moyen des formules (a') & (b'), la probabilité que x est égal ou moindre que θ , θ étant plus petit que a .

Si θ surpasse a , on fera $1 - \theta = \theta'$; $1 - x = x'$, & en nommant y' ce que devient y , on cherchera la probabilité que x' est égal ou moindre que θ' , par la formule

$\frac{\int y' \, dx'}{\int y' \, dx'}$, dans laquelle l'intégrale du numérateur est prise

depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \theta'$, celle du dénominateur étant prise depuis $x' = 0$, jusqu'à $x' = 1$. Les formules (a') & (b'), donneront cette probabilité, en changeant y, u, v, θ , en y', u', v', x', θ' ; en la retranchant ensuite de l'unité, on aura la probabilité que x est égal ou moindre que θ .

L'intégrale $\int \partial t. e^{-t^2}$ se rencontre fréquemment dans cette analyse, & par cette raison, il seroit très-utile de

former une table de ses valeurs depuis $t = \infty$, jusqu'à $t = 0$. Lorsque cette intégrale est prise depuis $t = T$, jusqu'à $t = \infty$, T étant égal ou plus grand que 3, on pourra faire usage de la formule,

$$\int_0^{\infty} t.e^{-t^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T} \cdot \left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1 \cdot 3}{4T^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8T^6} + \&c.\right); (c')$$

qui donnera une valeur alternativement plus grande & plus petite que la véritable.

X X X V I I.

DÉTERMINONS maintenant la probabilité que la valeur de x , est comprise entre les deux limites $a - \theta$, & $a + \theta'$, qui embrassent la valeur de a , correspondante au *maximum* de y . Cette probabilité est égale à $\frac{\int y \partial x}{\int y \partial x}$; l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = a - \theta$, jusqu'à $x = a + \theta'$, & celle du dénominateur étant prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$.

Supposons θ & θ' très-petits & tels que les deux valeurs de y , correspondantes à $x = a - \theta$, & à $x = a + \theta'$, soient égales à une même quantité que nous désignerons par J ; la formule (c) du n.^o 6 donnera à très-peu-près

$$\int y \partial x = Y.u.\int_0^1 t.e^{-t^2};$$

l'intégrale relative à x , étant prise depuis $x = a - \theta$, jusqu'à $x = a + \theta'$; & l'intégrale relative à t , étant prise depuis $t = -\sqrt{\log Y - \log J}$, jusqu'à $t = \sqrt{\log Y - \log J}$;

la probabilité cherchée fera donc égale à $\frac{\int_0^1 t.e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$.

y étant supposé avoir pour facteurs, des puissances très-élevées; les exposans de ces puissances deviennent coëfficiens dans son logarithme, en sorte que si l'on désigne par α , une très-petite fraction, $\log y$ sera de l'ordre $\frac{1}{\alpha}$, &

$\sqrt{\log. Y - \log. J}$ sera de l'ordre $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; à moins que J ne soit très-peu différent de Y .

Supposons qu'il en diffère assez peu pour que $\sqrt{\log. Y - \log. J}$ soit égal à $\frac{1}{\frac{\lambda}{a}}$, λ étant positif,

& moindre que l'unité; si l'on réduit $\log. J$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de θ , la fonction $\sqrt{\log. Y - \log. J}$ deviendra de cette forme $\frac{\theta \cdot Q}{a^{\frac{1}{2}}}$; ainsi pour qu'elle soit de l'ordre $\frac{1}{\frac{\lambda}{a}}$, il faut que θ soit fort

petit de l'ordre $a^{\frac{1-\lambda}{2}}$; on prouvera la même chose relativement à θ' . L'intervalle $\theta + \theta'$ compris entre les deux limites $a - \theta$ & $a + \theta'$, sera donc de l'ordre

$\frac{1-\lambda}{a^{\frac{1}{2}}}$; il sera par conséquent d'autant moindre, que les évènements se multiplieront davantage, en sorte qu'il deviendra nul, si leur nombre est infini, & dans ce cas, les deux limites se confondront avec la valeur de a , qui répond au *maximum* de y .

Pour avoir la probabilité que la valeur de x est comprise dans ces limites, il faut déterminer l'intégrale $\int \partial t e^{-t^2}$ depuis $t = -\frac{1}{\frac{\lambda}{a}}$ jusqu'à $t = \frac{1}{\frac{\lambda}{a}}$. Cette intégrale

est évidemment le double de l'intégrale $\int \partial t . e^{-t^2}$, prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$, moins le double de cette

même intégrale prise depuis $t = -\frac{1}{\frac{\lambda}{2}}$ jusqu'à $t = \infty$;

or, on a par le n.^o 4, $\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi)}$, l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$; on a d'ailleurs, par la formule (c') du numéro précédent,

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{1}{2} . a^{\frac{\lambda}{2}} . e^{-\frac{1}{a^{\lambda}}} . \left(1 - \frac{a^{\lambda}}{2} + \frac{3 . a^{2\lambda}}{4} - \&c. \right);$$

l'intégrale $\int \partial t . e^{-t^2}$, prise depuis $t = -\frac{1}{\frac{\lambda}{2}}$ jusqu'à

$t = \frac{1}{\frac{\lambda}{2}}$, fera donc

$$\sqrt{(\pi)} = a^{\frac{\lambda}{2}} . e^{-\frac{1}{a^{\lambda}}} + \&c.$$

En la divisant par $\sqrt{(\pi)}$, on aura la probabilité que x est compris entre les limites $a - \theta$ & $a + \theta'$; l'expression de cette probabilité sera par conséquent,

$$1 = \frac{a^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{(\pi)}} . e^{-\frac{1}{a^{\lambda}}} + \&c. \quad (d')$$

Lorsque $\frac{1}{a^{\lambda}}$ est un grand nombre, cette formule converge rapidement vers l'unité, principalement à cause du facteur

$e^{-\frac{1}{a^{\lambda}}}$, qui devient très-petit, lorsque a est une très-petite fraction: de-là résulte ce théorème.

« La probabilité que la possibilité des évènements simples est comprise entre des limites qui se resserrent de plus en plus, «
 approche sans cesse de l'unité, de manière que dans la sup- «
 position d'un nombre infini d'évènements simples, ces deux «
 limites venant à se réunir, & la probabilité se confondant «
 avec la certitude, la véritable possibilité des évènements «
 simples est exactement égale à celle qui rend le résultat «
 observé, le plus probable. »

On voit ainsi comment les évènements, en se multipliant, nous découvrent leur possibilité respective ; mais on doit observer qu'il y a dans cette analyse, deux approximations dont l'une est relative aux limites qui comprennent la valeur de x , & qui se resserrent de plus en plus, & dont l'autre est relative à la probabilité que x se trouve entre ces limites, probabilité qui approche sans cesse de l'unité ou de la certitude. C'est en cela que ces approximations diffèrent des approximations ordinaires, dans lesquelles on est toujours assuré que le résultat est compris dans les limites qu'on lui assigne.

Il importe principalement dans ces recherches, de pouvoir juger sur le champ si un résultat est indiqué par les observations, avec une grande vraisemblance ; car il suffit souvent d'être assuré qu'il est très-probable, sans qu'il soit besoin de connoître avec beaucoup de précision la valeur de la probabilité ; en supposant donc qu'il s'agisse de déterminer s'il est très-probable que la possibilité d'un évènement simple, est comprise dans des limites données, on pourra facilement y parvenir par la formule suivante.

On a, par ce qui précède,

$$\log. Y - \log. J = \frac{1}{a^{\frac{1}{\theta}}};$$

D'ailleurs, si l'on suppose θ très-petit, on a

$$\log. J = \log. Y + \theta \cdot \frac{\partial \log. Y}{\partial x} + \frac{\theta^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 \log. Y}{\partial x^2} + \&c.$$

$$\frac{\partial \cdot \log. Y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 \cdot \log. Y}{\partial x^2} = \frac{\partial \partial Y}{Y \partial x^2};$$

on aura donc

$$- \theta^2 \cdot \frac{\partial \partial Y}{Y \partial x^2} = \frac{1}{a^2};$$

ainsi la probabilité que la possibilité x de l'évènement simple est comprise entre les limites $a - \theta$ & $a + \theta$, sera par la formule (θ')

$$1 - \frac{1}{\theta \cdot \sqrt{1 - \pi \cdot \frac{\partial \partial Y}{Y \partial x^2}}} \cdot e^{\theta^2 \cdot \frac{\partial \partial Y}{Y \partial x^2}} + \&c.$$

d'où l'on voit que cette probabilité sera fort grande, si
 $-\theta^2 \cdot \frac{\partial \partial Y}{Y \partial x^2}$ est un nombre un peu considérable, tel que
 11 ou 12; ce qui donne un moyen très-simple de juger de
 la grandeur de cette probabilité.

X X X V I I I.

LA possibilité des évènements simples peut n'être pas la même à différentes époques, ou dans des pays différens; le climat, les productions & mille autres causes physiques ou morales peuvent y produire des différences qu'un grand nombre d'observations rend sensibles; mais comme les seules combinaisons du hasard suffisent pour introduire de légères différences dans le résultat des observations, on voit qu'il en faut un très-grand nombre, pour être assuré que les différences observées, lorsqu'elles sont très-petites, sont dûes à des causes toujours agissantes. Ce problème, un des plus importans de la théorie des hasards, exige une analyse délicate; en voici une solution fort simple.

Supposons que l'on ait observé dans deux lieux différens, deux résultats composés d'un très-grand nombre d'évènements simples du même genre; soit x la possibilité de l'évènement

simple dans le premier lieu; y la fonction de x qui exprime la probabilité du résultat observé dans ce lieu; a la valeur de x qui répond au *maximum* de y . Soit pareillement x' , la possibilité de l'événement simple dans le second lieu; y' la fonction de x' qui exprime la probabilité du résultat observé dans ce lieu, & a' la valeur de x' qui répond au *maximum* de y' ; a & a' sont les possibilités des évènements simples, qui rendent les résultats observés les plus probables; & ces quantités seroient, par le *numéro précédent*, les vraies possibilités des évènements simples, si les résultats observés étoient composés d'un nombre infini de ces évènements. Supposons a' très-peu différent de a , & qu'il soit un peu plus grand; enfin nommons P la probabilité que la possibilité de l'événement simple, est plus grande dans le premier lieu que dans le second: cela posé; on aura par des considérations analogues à celle du *n.^o 35*,

$$P = \frac{\iint y' y' . \partial x . \partial x'}{\iint y y' . \partial x . \partial x'} ,$$

les intégrales du numérateur étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = x$, & depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; celles du dénominateur étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = 1$, & depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Pour avoir ces intégrales, nous supposerons $x' = u x$, & nous nommerons z , ce que devient alors xyy' ; nous aurons

$$P = \frac{\iint z \partial x \partial u}{\iint z \partial x \partial u} ,$$

les intégrales du numérateur étant prises depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$, & depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; celles du dénominateur étant prises depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \frac{1}{x}$, & depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Déterminons d'abord les intégrales du numérateur.

Pour cela, nous observerons que y étant nul aux deux limites $x = 0$ & $x = 1$, z est pareillement nul à ces deux limites; soit donc Z ce que devient cette fonction lorsqu'on

440 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 y substitue pour x la valeur en u , donnée par l'équation
 $0 = (\frac{\partial Z}{\partial u})$; on aura à très-peu-près par le n.^o 6,

$$\int Z \partial x = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot Z}{\sqrt{(-\frac{\partial \partial Z}{Z \partial x^2})}};$$

partant

$$\iint Z \partial u \cdot \partial x = \sqrt{(2\pi)} \cdot \int \frac{Z \cdot \partial u}{\sqrt{(-\frac{\partial \partial Z}{Z \partial x^2})}}.$$

L'intégrale relative à u doit être prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$; mais au *maximum* de la fonction différentielle $yy' \cdot \partial x \partial x'$, on a $x = a$ & $x' = a'$, & par conséquent $u = \frac{a'}{a}$; la valeur de u , correspondante à ce *maximum*, excède donc très-peu l'unité; ainsi l'on doit dans ce cas, faire usage de la formule (c) du n.^o 6. Soit

$$\partial u' = \frac{\partial u}{\sqrt{(-\frac{\partial \partial Z}{Z \partial x^2})}},$$

& nommons Z' ce que devient Z au point où l'on a
 $0 = (\frac{\partial Z}{\partial u'})$; nommons ensuite S ce que devient Z
 lorsqu'on y fait $u = 1$; la formule citée donnera, à fort
 peu-près,

$$\int Z \partial u' = \frac{Z' \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{(-\frac{\partial \partial Z'}{Z' \partial u'^2})}},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis $t = T$ jusqu'à
 $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = \log. Z' - \log. S.$$

L'équation $0 = (\frac{\partial Z}{\partial u'})$ peut être mise sous cette forme;
 $0 = (\frac{\partial Z}{\partial u}) \cdot (\frac{\partial u}{\partial u'})$; d'où l'on tire $0 = (\frac{\partial Z}{\partial u})$, &

$$\left(\frac{\partial^2 Z'}{\partial u'^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 Z'}{\partial u'^2}\right) \cdot \frac{\partial u'}{\partial u'^2} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 Z'}{\partial u'^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 Z'}{\partial x'^2}\right)}{Z'}$$

on aura donc

$$\int Z \partial u' = \frac{Z'}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Z'}{Z' \cdot \partial u'^2} \cdot \frac{\partial^2 Z'}{Z' \cdot \partial x'^2}\right)}} \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^2}.$$

Le numérateur de l'expression de P fera par conséquent, à très-peu-près égal à

$$\frac{2 \sqrt{(\pi)} \cdot Z'}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 Z'}{Z' \cdot \partial u'^2} \cdot \frac{\partial^2 Z'}{Z' \cdot \partial x'^2}\right)}} \cdot \int \partial t \cdot e^{-t^2};$$

déterminons maintenant son dénominateur.

y' étant nul aux deux limites $x' = 0$ & $x' = 1$, il est clair que z est nul aux deux limites $u = 0$ & $u = \frac{1}{x}$; il est pareillement nul aux deux limites $x = 0$ & $x = 1$; en nommant donc U ce que devient z , lorsqu'on y substitue pour u & pour x leurs valeurs données par les équations

$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, on aura, par le n.^o 7,

$$\iint z \partial u \cdot \partial x = \frac{2 \pi \cdot U}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{U \cdot \partial u'^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{U \cdot \partial x'^2}\right)}};$$

c'est la valeur très-approchée du dénominateur de P . Il est aisé de voir que $Z' = U$, puisque l'une & l'autre de ces quantités est ce que devient z , lorsqu'on y substitue pour u & x leurs valeurs tirées des équations $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$; la valeur de P fera par conséquent donnée par cette formule très-simple,

$$P = \frac{\int \partial t \cdot e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}.$$

Les deux limites entre lesquelles l'intégrale relative à t doit s'étendre, sont $t = T$ & $t = \infty$, T^2 étant égal à

Mém. 1783.

Kkk

$\log. Z' - \log. S$. Le *maximum* de z ou de xyy' est Z ; le *maximum* de y répond à $x = a$; celui de xy répond à une valeur de x , qui n'en diffère que d'une quantité de l'ordre α , & comme au point du *maximum*, les grandeurs ne varient que d'une manière insensible, on peut supposer $x = a$, au *maximum* de xy . Soit Y ce que devient y dans ce cas, le *maximum* de xy fera aY . Le *maximum* de y' répond à $x' = a'$; soit Y' ce que devient alors y' , on aura donc $Z' = a \cdot Y \cdot Y'$. S est le *maximum* de xyy' lorsque $u = 1$, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on fait $x' = x$ dans y' ; soit a'' la valeur de x , qui dans ce cas rend yy' un *maximum*, & nommons Y'' ce *maximum*, on aura $S = a'' \cdot Y''$; partant

$$T^2 = \log. Y + \log. Y' - \log. Y'' + \log. \frac{a}{a''}.$$

La valeur de a'' est moyenne entre a & a' ; & puisque ces deux dernières quantités sont supposées très-peu différer entr'elles, on aura à très-peu-près, $\frac{a}{a''} = 1$, & par conséquent on pourra négliger le terme $\log. \frac{a}{a''}$.

Si T^2 est un nombre un peu grand, tel que 11 ou 12; P sera une très-petite fraction moindre que $\frac{1}{500000}$; il sera donc très-peu probable que la possibilité de l'évènement simple est plus grande dans le premier lieu que dans le second, ou, ce qui revient au même, il sera très-probable que dans le second lieu où a' surpasse a , la possibilité des évènements simples est plus grande que dans le premier. Les observations indiqueront alors avec beaucoup de vraisemblance, qu'il existe dans le second lieu, une cause de plus que dans le premier, qui y facilite la production de l'évènement simple. L'analyse suivante donnera la loi suivant laquelle cette probabilité croît par le développement des évènements simples.

Pour cela, nous observerons que a'' étant très-peu différent de a & de a' , on aura à fort peu-près,

$$\log. Y'' = \log. Y + \log. Y' + \frac{1}{2} (a'' - a)^2 \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} \\ + \frac{1}{2} \cdot (a'' - a')^2 \cdot \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2},$$

ce qui donne

$$T^2 = -\frac{1}{2} (a'' - a)^2 \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} - \frac{1}{2} \cdot (a'' - a')^2 \cdot \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2};$$

mais a'' est donné par l'équation

$$0 = \frac{\partial y}{y \partial x} + \frac{\partial y'}{y' \partial x'};$$

x' devant être changé en x dans $\frac{\partial y'}{y' \partial x'}$. Si l'on suppose ensuite $x = a'' = a + (a'' - a)$, on a

$$\frac{\partial y}{y \partial x} = \frac{\partial Y}{Y \partial x} + (a'' - a) \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2};$$

d'ailleurs on a $0 = \frac{\partial Y}{\partial x}$. On aura donc

$$\frac{\partial y}{y \partial x} = (a'' - a) \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2};$$

on trouvera pareillement

$$\frac{\partial y'}{y' \partial x'} = (a'' - a') \cdot \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2};$$

on aura donc

$$0 = (a'' - a) \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + (a'' - a') \cdot \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2};$$

d'où l'on tire

$$a'' = \frac{a \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + a' \cdot \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}}{\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}};$$

on aura ainsi à peu-près

$$T^2 = - \frac{\frac{1}{2} \cdot (a' - a)^2 \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}}{\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}};$$

On pourra facilement juger par cette valeur de T^2 , de la probabilité avec laquelle les observations indiquent une différence entre les possibilités des évènements simples; car cette probabilité étant, par ce qui précède, égale à $1 - \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$, l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = \infty$; une table des valeurs de cette intégrale depuis $t = \infty$ jusqu'à $t = 0$, donnera sur le champ la probabilité cherchée, avec une précision suffisante.

Les évènements simples, en se développant, font croître les valeurs de $\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2}$ & de $\frac{\partial^2 Y'}{Y' \partial x'^2}$, & par conséquent aussi celle de T^2 ; ce qui montre clairement la loi qui existe entre leur développement & la probabilité des résultats qu'ils paroissent indiquer. La valeur de T^2 , fait voir encore que plus les différences entre a & a' sont petites, plus il faut d'évènements simples observés, pour constater que ces différences ne sont pas l'effet du hasard, ce qui d'ailleurs est évident *à priori*, & il en résulte que pour une différence deux fois moindre, il faut environ quatre fois plus d'observations.

X X X I X.

APPLIQUONS les formules des *n.^{os} précédens*, aux naissances; pour cela supposons que sur $p + q$, naissances observées, il y ait eu p garçons & q filles, p étant plus grand que q , & cherchons la probabilité que la possibilité des naissances des garçons ne surpasse pas une quantité quelconque θ . Il faut dans ce cas faire usage des formules du *n.^o 36*; si l'on désigne par x la possibilité des naissances des garçons, & que l'on nomme \mathcal{C} la quantité $\frac{1.2.3 \dots (p+q)}{1.2.3 \dots p.1.2.3 \dots q}$; la probabilité que sur $p + q$, naissances, il y aura p garçons, & q filles sera $\mathcal{C} . x^p . (1 - x)^q$, c'est la quantité que nous avons nommée y dans le *n.^o cité*; la quantité que nous avons

nommée v deviendra ainsi $\frac{x \cdot (1-x)}{(p+q)x-p}$, & la fonction

$$U.J.[1 + (\frac{\partial U}{\partial \theta}) + \&c.]$$

deviendra

$$\frac{C \cdot \theta^p + 1 \cdot (1-\theta)^q + 1}{(p+q)\theta - p} \cdot \left\{ 1 - \frac{[(p+q)\theta^2 + p \cdot (1-2\theta)]}{[(p+q)\theta - p]^2} + \&c. \right\}$$

Maintenant, la quantité que nous avons nommée u dans le n.^o 36, est par le n.^o 6 égale à $\sqrt{(-\frac{2Y\partial x^2}{\partial \partial Y})}$, Y & $\partial \partial Y$ étant ce que deviennent y & $\partial \partial y$ lorsque $x = a$; d'ailleurs a étant la valeur de x qui répond au *maximum* de y , il est déterminé par l'équation $0 = \frac{\partial y}{\partial x}$, d'où l'on tire

$a = \frac{p}{p+q}$, & par conséquent

$$Y = \frac{C \cdot p^p \cdot q^q}{(p+q)^{p+q}}, \quad - \frac{\partial \partial Y}{Y \cdot \partial x^2} = \frac{(p+q)^2}{pq};$$

la fonction

$$Y \cdot \sqrt{(\pi)} \cdot (u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u^3}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^2} + \&c.)$$

deviendra donc, en observant qu'elle se réduit à très-peu-près à son premier terme, lorsque p & q sont de grands nombres,

$$\frac{C \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(2\pi)}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}};$$

la formule (a') du *numéro cité*, donnera ainsi pour la probabilité que x ne surpasse pas θ ,

$$\frac{\theta^{p+1} \cdot (1-\theta)^{q+1} \cdot (p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\pi)} \cdot [p - (p+q)\theta] \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ 1 - \frac{[(p+q)\theta^2 + p \cdot (1-2\theta)]}{[p - (p+q)\theta]^2} + \&c. \right\}$$

Si l'on fait $\theta = \frac{1}{2}$, on aura pour la probabilité que x ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, ou ce qui revient au même, que la possibilité des naissances des garçons est moindre que celle des naissances des filles,

$$\frac{(p+q)^p + q + \frac{1}{2}}{(p-q) \cdot 2^p + q + \frac{1}{2} \cdot p^p + \frac{1}{2} \cdot q^q + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\pi)}} \cdot \left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \&c. \right]; (e')$$

en retranchant cette formule de l'unité, on aura la probabilité avec laquelle les naissances observées indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des garçons que dans celles des filles.

Parmi les naissances observées en Europe, nous considérerons celles qui l'ont été à Londres, à Paris, & dans le royaume de Naples.

Dans l'espace des quatre-vingt-quinze années écoulées depuis le commencement de 1664 jusqu'à la fin de 1758, il est né à Londres 737629 garçons & 698958 filles, ce qui donne à peu-près $\frac{19}{18}$, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Dans l'espace des vingt-six années écoulées depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1770, il est né à Paris 251527 garçons & 241945 filles, ce qui donne $\frac{26}{25}$ à peu-près, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Enfin, dans l'espace des neuf années écoulées depuis le commencement de 1774 jusqu'à la fin de 1782, il est né dans le royaume de Naples, la Sicile non comprise, 782352 garçons & 746821 filles, ce qui donne $\frac{22}{21}$ à peu-près, pour le rapport des naissances des garçons à celles des filles.

Le moins considérable de ces trois nombres de naissances, est celui des naissances observées à Paris; d'ailleurs, c'est dans cette ville, que les naissances des garçons & des filles s'éloignent le moins de l'égalité: par ces deux raisons, la probabilité que la possibilité des naissances des garçons surpasse $\frac{1}{2}$, doit y être moindre qu'à Londres & dans le royaume de Naples. Déterminons numériquement cette probabilité.

Il est nécessaire pour cela d'avoir jusqu'à douze décimales, les logarithmes tabulaires de p , q , $p + q$ & 2; parce que

ces nombres font élevés dans la formule (e') à de grandes puissances; or on a

$$\begin{aligned}\text{Log. } p &= \text{log. } 51527 = 5,4005 \ 8461 \ 0947, \\ \text{Log. } q &= \text{log. } 241945 = 5,3837 \ 1665 \ 1469, \\ \text{Log. } p + q &= \text{log. } 493472 = 5,6932 \ 6251 \ 5480, \\ \text{Log. } 2 &= 0,3010 \ 2999 \ 5664;\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{Log. } \frac{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}{(p-q) \cdot p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot 2^{p+q+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\pi}} = -41,9384918.$$

En nommant donc μ , le nombre auquel ce logarithme appartient, & qui est excessivement petit, puisqu'il est égal à une fraction dont le numérateur étant l'unité, le dénominateur est le nombre 8 suivi de 41 chiffres, la formule (e') deviendra

$$\mu \cdot [1 - 0,0053747 + \&c.]$$

En la retranchant de l'unité, on aura la probabilité qu'à Paris, la possibilité des naissances des garçons surpasse celle des naissances des filles; d'où l'on voit que cette probabilité diffère si peu de l'unité, que l'on peut regarder comme certain, que l'excès des naissances des garçons sur celles des filles, observé à Paris, est dû à une plus grande possibilité dans les naissances des garçons.

Si l'on applique pareillement la formule (e') aux naissances des garçons observées dans les principales villes de l'Europe, on trouvera que la supériorité dans les naissances des garçons, comparées à celles des filles, observée par-tout, depuis Naples jusqu'à Pétersbourg, indique une plus grande possibilité dans les naissances des garçons, avec une probabilité très-approchant de la certitude. Ce résultat paroît donc être une loi générale, du moins en Europe; & si dans quelques petites villes où l'on n'a observé qu'un nombre peu considérable de naissances, la Nature semble s'en écarter, il y a tout lieu de croire que cet écart n'est qu'apparent, & qu'à la longue, les naissances observées dans ces villes, offriroient, en se multipliant, un résultat semblable à celui des grandes villes.

Plusieurs philosophes trompés par ces anomalies apparentes, ont cherché les causes de phénomènes qui ne sont que l'effet du hasard; ce qui prouve la nécessité de faire précéder de semblables recherches, par celle de la probabilité avec laquelle le phénomène dont on veut déterminer la cause, est indiqué par les observations: l'exemple suivant confirmera cette remarque.

Sur 415 naissances observées durant cinq ans dans la petite ville de Viteaux en Bourgogne, il y a eu 203 garçons & 212 filles, ce qui donne à peu-près $\frac{2\frac{3}{2}}{2\frac{3}{2}}$ pour le rapport des naissances des filles à celles des garçons. L'ordre naturel paroît ici renversé, puisque les naissances des filles surpassent celles des garçons: voyons avec quelle probabilité ces observations indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des filles.

p ayant été supposé plus grand que q , dans les formules précédentes, il représente dans ce cas le nombre des filles, & q celui des garçons; la formule (e') donnera la probabilité que les naissances des garçons surpassent celles des filles; mais cette formule étant divergente, il faut employer la formule (b') du n.^o 36, & l'on trouvera, après toutes les réductions, que si l'on y fait $y = C.x^p.(1 - x)^q$, & $\theta = \frac{1}{2}$, elle deviendra

$$\frac{\int dt.e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} + \frac{(p-q).e^{-T^2}}{3.\sqrt{[\frac{1}{2}\pi.pq.(p+q)]}},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = \infty$, T^2 donné par l'équation

$$T^2 = p.\log.p + q.\log.q - (p+q).\log.\frac{p+q}{2},$$

dans laquelle les logarithmes sont hyperboliques. Cette formule est l'expression de la probabilité que la possibilité des naissances des garçons l'emporte sur celle des naissances des filles: si l'on y substitue, au lieu de p & de q , leurs valeurs précédentes relatives à la ville de Viteaux, on trouvera 0,329802 pour cette probabilité; en la retranchant de l'unité, la

la différence 0,670198 fera la probabilité qu'à Viteaux, la possibilité des naissances des filles est supérieure à celle des naissances des garçons : cette plus grande possibilité n'est donc indiquée qu'avec une probabilité de deux contre un, ce qui est beaucoup trop foible pour balancer l'analogie qui nous porte à penser qu'à Viteaux, comme dans toutes les villes où l'on a observé un nombre considérable de naissances, la possibilité des naissances des garçons est plus grande que celle des filles.

X L.

ON a vu dans le n.^o précédent, que le rapport des naissances des garçons à celles des filles, est environ $\frac{12}{18}$ à Londres, tandis qu'il n'est à Paris que $\frac{26}{25}$; cette différence semble indiquer dans la première ville, une possibilité dans les naissances des garçons, plus grande que dans la seconde ville : déterminons avec quelle vraisemblance les observations indiquent ce résultat.

Ce problème est un cas particulier de celui que nous avons résolu dans le n.^o 38, ainsi nous ferons usage des formules que nous y avons données ; pour cela il faut connoître les quantités que nous avons nommées y & y' . Soit p le nombre des naissances des garçons observé à Paris, q celui des naissances des filles, & x la possibilité des naissances des garçons dans cette ville ; si l'on fait $C = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p + q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q}$, la probabilité du résultat observé à Paris, sera $C \cdot x^p \cdot (1 - x)^q$; c'est la quantité y .

Si l'on nomme pareillement p' , le nombre des naissances des garçons observé à Londres ; q' celui des naissances des filles, & x' la possibilité des naissances des garçons dans cette ville ; si l'on fait ensuite

$$C' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p' + q')}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q'}$$

la probabilité du résultat observé à Londres sera

$$C^p \cdot x^{p^1} (1 - x^1)^{q^1};$$

c'est la quantité y^1 .

En désignant donc par P la probabilité qu'à Paris la possibilité des naissances des garçons est plus grande qu'à Londres, on aura par le n.^o 38,

$$P = \frac{\int_0^T e^{-t} dt}{\sqrt{(\pi)}};$$

l'intégrale étant prise depuis $t = T$, jusqu'à $t = \infty$.
Voyons ce que devient T , dans le cas présent.

On a par le n.^o cité,

$$T^2 = \log. Y + \log. Y^1 - \log. Y'' + \log. \frac{a}{a^{11}}.$$

Y est le *maximum* de y , ou de $C^p \cdot x^p \cdot (1 - x)^q$; la valeur de x qui répond à ce *maximum*, est $\frac{p}{p+q}$: c'est la quantité que nous avons nommée a ; on aura donc

$$Y = \frac{C^p \cdot p^p \cdot q^q}{(p+q)^{p+q}};$$

on aura de la même manière,

$$Y^1 = \frac{C^1 \cdot p^1 \cdot q^1 \cdot q^{q^1}}{(p^1 + q^1)^{p^1 + q^1}};$$

Y'' est le *maximum* de $y \cdot y^1$, lorsqu'on fait $x^1 = x$, dans y^1 , ce qui donne

$$y \cdot y^1 = C C^1 \cdot x^p + p^1 \cdot (1 - x)^{q + q^1};$$

la valeur de x correspondante au *maximum* de cette fonction, est $\frac{p + p^1}{p + p^1 + q + q^1}$; c'est la quantité que nous avons nommée a^{11} ; on aura ainsi :

$$Y'' = \frac{C \cdot C^1 \cdot (p + p^1)^p + p^1 \cdot (q + q^1)^{q + q^1}}{(p + p^1 + q + q^1)^{p + p^1 + q + q^1}};$$

ces valeurs donnent

$$\begin{aligned} T^2 = & (p + p^i + q + q^i + 1) \cdot \log. (p + p^i + q + q^i) \\ & - (p + p^i + 1) \cdot \log. (p + p^i) - (q + q^i) \cdot \log. (q + q^i) \\ & - (p + 1) \cdot \log. p - q \cdot \log. q + (p + q + 1) \cdot \log. (p + q) \\ & - p^i \cdot \log. p^i - q^i \cdot \log. q^i - (p^i + q^i) \cdot \log. (p^i + q^i). \end{aligned}$$

Maintenant on a, par le *n.^o* précédent,

$$p = 251527; p^i = 737629;$$

$$q = 241945; q^i = 698958;$$

d'où l'on tire en logarithmes tabulaires,

$$\log. p = 5,4005 \ 8461 \ 0947;$$

$$\log. q = 5,3837 \ 1665 \ 1469;$$

$$\log. (p + q) = 5,6932 \ 6251 \ 5480;$$

$$\log. p^i = 5,8678 \ 3798 \ 2735;$$

$$\log. q^i = 5,8444 \ 5108 \ 0009;$$

$$\log. (p^i + q^i) = 6,1573 \ 3193 \ 2083;$$

$$\log. (p^i + p) = 5,9952 \ 6474 \ 1371;$$

$$\log. (q + q^i) = 5,9735 \ 4485 \ 3243;$$

$$\log. (p + p^i + q + q^i) = 6,2855 \ 7058 \ 5161.$$

En faisant usage de ces logarithmes, on auroit

$$T^2 = 4,5357576;$$

mais ces logarithmes étant tabulaires, il faut, comme l'on fait, les multiplier par le nombre 2,3025851, pour les réduire en logarithmes hyperboliques; on aura donc la vraie valeur de T^2 , en multipliant la précédente par le même nombre, ce qui donne

$$T^2 = 10,4439679.$$

Cela posé, si l'on détermine l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2}$, par la formule (*c'*) du *n.^o* 36; on aura

$$P = 0,0000025422. [1 - 0,047875 + 0,0068759 - \&c.]$$

Les trois premiers termes de cette expression donnent

$$P = 0,00000243797 = \frac{1}{410178}.$$

Cette valeur de P est un peu trop grande ; mais comme en prenant un terme de plus, on auroit une valeur trop petite, sans l'altérer de $\frac{1}{250}$, on voit qu'elle est fort approchée, & qu'ainsi il y a plus de quatre cents mille à parier contre un, qu'il existe à Londres, une cause de plus qu'à Paris, qui y facilite les naissances des garçons.

Le calcul numérique de T^2 suppose que l'on a les logarithmes tabulaires de $p, q, p+q, p', q',$ &c. jusqu'à douze décimales ; les Tables de Gardiner, qui sont celles dont on fait le plus d'usage, renferment les logarithmes des 1161 premiers nombres, jusqu'à vingt décimales, & l'on peut en conclure les logarithmes des nombres supérieurs ; mais le calcul que cela suppose, est assez long ; on peut y suppléer fort simplement, par la considération de l'expression de T^2 , & déterminer la valeur de cette quantité, sans recourir aux logarithmes des nombres supérieurs à 1161.

Pour cela, nous la mettrons sous cette forme

$$\begin{aligned} T^2 = & (p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p+q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q} \right) \\ & + p' \cdot \log. \frac{p'}{p'+q'} + q' \cdot \log. \left(1 - \frac{p'}{p'+q'} \right) \\ & - (p + p' + 1) \cdot \log. \frac{p+p'}{p+p'+q+q'} \\ & - (q + q') \cdot \log. \left(1 - \frac{q+q'}{p+p'+q+q'} \right). \end{aligned}$$

Si l'on fait varier d'une très-petite quantité a , le rapport

$\frac{p}{p+q}$ dans la fonction

$$(p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p+q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q} \right),$$

elle ne changera pas sensiblement de valeur ; car elle devient alors

$$(p + 1) \cdot \log. \left(\frac{p}{p+q} + a \right) + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p+q} - a \right),$$

en réduisant $\log. \left(\frac{p}{p+q} + a \right)$ & $\log. \left(1 - \frac{p}{p+q} - a \right)$

dans des suites ordonnées par rapport aux puissances de α , & en rejetant les quantités de l'ordre α qui ne sont pas multipliées par les grands nombres p & q , elle se réduit à

$$(p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p + q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p + q}\right).$$

Cela posé, on cherchera par la méthode des fractions continues, la fraction qui ayant un dénominateur égal ou moindre que 1161, approche le plus de $\frac{p}{p + q}$; la diffé-

rence de cette fraction & de $\frac{p}{p + q}$ n'étant que de l'ordre

α , on pourra employer cette fraction au lieu de $\frac{p}{p + q}$, &

comme les Tables donnent avec vingt décimales, les logarithmes de son numérateur & de son dénominateur, ainsi que les logarithmes du numérateur & du dénominateur de la nouvelle fraction que l'on a en retranchant la précédente de l'unité, on aura facilement la valeur tabulaire de

$$(p + 1) \cdot \log. \frac{p}{p + q} + q \cdot \log. \left(1 - \frac{p}{p + q}\right).$$

On trouvera de la même manière les valeurs tabulaires des autres parties de l'expression de T^2 ; on aura ainsi l'expression tabulaire de T^2 , & cette expression prise en moins sera le logarithme tabulaire de e^{-T^2} ; on aura ensuite la vraie valeur de T^2 , en multipliant la précédente, par 2,3025851.

On pourra presque toujours employer sans erreur sensible, la formule du n° 38.

$$T^2 = - \frac{\frac{1}{2} (a^2 - a)^2 \cdot \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y^2}{Y^2 \partial x^2}}{\frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y^2}{Y^2 \partial x^2}}.$$

& comme on a dans ce cas

$$a = \frac{p}{p + q}, a^2 = \frac{p^2}{p^2 + q^2}, - \frac{\partial^2 Y}{Y \partial x^2} = \frac{(p + q)^3}{p q}, - \frac{\partial^2 Y^2}{Y^2 \partial x^2} = \frac{(p^2 + q^2)^3}{p^2 q^2},$$

on aura

$$T^2 = \frac{\left(\frac{p'}{p' + q'} - \frac{p}{p + q}\right)^2 \cdot (p + q)^3 \cdot (p' + q')^3}{2p'q' \cdot (p + q)^3 + 2pq \cdot (p' + q')^3},$$

Si l'on applique cette formule aux naissances observées à Paris & dans le royaume de Naples, il faudra supposer

$$p = 251527, \quad q = 241945, \\ p' = 782352, \quad q' = 746821,$$

ce qui donne $T = 2,7206$; on trouve alors la probabilité P , que la possibilité des naissances des garçons à Paris est plus grande que dans le royaume de Naples, égale à $\frac{1}{100}$ environ : il est donc vraisemblable qu'il existe dans ce Royaume, comme à Londres, une cause de plus qu'à Paris, qui y facilite les naissances des garçons; mais la probabilité avec laquelle elle est indiquée par les observations, est trop peu considérable encore pour prononcer irrévocablement sur cet objet.

X L I.

CONSIDÉRONS maintenant la probabilité des évènements futurs, prise des évènements passés, & supposons qu'ayant observé un résultat composé d'un nombre quelconque d'évènements simples, on veuille déterminer la probabilité d'un résultat futur composé des mêmes évènements.

Si l'on désigne par x la possibilité des évènements simples, par y la probabilité correspondante du résultat observé, & par z celle du résultat futur, y & z étant fonctions de x ; si l'on nomme ensuite P la probabilité du résultat futur, prise du résultat observé; il est aisé de conclure du n.^o 34,

$$P = \frac{\int y z dx}{\int x dx},$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Cette formule renferme la loi suivant laquelle les évènements passés influent sur la probabilité des évènements futurs;

examinons cette influence dans quelques cas particuliers. Pour cela supposons qu'une urne renferme une infinité de boules blanches & noires, & qu'après en avoir tiré une boule blanche, on cherche la probabilité d'amener une boule semblable, au tirage suivant : si l'on nomme x , le rapport des boules blanches de l'urne, au nombre total des boules, il est clair que x sera la probabilité, tant de l'événement observé, que de l'événement futur; on aura donc

$$P = \frac{\int x^2 \cdot dx}{\int x \cdot dx} = \frac{2}{3},$$

c'est-à-dire, qu'il y a deux contre un à parier que l'on amènera au second tirage, une boule semblable à celle du premier tirage.

En supposant toujours que l'on ait amené une boule blanche au premier tirage, si l'on cherche la probabilité d'amener ensuite n boules noires; x sera la probabilité du résultat observé, & $(1 - x)^n$ celle du résultat futur; on aura donc alors

$$P = \frac{\int x \cdot (1 - x)^n \cdot dx}{\int x \cdot dx} = \frac{2}{(n + 1) \cdot (n + 2)},$$

Si les boules blanches & noires étoient en nombre égal dans l'urne, on auroit $P = \frac{1}{2^n}$; cette valeur de P est

plus petite que la précédente, lorsque n est égal ou plus grand que 4; d'où il résulte, que quoique le premier tirage rende probable que les boules blanches sont en plus grand nombre que les noires, cependant la probabilité d'amener quatre boules noires dans les quatre tirages suivans, est plus considérable, que si l'on supposoit le nombre des boules noires égal à celui des boules blanches. Ce résultat qui semble paradoxal, tient à ce que la probabilité d'amener n boules noires, est égale à la probabilité d'en amener une, multipliée par la probabilité qu'en ayant amené une première, on en amènera une seconde, multipliée encore par la probabilité qu'en ayant amené deux, on en amènera une troisième, & ainsi de suite; & il est visible que ces probabilités partielles

456 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 vont toujours en croissant, & finissent par se réduire à l'unité,
 lorsque n est infini.

X L I I.

SUPPOSONS le résultat observé composé d'un très-grand nombre d'événemens simples ; soit a la valeur de x , qui rend y un *maximum* ; Y , ce *maximum* ; a' la valeur de x qui rend y z , un *maximum* ; Y' & Z' ce que deviennent alors y & z ; on aura à très-peu-près, par le n^o 6,

$$\int y \, dx = \frac{Y^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(2 \pi)}}{\sqrt{\left(- \frac{\partial \partial Y}{\partial x^2} \right)}} ;$$

$$\int y z \, dx = \frac{(Y' Z')^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(2 \pi)}}{\sqrt{\left[- \frac{\partial \partial (Y' Z')}{\partial x^2} \right]}} ;$$

l'expression de P du n^o précédent, devient donc

$$P = \frac{(Y' Z')^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left(- \frac{\partial \partial Y}{\partial x^2} \right)}}{Y^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left[- \frac{\partial \partial (Y' Z')}{\partial x^2} \right]}} .$$

Cette expression sera très-approchée, si le résultat observé est fort composé.

Si ce résultat étoit composé d'une infinité d'événemens simples, la possibilité de ces événements seroit par le n^o 37, égale à celle qui rend le résultat observé, le plus probable ; on peut donc sans erreur sensible calculer la probabilité d'un résultat futur peu composé, en supposant la possibilité des événements simples égale à celle qui rend la probabilité d'un événement très-composé, un *maximum* ; mais cette supposition cesseroit d'être exacte, si le résultat futur étoit lui-même très-composé ; voyons jusqu'à quel point on peut en faire usage.

Le résultat observé étant composé d'un très-grand nombre d'événemens simples, supposons que le résultat futur soit
 beaucoup

beaucoup moins composé ; l'équation qui donne la valeur de a' correspondante au *maximum* de $y z$ est

$$0 = \frac{\partial y}{y \partial x} + \frac{\partial z}{z \partial x};$$

$\frac{\partial y}{y \partial x}$ est une quantité très-grande de l'ordre $\frac{1}{a}$, & puisque le résultat futur est très-peu composé par rapport au résultat observé, $\frac{\partial z}{z \partial x}$ fera d'un ordre moindre que nous supposons égal à $\frac{1}{a' - \lambda}$; ainsi, a étant la valeur de x , qui satisfait à l'équation $0 = \frac{\partial y}{y \partial x}$, la différence entre a & a' fera de l'ordre a^λ , & l'on pourra supposer

$$a' = a + a^\lambda \cdot \mu.$$

Cette supposition donne

$$Y' = Y + a^\lambda \cdot \mu \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{a^{2\lambda} \cdot \mu^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \&c;$$

mais on a $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$, d'où il est facile de conclure que $\frac{\partial^n Y}{\partial x^n}$ est d'un ordre égal ou moindre que $\frac{1}{a^{\frac{n}{2}}}$;

le terme $\frac{a^{n\lambda} \cdot \mu^n}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{\partial^n Y}{\partial x^n}$ fera par conséquent de l'ordre $a^{n \cdot (\lambda - \frac{1}{2})}$. Ainsi la convergence de l'expression en série de Y' suppose $\lambda > \frac{1}{2}$, & dans ce cas Y' se réduit à peu-près à Y .

Si l'on nomme Z ce que devient z , lorsqu'on y fait $x = a$, on s'assurera de la même manière que Z' se réduit à Z .

Enfin, on prouvera par un raisonnement semblable, que $\frac{\partial \partial (Z' Y')}{\partial x^2}$ se réduit à très-peu-près à $Z \cdot \frac{\partial \partial Y}{\partial x^2}$; en substituant ces valeurs dans l'expression de P , on aura

$$P = Z;$$

c'est-à-dire, que l'on peut dans ce cas déterminer la probabilité du résultat futur, en supposant x égal à la valeur qui rend le résultat observé, le plus probable; mais il faut pour cela, que le résultat futur soit assez peu composé, pour que les exposans des facteurs de z , soient d'un ordre moindre que la racine carrée des exposans des facteurs de y ; si cela n'est pas, la supposition précédente expose à des erreurs sensibles.

Si le résultat futur est une fonction du résultat observé; z sera une fonction de y , que nous représenterons par $\phi(y)$; la valeur de x qui rend yz un *maximum* est dans ce cas la même que celle qui répond au *maximum* de y ; on aura ainsi $a' = a$, & si l'on désigne $\frac{\partial \phi(y)}{\partial y}$ par $\phi'(y)$, l'expression de P donnera en observant que $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$.

$$P = \frac{\phi(Y)}{\sqrt{1 + Y \cdot \frac{\phi'(Y)}{\phi(Y)}}};$$

Soit $\phi(y) = y^n$, en sorte que l'événement futur soit n fois la répétition de l'événement observé, on aura

$$P = \frac{Y^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Cette probabilité déterminée dans la supposition que la possibilité des événemens simples est égale à celle qui rend le résultat observé, le plus probable, est égale à Y^n ; on voit par-là, que les petites erreurs qui résultent de cette supposition, s'accroissent en raison des événemens simples qui entrent dans le résultat futur, & deviennent très-sensibles, lorsque ces événemens y sont en grand nombre.

X L I I I.

DEPUIS 1745, où l'on a commencé à distinguer à Paris, les naissances des garçons de celles des filles, on a constamment observé que le nombre des premières étoit supérieur

à celui des secondes; ce qui peut donner lieu de rechercher combien il est probable que cette supériorité se maintiendra dans l'espace d'un siècle.

Soit p le nombre observé des naissances des garçons à Paris; q celui des filles; $2n$ le nombre annuel des naissances; x la possibilité des naissances des garçons. Le binôme $(x + 1 - x)^{2n}$ donne par son développement,

$$x^{2n} + 2n \cdot x^{2n-1} \cdot (1-x) + \frac{2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{2n-2} \cdot (1-x)^2 + \&c;$$

& la somme des n premiers termes, sera la probabilité que le nombre des garçons l'emportera, chaque année, sur celui des filles. Nommons z cette somme; z^i sera la probabilité que cette supériorité se maintiendra durant le nombre i d'années consécutives. Partant si P désigne la vraie probabilité que cela aura lieu, on aura par le n^o 41,

$$P = \frac{\int x^p \cdot \partial x \cdot z^i \cdot (1-x)^q}{\int x^p \cdot \partial x \cdot (1-x)^q};$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Si l'on nomme a la valeur de x qui répond au *maximum* de $x^p \cdot z^i \cdot (1-x)^q$, & que l'on désigne par Z , $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, ce que deviennent z , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, lorsqu'on y change x en a ; on aura par le n^o 6,

$$\int x^p \cdot z^i \cdot \partial x \cdot (1-x)^q = \frac{a^{p+1} \cdot (1-a)^{q+1} \cdot Z^i \cdot \sqrt{2\pi}}{\sqrt{[p \cdot (1-a)^2 + q \cdot a^2 + i \cdot a^2 \cdot (1-a)^2 \cdot (\frac{\partial^2 Z}{Z^2} - \frac{Z \partial^2 Z}{\partial x^2})]}}$$

z étant la somme des n premiers termes de la fonction

$$x^{2n} \cdot [1 + 2n \cdot \frac{1-x}{x} + \frac{2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (\frac{1-x}{x})^2 + \&c.],$$

on a par le n^o 21,

$$z = \frac{\int \frac{u^{n-1} \cdot \partial u}{(1+u)^{2n+1}}}{\int \frac{u^{n-1} \cdot \partial u}{(1+u)^{2n+1}}},$$

M m m ij

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $u = \frac{1-s}{x}$ jusqu'à $u = \infty$, & celle du dénominateur étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$. soit $u = \frac{1-s}{s}$, cette valeur de z deviendra

$$z = \frac{f s^n \cdot \partial s \cdot (1-s)^{n-1}}{f s^n \cdot \partial s \cdot (1-s)^{n-1}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$, & celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$; de-là il est aisé de conclure

$$\frac{\partial z}{z \partial x} = \frac{x^n \cdot (1-x)^{n-1}}{f s^n \partial s \cdot (1-s)^{n-1}}; \quad \frac{\partial \partial z}{z \partial x^2} = \frac{\partial z}{z \partial x} \cdot \frac{[n - (2n-1)x]}{x \cdot (1-x)},$$

l'intégrale étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = x$. En changeant x en a , on aura les valeurs de Z , $\frac{\partial Z}{Z \partial x}$, $\frac{\partial \partial Z}{Z \partial x^2}$; toute la difficulté se réduit donc à déterminer a .

Sa valeur est donnée par l'équation

$$0 = \frac{p}{a} - \frac{q}{1-a} + i \cdot \frac{\partial Z}{Z \partial x};$$

d'où l'on tire, en substituant au lieu de $\frac{\partial Z}{Z \partial x}$, la valeur précédente,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i \cdot a^{n+1} \cdot (1-a)^n}{(p+q) \cdot f s^n \cdot \partial s \cdot (1-s)^{n-1}};$$

l'intégrale étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a$; c'est l'équation d'après laquelle il faut déterminer a . Pour cela, nous observerons que a étant plus grand que $\frac{p}{p+q}$, il surpasse sensiblement la valeur de s , qui répond au *maximum* de $s^n \cdot (1-s)^{n-1}$; ainsi n étant un grand nombre, on pourra supposer dans l'équation précédente, que l'intégrale est prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$, ce qui donne, par le n.^o 6,

$$\int s^n \cdot \partial s \cdot (1-s)^{n-1} = \frac{s^{n+\frac{1}{2}} \cdot (1-s)^{n-1} \cdot \sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n} \cdot \sqrt{n}};$$

l'équation qui détermine a , deviendra ainsi à très-peu près,

$$a = \frac{p}{p+q} + \frac{i \cdot a^{n+1} \cdot (1-a)^n \cdot 2^{2n} \cdot \sqrt{n}}{(p+q) \cdot \sqrt{\pi}}.$$

Pour la résoudre, nous observerons que a diffère très-peu de

$$\frac{p}{p+q}, \text{ en sorte que si l'on suppose } a = \frac{p}{p+q} + \mu,$$

μ fera fort petit, & l'on aura d'une manière très-approchée,

$$\mu = \frac{i \cdot \sqrt{n} \cdot 2^{2n} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^n}{(p+q) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\pi \mu \cdot \frac{(p+q) \cdot (p-q)}{pq}}.$$

Maintenant si l'on divise par 26, la somme des naissances observées à Paris depuis 1745 jusqu'en 1770; on aura à très-peu près, 19000, pour le nombre annuel des naissances; nous supposons ainsi $n = 9500$, $i = 100$; on a d'ailleurs $p = 251527$, $q = 241945$. L'équation précédente deviendra donc

$$\mu = 0,000157929 \cdot e^{-\mu \cdot 738,144};$$

d'où l'on tire

$$\mu = 0,00014222,$$

& par conséquent

$$a = 0,5098509.$$

Le radical

$$\sqrt{[p \cdot (1-a)^2 + q a^2 + i \cdot a^2 (1-a)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 Z - Z \partial \partial Z}{Z^2 \partial x^2}\right)]}$$

devient en substituant, au lieu de $\frac{\partial \partial Z}{Z \partial x}$ sa valeur

$$\frac{\partial Z}{Z \partial x} \cdot \frac{n - (2n-1) \cdot a}{a \cdot (1-a)}, \text{ \& au lieu de } \frac{\partial Z}{Z \partial x} \text{ sa valeur}$$

$$\frac{(p+q) \cdot a - p}{i \cdot a (1-a)} \text{ ou } \frac{(p+q) \cdot \mu}{i \cdot a (1-a)}, \text{ donnée par l'équation du maximum,}$$

$$\sqrt{\{p.(1-a)^2 + qa^2 + \mu.(p+q).[\frac{(p+q).\mu}{i} + (2n-1).a-n]\}} \\ = 369,419;$$

d'ailleurs on a à très-peu-près

$$a^p(1-a)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \cdot e^{-\frac{\mu^2.(p+q)^3}{2pq}},$$

&

$$e^{-\frac{\mu^2.(p+q)^3}{2pq}} = 0,980229;$$

on aura donc

$$\int x^p \cdot Z^{100} \cdot \partial x (1-x)^q \\ = 0,000663199 \cdot \sqrt{(2\pi)} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \cdot Z^{100}.$$

On a ensuite par le n.^o 6, en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$\int x^p \partial x \cdot (1-x)^q \\ = \frac{p^{p+\frac{1}{2}} \cdot q^{q+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(2\pi)}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}} = 0,000711634 \cdot \sqrt{(2\pi)} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^q;$$

d'où l'on tire

$$P = 0,931938 \cdot Z^{100},$$

en sorte qu'il ne s'agit plus que d'avoir Z .

On a

$$Z = \frac{\int s^n \cdot \partial s \cdot (1-s)^{n-1}}{\int s^n \cdot \partial s \cdot (1-s)^{n-1}}.$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a$; celle du dénominateur étant prise depuis $s = 0$ jusqu'à $s = 1$; il est aisé d'en conclure que si l'on fait $1-s = s'$, on aura

$$Z = 1 - \frac{\int s'^{n-1} \cdot \partial s' \cdot (1-s')^n}{\int s'^{n-1} \cdot \partial s' \cdot (1-s')^n},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $s^1 = 0$ jusqu'à $s^1 = 1 - a$, celle du dénominateur étant prise depuis $s^1 = 0$ jusqu'à $s^1 = 1$. On aura ainsi à fort peu-près par le n.^o 6,

$$Z = 1 - \frac{\int \partial t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} ,$$

l'intégrale relative à t , étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = (n - 1) \cdot \log. \frac{1}{2 \cdot (1 - a)} + n \cdot \log. \frac{1}{2a} ,$$

ces logarithmes étant hyperboliques. On peut donner à cette expression de T^2 , cette forme très-approchée,

$$T^2 = (n - 1) \cdot \log. \frac{p+q}{2q} + n \cdot \log. \frac{p+q}{2p} + \frac{n\mu \cdot (p+q) \cdot (p-q)}{pq} ;$$

& l'on en tirera

$$T^2 = 3,66793 .$$

Si l'on fait usage de la formule (c') du n.^o 37; on aura

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - 0,136317 + 0,055747 \\ - 0,037996 + 0,036256 - \&c. \end{array} \right\}$$

Cette série est peu convergente; mais elle a l'avantage de donner alternativement une somme plus grande & plus petite que la véritable, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes pair ou impair; en ajoutant donc à la somme des quatre premiers termes, la moitié du cinquième, l'erreur sera moindre que cette moitié, & par conséquent au-dessous de $\frac{1}{50}$ de la somme entière; on aura ainsi

$$\int \partial t . e^{-t^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T} \cdot 0,899562 ;$$

ce qui donne

$$Z = 0,9966174 ;$$

& par conséquent

$$P = 0,664 ;$$

il y a donc à très-peu-près deux contre un à parier que dans l'espace d'un siècle, les naissances des garçons l'emporteront, chaque année, à Paris, sur celles des filles.

X L I V.

LES recherches précédentes suffisent pour faire voir les avantages de l'analyse exposée au commencement de ce Mémoire, dans la partie de la théorie des Hasards, où il s'agit de remonter des évènements observés, à leurs possibilités respectives, & de déterminer la probabilité des évènements futurs. Cette analyse n'est pas moins utile dans la solution des problèmes où l'on cherche la probabilité d'un résultat formé d'un grand nombre d'évènements simples, dont les possibilités sont connues : pour en donner un exemple, nous supposons que l'on se propose d'avoir la probabilité que tous les numéros d'une loterie composée de n numéros, & dont il en sort un à chaque tirage, seront tous sortis après le nombre i de tirages.

J'ai donné dans le *tome VI des Mémoires des Savans Étangers*, la solution de ce problème, quel que soit le nombre de numéros que l'on amène à chaque tirage, & il en résulte que dans le cas où il ne sort à chaque tirage, qu'un seul numéro, si l'on nomme y_i la probabilité que tous les numéros seront sortis après le nombre i de tirages, on aura

$$y_i = \frac{\Delta^n \cdot s^i}{n^i},$$

le caractèreistique Δ étant celle des différences finies, & s devant être supposé nul dans le résultat final. Cette expression fort simple en apparence conduiroit à des calculs impraticables, si n & i étoient de très-grands nombres ; il seroit beaucoup plus difficile encore d'en conclure le nombre i , auquel répond une valeur donnée de y_i ; mais on peut aisément déterminer ce nombre par les formules du *n.º 27*.

La formule (μ') de ce *n.º* donne à très-peu-près,

$$\Delta^n . s^i = \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} . e^{ia-i} . (e^a - 1)^n}{\sqrt{\left[\frac{i \cdot (i+1)}{a^2} - \frac{n i \cdot e^a}{(e^a - 1)^2}\right]}} \cdot \left[1 + \frac{15 \cdot l^2 - 12 l l''}{16 \cdot l^3} + \frac{\gamma}{12 \cdot l}\right],$$

a, l, l', l'' étant donnés par les équations suivantes :

$$0 = \frac{i+1}{a} - s - \frac{\pi e^a}{e^a - 1};$$

$$l = -\frac{(i+1)}{2 a^2} - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right)^2;$$

$$l' = -\frac{(i+1)}{3 a^3} + \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right)^2 \\ + \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right)^3;$$

$$l'' = -\frac{(i+1)}{4 a^4} - \frac{\pi}{24} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right) + \frac{7\pi}{24} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right)^2 \\ - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right)^3 + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{e^a}{e^a - 1}\right)^4.$$

Si l'on suppose $s = 0$ & e^a , de l'ordre n ou i ; ces équations deviendront

$$a = \frac{i+1}{n} \cdot (1 - e^{-a}),$$

$$l = -\frac{(i+1)}{2 a^2}; \quad l' = -\frac{(i+1)}{3 a^3}; \quad l'' = -\frac{(i+1)}{4 a^4};$$

la formule précédente donnera donc dans ce cas,

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = \frac{\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} \cdot e^{na-i} \cdot (1 - e^{-a})^{n-i}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{i+1-n a}{n}\right)\right]}}.$$

or, on a

$$\left(\frac{i}{i+1}\right)^{i+\frac{1}{2}} = e^{-1},$$

& si l'on fait $e^{-a} = z$, z étant supposé une très-petite fraction de l'ordre $\frac{1}{i}$, on aura

$$(1 - e^{-a})^{n-i} = e^{(i-n)z} \cdot \left(1 + \frac{i-n}{2} \cdot z^2\right);$$

$$i + 1 - na = (i + 1) \cdot z.$$

On aura donc à très-peu-près

$$\frac{\Delta^2 . i}{n^i} = e^{-nz} \cdot \left(1 + \frac{i - 2n}{2n} \cdot z + \frac{i - n}{2} \cdot z^2\right) = y_i.$$

Pour déterminer z , nous observerons que l'équation $a = \frac{i + 1}{n} \cdot (1 - z)$, donne pour première valeur de a , $a = \frac{i}{n}$; en désignant donc $e^{\frac{-i}{n}}$ par q , nous aurons pour une première valeur de z , $z = q$; cette valeur substituée dans l'expression de a , donne pour seconde valeur de cette quantité, $a = \frac{i + 1}{n} - \frac{i}{n} q$; en la substituant dans l'équation $z = e^{-a}$, on aura pour seconde valeur de z ,

$$z = q \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{i}{n} q\right),$$

d'où il est aisé de conclure

$$y_i = e^{-nq} \cdot \left(1 + \frac{i}{2n} \cdot q - \frac{i + n}{2} \cdot q^2\right).$$

Cette valeur de y_i sera très-approchée, si n & i étant de forts grands nombres, q est de l'ordre $\frac{1}{n}$; & c'est ce qui aura toujours lieu, lorsque y_i ne sera pas une fraction très-petite, car alors e^{-nq} ne sera pas un très-petit nombre, ce qui suppose q de l'ordre $\frac{1}{n}$.

Soit $y_i = \frac{1}{2}$, & cherchons le nombre i de tirages auquel cette probabilité correspond. Nous aurons, pour la déterminer, les deux équations suivantes;

$$q - \frac{i}{2n^2} \cdot q + \frac{i + n}{2n} \cdot q^2 = \frac{\log_2 2}{n},$$

$$i = -n \cdot \log q,$$

ces logarithmes étant hyperboliques.

Soit $n = 10000$, on a

$$\log. \text{ hyperb. } 2 = 0,6931472;$$

la première des deux équations précédentes donne pour première valeur de q , en négligeant les termes $-\frac{i}{2n^2} - q$,

$$\& \frac{i + n}{2n} \cdot q^2,$$

$$q = 0,00006931472.$$

Cette valeur étant de l'ordre $\frac{1}{n}$, on voit que c'est ici le cas d'employer l'expression précédente de y . La seconde équation donne

$$i = 95768,5.$$

Cette valeur peut différer encore de quelques unités de la véritable ; mais en corrigeant la valeur de q , par son moyen, on aura

$$q = 0,00006932250;$$

ce qui donnera pour seconde valeur de i ,

$$i = 95767,41;$$

d'où il suit qu'il y a un peu moins d'un contre un à parier que tous les numéros sortiront après 95767 tirages, & qu'il y a un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront après 95768 tirages.



SUITE DES RECHERCHES
S U R
LA STRUCTURE DU CERVEAU.
 Par M. VICQ-D'AZYR.

QUATRIÈME MÉMOIRE.

*Sur la structure du cerveau des Animaux comparé
 avec celui de l'Homme.*

Lû
 en 1781.

PARMI les êtres dont l'homme est environné, les uns semblent partager ses plaisirs & ses peines, éprouver des sensations analogues aux siennes, obéir aux mêmes besoins : les autres, insensibles à tout ce qui les approche, n'ayant pas même le plus léger sentiment de leur existence, sont régis par la force générale qui meut la matière.

Se mouvoir, digérer, se nourrir, séparer différens sucs, se reproduire, sont des fonctions que les brutes exercent au moins aussi-bien que l'homme ; mais la sensibilité est portée, dans ce dernier, à un degré de perfection, dont celle des autres animaux n'est pas susceptible.

Il semble, au premier coup-d'œil, qu'il suffise d'examiner les viscères de l'homme & ceux des brutes, pour y trouver la raison de cette différence ; mais la sensibilité est une fonction tellement supérieure à toutes les autres, & l'on connoît si peu ses rapports avec l'organe auquel elle appartient, que toutes les recherches anatomiques ont été jusqu'ici insuffisantes pour la solution de ce problème.

Si les Physiciens s'en étoient tenus à leur ignorance, & sur-tout s'ils avoient eu la bonne foi d'en convenir, il n'y auroit eu aucun reproche à leur faire ; mais au défaut de connoissances positives, ils ont publié de longues & inutiles dissertations sur l'ame des bêtes, sur son siège, sur le dépar-

tement de chacune de ses facultés ; & les meilleurs ouvrages ont été infectés de ces erreurs.

Au milieu de ces préjugés, si l'on consulte l'expérience & la raison, on est forcé d'avouer que tout ce que l'on fait sur les fonctions des nerfs & du cerveau, se réduit à peu près aux trois propositions suivantes.

1.^o Le cerveau, le cervelet, la moelle allongée, la moelle épinière & les nerfs, sont les organes immédiats de la sensibilité, qui ne peut exister sans eux.

2.^o En même temps que les nerfs sont les instrumens des sensations, ils sont aussi ceux dont la volonté se sert pour mouvoir les muscles.

3.^o L'action nerveuse établit entre toutes les parties du corps humain auxquelles elle s'étend, une correspondance, une sympathie, qui, réunissant tous les efforts des diverses puissances organiques, maintiennent entr'elles une harmonie déterminée par les impressions reçues & transmises dans tout le système nerveux. Les sensations, le mouvement des muscles & les sympathies des viscères, sont donc les trois principaux effets de cette influence.

En partant de ces principes bien avoués, nous avons essayé de nous élever, non à la connoissance du mécanisme des fonctions intellectuelles, ce que nul Physicien n'oseroit peut-être entreprendre, mais à celle de la disposition qui est particulière au cerveau de l'homme, & qui le distingue de celui des animaux dans lesquels la sensibilité a en général moins d'étendue & d'énergie.

J'ai pensé que, pour faire cette comparaison d'une manière utile, il falloit considérer d'abord le cerveau de l'homme ; c'est ce que j'ai fait dans trois Mémoires publiés par l'Académie, parmi ceux de l'année 1781 : j'ai pensé qu'il falloit, après l'avoir décrit, le comparer avec celui des animaux ; c'est ce que je me propose de faire dans ce Mémoire. Je me suis borné à l'examen du cerveau d'un certain nombre d'individus pris dans les divers ordres du système animal : j'ai cru que, pour être plus clair & pour obtenir des résultats plus faciles à saisir,

je devois être précis dans mes descriptions. Les détails qui pourroient manquer ici, se trouveront dans les explications ajoutées à ce Mémoire ou dans mon Ouvrage sur le cerveau.

Quadrupèdes. Quoique l'on trouve dans le cerveau des quadrupèdes presque toutes les parties qui se présentent dans celui de l'homme, il y a cependant entre ces deux organes des différences très-remarquables : la principale consiste dans la petitesse des hémisphères cérébraux, à la partie antérieure desquels on ne voit point le sillon de Sylvius, & qui ne sont séparés que par une production falciforme très-étroite. Les tubercules quadrijumeaux, la voûte à trois piliers, l'origine de la corne d'amon & les corps bordés, ont au contraire un volume plus considérable que dans l'homme. Il existe à peine dans les quadrupèdes quelques traces du prolongement postérieur des ventricules supérieurs. J'ai observé que, dans la plupart de ces animaux, les circonvolutions cérébrales d'un côté ressembloient beaucoup à celles de l'autre, tandis que dans l'homme elles offrent toujours des différences : la glande pinéale est allongée & plus dure ; les péduncules sont plus exprimés ; le *septum lucidum*, la membrane médullaire qui ferme le troisième ventricule dessus & devant le nerf optique, & celle qui compose la valvule du cerveau, sont très-minces : les prolongemens latéraux de la commissure antérieure se recourbent en devant : les couches optiques (a) adhèrent dans une très-grande étendue, & les éminences mamillaires, presque réunies en une dans les ruminans, sont écartées & placées à peu près comme celles de l'homme dans les fissipèdes. Dans le lièvre, & en général dans les *glires*, les lobes cérébraux manquent presque tout-à-fait de circonvolutions, & présentent une voûte unie, ce qui diminue beaucoup en eux la surface de ce viscère. Les nerfs olfactifs sont un mélange de substance grise & blanche : leur volume est très-considérable, & ils ont une cavité qui communique, par une ouverture étroite, avec les ventricules latéraux.

(a) Les tubercules antérieurs de ces couches sont à peine remarquables.

L'entonnoir (*b*) est très-gros, ainsi que la glande pituitaire; la protubérance annulaire fait moins de saillie que dans l'homme, & les éminences pyramidales & olivaires manquent presque entièrement.

Le cervelet est principalement composé du *vermis* qui est très-renflé, & dont une extrémité s'enfonce dans le quatrième ventricule; les parties latérales de cet organe sont étroites, on n'y trouve point le corps festonné, & la tache noire n'existe point dans les jambes cérébrales: je crois devoir principalement insister sur la grosseur des nerfs, qui est excessive; ainsi d'une part, dans l'homme, le volume du cerveau est plus grand & fournit moins, tandis que de l'autre, dans les quadrupèdes, les nerfs sont plus volumineux & correspondent à une plus petite masse de substance blanche.

La perfection de la sensibilité ne paroît pas tenir aux tubercules quadrijumeaux, ni à la voûte à trois piliers, ni aux couches optiques, ni aux corps bordés, ni aux corps striés, ni à la glande pinéale, ni à l'entonnoir, ni à la glande pituitaire, puisque plusieurs de ces parties sont plus considérables dans les quadrupèdes que dans l'homme: les caractères propres à ce dernier sont donc, le grand volume des hémisphères, l'étendue des parties latérales du cervelet, le développement du pont-de-varole, l'existence des éminences olivaires & pyramidales, celle des corps festonnés ou rhomboïdaux, & la grosseur de la masse du cerveau, relativement aux nerfs qui en sortent.

Le cerveau des oiseaux est fait sur un autre plan que celui de l'homme & des quadrupèdes; il est composé de quatre tubercules pairs & de deux impairs; des premiers qui sont les plus élevés, sortent les nerfs de la première paire ou olfactifs; ces tubercules sont composés de substance cendrée, entre-coupée vers le bas par quelques stries blanches;

Oiseaux.

(*b*) La cavité du pavillon de l'entonnoir se prolonge beaucoup plus que dans l'homme.

ils n'ont point de circonvolutions , leur paroi interne est recouverte par une lame médullaire qui en est séparée, dans une partie de leur étendue , par une cavité fort étroite analogue aux ventricules latéraux: ces deux tubercules sont réunis par deux commissures, dont la postérieure touche au cervelet , & entre lesquelles est le pavillon de l'entonnoir: les deux tubercules inférieurs donnent naissance à un bouton d'où sortent les nerfs optiques; ces tubercules sont posés sur deux lignes divergentes en arrière, dans l'intervalle desquelles se trouvent la protubérance annulaire & le cervelet: les tubercules optiques sont creux , & leur cavité s'ouvre, ainsi que celle des ventricules latéraux, sur les côtés du quatrième ventricule.

On fait que le sens de la vue est le plus développé dans les oiseaux, dont le volume de l'œil égale presque celui du cerveau: le sens de l'odorat est au contraire le plus étendu dans les quadrupèdes; & par une analogie remarquable, les couches optiques des uns & les nerfs olfactifs des autres sont également excavés.

Le cervelet des oiseaux est étroit & long, il est entièrement formé de plusieurs petits bourelets parallèles & horizontaux, de sorte qu'on peut le regarder comme répondant seulement au processus vermiforme; deux petits renflemens se voient sur les côtés, ses ramifications sont simples, & tout au plus doubles dans quelques-unes de leurs terminaisons: entre le cervelet & les lobes antérieurs il y a une petite production molle, de forme ovale & de couleur grise; la protubérance annulaire est large & peu arrondie, l'entonnoir la sépare du bouton optique, & il n'y a dans la moelle allongée ni éminences olivaires ni corps pyramidaux: j'ai trouvé dans la base du cerveau, des oiseaux les neuf paires de nerfs.

La huitième paire a des ramifications très-nombreuses, elle fournit des branches au cœur, au poulmon & à l'estomac; & elle communique avec des *plexus* situés derrière le poulmon le long de l'épine, & avec ceux du ventre. La cinquième
paire

paire est très-étendue; & la quatrième naît, comme dans l'homme, près du cervelet.

D'après cette description du cerveau des oiseaux, il est évident que la Nature leur a refusé les grands hémisphères & les circonvolutions, le corps calleux, la voûte à trois piliers, les cornes d'ammon, les corps bordés, le *tania semi-circularis*, les tubercules quadrijumeaux, la glande pinéale, les parties latérales du cervelet, les éminences mamillaires, les corps olivaires, les corps pyramidaux; & que les organes qu'elle leur a conservés sont disposés dans un ordre différent de celui qui nous étoit connu (c).

Parmi les oiseaux de diverses familles dont j'ai examiné le cerveau, aucun ne m'a présenté des variétés remarquables, & qui s'écartassent assez de la description que j'ai faite, pour mériter une attention particulière. Il n'en est pas de même des poissons; on trouve difficilement dans leurs différentes classes, deux cerveaux semblables. En général, le cerveau des poissons est composé de plusieurs tubercules dont les antérieurs qui offrent, dans quelques-uns, des incisions ou petites circonvolutions, sont destinés à fournir les nerfs olfactifs. Des moyens qui sont creux, sortent en devant & en dessous, les nerfs optiques; le tubercule postérieur qui est toujours fort petit, tient lieu de cervelet; ce dernier, divisé, n'offre qu'une ou deux stries blanches. Une ou plusieurs éminences placées dans les ventricules optiques, correspondent aux tubercules quadrijumeaux. Le quatrième ventricule communique avec ceux des couches ou corps optiques; l'entonnoir se trouve dans la base, & son pavillon tient lieu de troisième ventricule; les éminences mamillaires sont très-grosses. Les neuf paires de nerfs peuvent être démontrées dans la base du cerveau; & tout cet appareil excède à peine le volume d'un des yeux de l'animal. La huitième paire se distribue aux ouïes & au cœur.

Poissons;

(c) Il suit de-là, que les parties ci-dessus énoncées ne sont pas absolument nécessaires pour les sensations & le mouvement des muscles, puisqu'il existe un système dans lequel ces fonctions se font très-bien sans elles.

Dans les poissons anguilliformes, tels que le congre, il y a sept tubercules, dont six pairs, & un impair qui est le cervelet, entre lequel & la moelle allongée, on découvre un prolongement transversal de substance cendrée. Le quatrième ventricule communique avec les tubercules du troisième ordre, placés devant le cervelet; & entre ceux du second il y a une commissure.

Dans le cabillaud, on trouve cinq tubercules, deux olfactifs, deux optiques & le cervelet; les nerfs optiques se croisent; le cervelet fendu n'offre qu'une seule strie blanche, placée au milieu de la substance corticale; structure qui est commune à tous les poissons; & derrière le cervelet est un prolongement transversal de substance grise, comme dans l'ordre précédent.

Dans les épineux arrondis & dans les épineux plats, la structure est à peu-près la même que dans les poissons à nageoires molles, si ce n'est que plusieurs ont les quatre tubercules quadrijumeaux, comme le brochet.

Les nerfs optiques se croisent dans les poissons épineux; & dans plusieurs de ceux à nageoires molles. Dans le turbot, ces nerfs sont de longueur inégale; ils sont très-durs, & composés de filamens serrés & nombreux; &, ce qu'il y a de remarquable, c'est que l'aire de ces deux nerfs coupés, surpasse celle du tubercule bulbeux d'où ils sortent, & égale presque celle de tout le cerveau.

La description du cerveau des poissons avoit déjà été publiée par le célèbre M. Camper; les observations que j'ai faites sur des poissons différens de ceux qu'il a disséqués, sont d'accord avec les siennes; il n'y a qu'un seul point dans lequel je ne suis point du même avis que cet illustre Anatomiste. Je ne pense pas avec lui, que l'on doive regarder comme un corps calleux la jonction supérieure des tubercules optiques, ni comme des ventricules latéraux, les cavités de ces mêmes tubercules; & je me fonde, 1.^o sur ce que la réunion supérieure des couches optiques des poissons, se borne à ces corps & n'intéresse point le reste du cerveau; 2.^o sur ce que,

dans les oiseaux, ces mêmes corps ont des cavités, quoiqu'il y ait des ventricules latéraux.

Le cerveau des poissons est donc principalement composé des tubercules olfactifs & des optiques; le reste de ce viscère qui est très-rétréci, devant suffire aux autres fonctions nerveuses, il est facile de sentir combien elles sont bornées.

On a pu s'apercevoir que le cerveau des poissons est, comme celui des oiseaux, formé de tubercules différemment groupés. La structure de cet organe est à peu-près la même dans les amphibies & dans les reptiles, où il est encore moins volumineux. Dans la vipère & dans la grenouille, il est composé de deux tubercules olfactifs, de deux optiques, d'un cervelet d'une petitesse excessive & qui ne forme presque qu'un point; dans la vipère, une protubérance, placée devant le cervelet, tient lieu des tubercules quadrijumeaux. Le quatrième ventricule communique avec les ventricules optiques; l'entonnoir & les nerfs sont disposés à peu-près comme dans les poissons. On trouvera dans les planches ci-jointes, une représentation assez exacte de ces divers cerveaux qui n'ont été examinés par aucun Anatomiste.

Reptiles.

Dans les insectes & dans les vers, le cerveau est composé seulement de quelques petits lobes sans cervelet; ils sont placés sur l'œsophage, ou même au-dessus de l'estomac, & plusieurs muscles sont destinés à les mouvoir. Les nerfs optiques, pour s'accommoder à ce déplacement, sont disposés en spire, la moelle épinière est formée dans son principe de deux cordons parallèles & écartés l'un de l'autre, & chacun de ces cordons est composé de tumeurs ganglio-formes, d'où sortent des nerfs qui en sont eux-mêmes dépourvus. J'ai fait voir que dans l'homme (*d*), la moelle épinière peut être également divisée en deux parties latérales très-distinctes.

Insectes
& Vers.

Pour donner une idée des conséquences qui peuvent être déduites de mes observations, j'en ferai l'application suivante.

Ne pourroit-on pas dire, par exemple, qu'en supprimant

(*d*) Volume de l'Académie pour l'année 1781.

dans le cerveau de l'homme les grands hémisphères, le corps calleux, le *septum lucidum*, la voûte à trois piliers, les cornes d'ammon & leurs annexes, la glande pinéale & ses péduncules; en composant le cervelet d'une ou deux stries fort courtes, en plaçant sur deux lignes parallèles dirigées de devant en arrière les corps striés très-rétrécis, les couches optiques creusées d'une cavité & réunies par leur partie supérieure; en aplatisant la protubérance annulaire, & en réduisant toute cette masse à un très-petit volume, le système nerveux de l'homme, seroit alors le même que celui des poissons ou des amphibiens: de même, en plaçant en-dessus les corps striés, & en les renflant plus que dans les poissons; en portant les couches optiques en-dessous, en les écartant & en les excavant, toutes les parties dont il a été question, restant d'ailleurs supprimées, le cerveau de l'homme ressembleroit à celui des oiseaux. Enfin, avec d'autres changemens plus faciles à déterminer, il seroit conformé comme celui des quadrupèdes.

Pour donner plus de poids à ces applications, il est important de remarquer qu'en considérant les organes nerveux dans toute l'étendue de la chaîne, depuis l'homme jusqu'aux reptiles, on aperçoit toujours les traces du même système qui va toujours en décroissant, les brutes ne présentant aucune partie dont l'homme ne soit pourvu, & celui-ci en ayant plusieurs qui leur manquent.

A ces réflexions sur l'anatomie du cerveau, j'en ajouterai quelques-unes sur la sensibilité en général. Il me semble que l'on peut distinguer dans l'enchaînement des différentes parties qui constituent le système nerveux, trois actions différentes: j'appelle la première *action* ou *communication nerveuse externe*; la seconde, *réaction nerveuse*; la troisième, *action* ou *communication nerveuse interne*. La première s'étend de la circonférence vers le centre; elle se passe dans les organes des sens & dans les nerfs qui communiquent leurs impressions au *sensorium commune*; la seconde s'exerce dans le *sensorium commune* lui-même, & se transmet aux nerfs qui en sortent; la troisième se propage, par leur moyen, soit jusqu'aux

muscles, pour leur faire ressentir l'aiguillon de la volonté, soit jusqu'aux viscères, pour les faire participer au ton général du système, ou pour en recevoir des modifications que leurs différens états déterminent : en sorte que l'action nerveuse qui s'étend, pour l'ordinaire, des organes des sens vers le *sensorium commune*, & de-là vers les muscles & les viscères, dans certaines circonstances, remonte de cette extrémité de la chaîne vers la première. C'est toujours en suivant des lignes droites & non interrompues, que les impressions des sens se portent au cerveau, & que la réaction nerveuse se dirige vers les muscles. Dans ces deux cas, le mouvement des cordons n'est point arrêté par des ganglions ou des plexus qui sont au contraire très-nombreux le long des nerfs sympathiques des viscères, & qui, s'ils ne les dérobent pas tout-à-fait à l'action nerveuse, suffisent au moins pour les soustraire à l'empire de la volonté dont l'influence s'égare & se perd en quelque sorte dans ces entrelacemens, & aux caprices de laquelle il étoit important que des fonctions aussi essentielles ne fussent pas fournies.

Cette distinction étant bien entendue, il sera facile de faire connoître en quoi les nerfs & le cerveau de l'homme l'emportent sur ceux de la brute. Les cordons nerveux qui établissent les communications Internes & externes, sont disposés à peu-près de la même manière dans l'un & dans l'autre. Ils sont tous placés entre deux pulpes nerveuses, soit entre celle des organes des sens & celle du *sensorium commune*, comme les cordons destinés aux sensations, c'est-à-dire, à l'action ou communication nerveuse externe; soit entre cette dernière & celle qui est répandue dans le tissu des muscles ou des viscères, comme les cordons qui servent aux communications nerveuses internes. Cette dernière pulpe devant être à peu-près semblable dans l'homme & dans les animaux, il nous reste à rechercher la principale raison de leurs différences dans la structure des organes des sens & dans celle de la masse cérébrale.

Sous le premier rapport, on sent combien l'homme a

d'avantage par la délicatesse & l'étendue du toucher : ses doigts sont un instrument d'adresse & de sensibilité : il n'y a pas dans toute la surface de son corps un point où cette fonction ne s'exerce , tandis que presque toutes les parties externes des animaux sont encroûtées & endurcies.

Sous le second rapport , la prééminence est encore plus marquée : dans plusieurs classes d'animaux , les nerfs correspondent seulement à quelques éminences cérébrales pulpeuses qui sont interposées entre les cordons destinés aux actions nerveuses externes & internes , & ces tubercules déterminent d'une manière qui nous est inconnue , la réaction nécessaire pour les besoins physiques ; les viscères en reçoivent la vie , & les muscles , le mouvement : ils suffisent donc à ce genre d'existence. Si l'homme étoit réduit aux mêmes organes , il en recevrait les mêmes services : non-seulement la Nature ne les lui a pas refusés , mais elle lui en a encore accordé plusieurs autres qui forment une masse excédante , dont l'usage est sans doute de concourir à la perfection des fonctions intellectuelles : c'est-là que les images se peignent avec plus d'étendue & se combinent avec plus de fécondité. Dans la brute , les sensations concentrées & liées avec un certain ordre de mouvemens , ne peuvent offrir qu'un petit nombre de variétés ; dans l'homme , l'action qu'elles excitent , en même temps qu'elle détermine des contractions musculaires ou sympathiques dont le mécanisme est le même dans les animaux , se réfléchit en quelque sorte dans la masse pulpeuse qui lui est particulière , & s'y modifie avec des nuances dont le nombre croît & se multiplie dans une progression très-rapide , en raison des organes sur-ajoutés.

Il y a donc dans le cerveau de l'homme une partie automatique qui en forme principalement la base , & au-dessus des tubercules qui la constituent , est une région plus élevée & destinée à des usages plus importans , comme il y a dans son ame un degré de perfection d'où naît sa supériorité , rapprochement que je m'étois proposé d'établir & de prouver par l'observation.

CERVEAU DES QUADRUPÈDES.

Explication des Planches.

P L A N C H E I.^{re}

CETTE Planche représente le cerveau & le cervelet du cheval, vu en dessus, après avoir enlevé la dure-mère. L'artiste a dessiné avec la plus grande exactitude & en grandeur naturelle toutes les circonvolutions, telles qu'elles se sont offertes à lui.

10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13. Coupe horizontale des os du crâne, qui sont très-épais en 11, 12 & 13.

31, 27, 32, 22, 32, 27, 31. Le cerveau.

1, 1, 1. Séparation longitudinale des deux hémisphères du cerveau; la faux qui s'y enfonce est réticulaire & peu étendue, son tissu laisse des vides très-considérables, environnés de mailles ligamenteuses.

On distingue deux ordres de circonvolutions, dont les unes sont à-peu-près semblables & se répondent symétriquement de chaque côté, tandis que les autres diffèrent. C'est ainsi que celles marquées 13, 13, 17, 17, 15, 15, 27, 27, 20, 20, 21, 21, 22, 22, offrent une grande ressemblance dans leur volume & dans leurs contours: les circonvolutions 27, 27, &c. 31, 31, 32, 32, &c. n'ont au contraire aucune analogie entr'elles; c'est sur-tout le long du bord interne de chaque hémisphère, c'est-à-dire, le long du sinus longitudinal supérieur, que cette ressemblance est la plus marquée.

33, 33, 33. Région postérieure du cerveau & supérieure du cervelet où s'enfonce la dure-mère pour former la tente qui y devient facilement osseuse & qu'il est difficile d'en extraire.

29, 30, 24, 24, 30, 26, 29. Le cervelet.

22. Portion antérieure du *vermis*, dont le reste est caché par les hémisphères cérébraux.

3. Renflement moyen & supérieur du *vermis*.

4, 5, 6. Trois divisions, renflemens ou lobules formant en arrière la continuation du *vermis*, & dont l'un 4 se porte à droite; c'est au-dessous des lobules 5, 6, & dans le milieu, que commence le *vermis*.

7, 7. Lobule, ou renflement supérieur du cervelet, qui, vers 28, 28, se divise en deux autres petits lobules.

23, 23. Petits renflemens du cervelet placés en arrière, au-dessous des précédens.

24, 24. Lobules, ou renflemens postérieurs du cervelet, dont on ne voit qu'une partie.

25, 25, 29, 29, 30, 30. Trois petits lobules du cervelet groupés de chaque côté ; on en voit un de plus en 26, parce que l'os étoit plus coupé de ce côté-là que de l'autre.

P L A N C H E I I.

Figure première. Cette Figure représente le cerveau du mouton en grandeur naturelle, vu en dessus après en avoir détaché la dure-mère. L'artiste en a dessiné tous les contours avec la plus rigoureuse exactitude.

18, 18, 18, 18, 19, 19. Le cerveau.

21, 21, 21. Bords internes des deux hémisphères ; la dure-mère s'y enfonce très-peu ; & , à proprement parler, il n'y a point de faux dans le mouton.

Les circonvolutions du cerveau du mouton, considérées de chaque côté, se correspondent avec beaucoup plus d'exactitude que dans le cheval ; elles sont ici presque symétriques, & les cerveaux de ces animaux se ressemblent beaucoup entr'eux.

Les circonvolutions 5, 5, 5, 5, sont dans tous, une saillie marquée à droite & à gauche, & les contours postérieurs 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, se portent obliquement en arrière en divergeant, & à-peu-près sous le même angle. En devant, les circonvolutions 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, ont entr'elles des rapports presque constants : celles qui sont vers la circonférence & que j'ai marquées 11, 11, 12, 12, 13, 13, 20, 20, quoiqu'elles diffèrent plus les unes des autres que les premières, se ressemblent cependant encore beaucoup.

14, 20, 19, 17, 19, 20. Le cervelet.

14. Portion antérieure du *vermis*, dont le reste est caché par les hémisphères cérébraux.

15. Portion moyenne & supérieure du *vermis*.

16. Circonvolutions du *vermis*, ou partie moyenne du cervelet qui s'arrondit & se courbe un peu à droite.

17. Portion de cette même circonvolution, qui s'arrondit en arrière & qui se porte un peu à gauche.

18, 18. Bosses latérales & supérieures du cervelet, qui, dans quelques-uns, forment un second lobule en bas.

19, 19, 20, 20. Ces chiffres désignent de chaque côté un petit lobule du cervelet : il y en a encore un ou deux en devant qui sont cachés par la partie postérieure des lobes du cerveau,

Figure 2.^{me} Elle montre le cerveau & le cervelet du veau en dessus, & en grandeur naturelle : on a dessiné toutes les circonvolutions avec le plus grand soin.

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. Le cerveau,

2, 2, 2.

2, 2, 2. Les bords internes des hémisphères entre lesquels la dure-mère s'enfoncé plus que dans le mouton.

Ici, comme dans le cerveau du cheval & du mouton, on trouve, tout le long des bords internes des hémisphères, des circonvolutions dont la direction est longitudinale & à peu-près parallèle en devant, oblique & divergente en arrière, & qui, vers le milieu de leur trajet en 5, 5, sont, comme dans le mouton en 5, 5, une saillie plus ou moins forte.

3, 3, 3, 3. Circonvolutions antérieures & moyennes; elles sont longitudinales & assez semblables de deux côtés.

4, 4, 4, 4. Circonvolutions cérébrales antérieures & latérales; on y trouve encore des rapports entr'elles.

5, 5. Saillie que font pour l'ordinaire les circonvolutions vers le milieu du bord interne des hémisphères.

6, 7, 8, 9, 6, 7, 8, 9. Circonvolutions postérieures & moyennes; elles divergent & ont à peu-près la même forme à droite & à gauche.

10, 10. Circonvolutions latérales qui présentent encore quelque analogie: les autres diffèrent, & en général les circonvolutions des deux hémisphères du cerveau du mouton, sont celles qui se ressemblent le plus parfaitement.

On se souviendra que les circonvolutions du cerveau de l'homme offrent toujours des différences, non-seulement dans les individus que l'on compare, mais encore dans chacun des côtés d'un même individu.

11, 15, 17, 14, 17, 15. Le cervelet.

11. Le *vermis* supérieur caché par les hémisphères cérébraux postérieurs.

12. Éminence ou saillie du *vermis*, qui se dirige à gauche.

13. Saillie ou renflement postérieur du *vermis*, qui se dirige vers la droite.

14. Portions inférieure & postérieure du *vermis*.

15, 15, 15, 15. Saillies ou renflemens latéraux du cervelet, vu en dessus & en arrière.

16, 16, 16. *Figure 3.* Bourrelets latéraux du cervelet, que l'on ne voit point dans la *figure 2*.

Figure 3. Cette figure montre le cervelet du veau, observé sur un autre individu que le précédent & avec plus d'étendue. Voyez les lettres qui, dans l'explication de la *figure 2*, sont désignées pour le cervelet.

Figure 4. Cette figure représente les couches optiques du veau à découvert, & les arcades médullaires de la glande pinéale.

a a. Tubercules quadrijumeaux supérieurs, ou *nates*.

l l. Partie postérieure des couches optiques.

m m. Partie antérieure des mêmes couches.

k k k. Régions latérales des couches optiques.

Mém. 1783.

PPP

h h. Union de ces couches ; elle est très-ferme & très-étendue ; supérieurement, elle divise le ventricule en deux cavités qui communiquent au-dessous de cette jonction.

g. Écartement postérieur des couches optiques ; région dans laquelle ces couches ne sont point réunies.

iii i. Péduncules de la glande pinéale , ils sont composés de substance blanche.

b ff. Glande pinéale coupée longitudinalement & dans son milieu ; elle est formée de substance grise , en général assez molle & semi-transparente.

cc, dd, ee, ff. Arcades très-déliées & disposées très-élégamment dans la glande pinéale ; ces arcades sont médullaires , & paroissent être fournies par les péduncules de la glande pinéale , dans laquelle ils se distribuent à la manière des nerfs.

P L A N C H E I I I.

Figure 1. Elle représente une portion du cerveau du veau , vu en dessus.

a. La dure-mère repliée près de la tente du cervelet.

b b. Circonvolutions cérébrales postérieures.

c. Traces ou restes du corps calleux.

dd. Cornes d'ammon ; elles sont très-volumineuses , elles naissent vers les côtés & au-dessous de la voûte à trois piliers , & on y observe des filets parallèles & dont la direction est longitudinale.

ee. *Corpora fimbriata* ; ils sont fibreux & aussi très-larges.

ff. La voûte à trois piliers.

h. Les piliers antérieurs de la voûte.

ii i. Les corps striés.

n n. Substance corticale placée au-devant des corps striés.

p. Nerf olfactif droit , représenté après avoir été gonflé d'air introduit dans les sinus.

s. Cavité ou ventricule du nerf olfactif ; car ces nerfs sont creux dans les grands quadrupèdes , comme les anciens Anatomistes l'ont écrit.

r. Communication étroite du sinus , ou ventricule des nerfs olfactifs avec les sinus latéraux.

rr. Région dans laquelle le nerf olfactif se change en pulpe , & pénètre dans l'intérieur du nez.

Figure 2. Cette figure représente une portion du cerveau du mouton , vu en dessus & en arrière.

a a. La partie postérieure des couches optiques.

b b. Péduncules de la glande pinéale : on peut voir , par l'inspection de cette figure , combien ils sont volumineux.

- d d.* Filets blancs qui s'enfoncent dans la glande pinéale.
c. Glande pinéale.
c c. Tubercules quadrijumeaux supérieurs.
f f. Portion des tubercules quadrijumeaux inférieurs ; ces quatre éminences sont très-grosses dans les quadrupèdes.
h. Strie blanche transversale placée en manière de commissure , au-dessous des tubercules quadrijumeaux inférieurs.
i. Place qu'occupoit la lame médullaire , improprement appelée la *valvule du cerveau*.
k k Le quatrième ventricule.
g g. Le tronc de l'*arbre de vie* , ou tige principale des ramifications du cervelet.
ll. Circonférence du cervelet.

Dissection du Cerveau du Mouton.

J'ai remarqué que les circonvolutions d'un côté ressembloient presque parfaitement à celles de l'autre. Les hémisphères du cerveau en devant & près du lieu d'où sortent les nerfs de la première paire, sont recouverts par une expansion très-légère de couleur brune & noirâtre, disposée en manière de réseau, qui masque les circonvolutions.

La faux est très-peu profonde, fort étroite ; elle existe à peine, & dans l'adossément des hémisphères sont des circonvolutions, très-rapprochées & adhérentes.

Le raphé est très-marqué sur le corps calleux, ce corps est très-étroit & très-blanc, & on y voit des stries transversales.

Le *septum lucidum* est très-mince & médullaire, avec beaucoup de soin & de précaution, j'y ai distingué deux lames.

La membrane qui tient lieu de valvule de *Vieussens*, est si ténue que je n'y ai presque rien aperçu de médullaire ; il en est de même de celle qui est placée au-devant du nerf optique dans la base du cerveau.

Les ventricules latéraux ont un petit prolongement en devant ; c'est au bas de ce prolongement que se trouve la petite ouverture qui communique avec la cavité du nerf olfactif.

La voûte à trois piliers est très-élégamment formée; en la soulevant & en la renversant en arrière, on aperçoit dans la face inférieure & postérieure un raphé & quelques reliefs longitudinaux & obliques, formant ce qu'on appelle la lyre; un peu plus loin, & toujours en dessous, on trouve deux gros reliefs ou tubercules, un de chaque côté, qui sont soutenus par les couches optiques & desquels naît l'hypocampe, & sur-tout la partie grise de cette production.

La corne d'ammon est très-grossière dans son principe; coupée, elle présente de petites lames ou spires blanches, comme dans l'homme.

Les ventricules latéraux n'ont point de prolongement postérieur ou ergot.

Le corps bordé est très-considérable.

La glande pinéale est très-volumineuse, dure & surmontée de plusieurs petites bosses, comme une pomme de pin.

Les péduncules de la glande pinéale sont très-gros, blancs, & ils recouvrent, en s'aplatissant, une partie de la couche optique; quelques-unes des fibres blanches des péduncules s'implantent dans la glande pinéale, & au-dessous du petit cordon transversal qu'ils forment en se réunissant, on trouve l'ouverture d'une petite cavité ou cul-de-sac, qui s'étend dans la base de la glande, & dans quelques sujets, s'enfonce assez profondément.

Au lieu d'une seule commissure postérieure, il y a plusieurs petits cordons placés les uns au-dessus des autres, dont les inférieurs sont les moins étendus.

Le *tænia semi-circularis* est très-marqué, sur-tout en devant.

La commissure des couches optiques est très-grande, & ces dernières adhèrent par une surface très-étendue.

Le petit tubercule antérieur & supérieur des couches optiques est peu marqué dans le mouton.

La commissure antérieure est assez considérable, j'ai recherché si elle se prolongeait sur les côtes; elle s'étend dans les corps cannelés, & elle forme un cordon assez court qui suit la direction des autres stries & se contourne en devant.

Les tubercules quadrijumeaux supérieurs sont très-gros, leur enveloppe est grise; les inférieurs sont beaucoup moins volumineux, & blancs à l'extérieur.

La quatrième paire naît par trois ou quatre filets au-dessous de ces derniers tubercules & de la partie la plus élevée des colonnes blanches qui forment les bords de la valvule de Vieussens.

Ces colonnes sont très-exprimées.

Sur les côtés, les parties latérales du cervelet, qui sont étroites, composent, par la réunion de leur substance blanche de chaque côté, un *tractus* ou relief fort considérable, qui suit la direction des jambes du cervelet, & qui en forme une partie.

J'ai cherché inutilement le corps rhomboïdal du cervelet.

J'ai remarqué que le *processus* vermiforme compose la plus grande partie du cervelet, & qu'en dessous il fait dans la cavité du quatrième ventricule une saillie très-marquée, en manière de mamelon, qui est l'extrémité de ce *processus* lui-même, placé dans son origine au-dessus de la valvule de Vieussens.

Les *plexus* choroïdes du cervelet sont très-gros.

Les nerfs optiques sont très-rapprochés dans l'endroit où ils se dirigent vers les orbites.

Les troisième, quatrième, cinquième & sixième paires, n'ont rien de remarquable.

Les éminences mamillaires, réunies & confondues dans leurs bases, m'ont présenté dans ce sujet deux petits arrondissemens, très-rapprochés l'un de l'autre.

La tige pituitaire, quand on la coupe, offre une cavité remarquable dans sa base, qui a quelquefois beaucoup de consistance.

La cinquième paire est très-grosse; & la petite portion antérieure de ce nerf, dont la direction est différente dans l'homme, est très-marquée dans le mouton.

J'ai recherché quelle étoit la structure des nerfs olfactifs j'y ai trouvé une cavité remarquable, blanche à l'intérieur,

& grise à l'extérieur : j'ai ouvert ce ventricule, j'ai divisé la paroi inférieure avec beaucoup de précaution : cette dissection m'a conduit à une ouverture peu considérable, qui communiquoit avec les ventricules latéraux : ayant soufflé de l'air par cette ouverture, ce fluide a sorti par la tige pituitaire & par le quatrième ventricule, au-dessus de la moelle allongée, & il est démontré par-là, que la cavité des ventricules communique avec celle des nerfs olfactifs.

La sixième paire naît des deux saillies longitudinales qui tiennent lieu de corps pyramidaux, par trois ou quatre filets très-distincts.

La dissection m'a fait voir que les *tractus* des corps pyramidaux passent aussi, comme dans l'homme, au travers de la protubérance annulaire, mais d'une manière beaucoup moins marquée.

Je n'ai point trouvé dans les jambes du cerveau, près de la protubérance annulaire, la tache noire que j'ai remarquée dans l'homme.

La protubérance annulaire est peu considérable ; on aperçoit à peine quelques traces des corps olivaires, & dans cette région il n'y a point de corps rhomboïdaux ; quelques fibres transversales s'y font apercevoir.

Dissection du Cerveau du Veau & du Cheval.

DANS le veau, comme dans le cheval, & dans les quadrupèdes en général, la dure-mère est beaucoup plus blanche & ses vaisseaux sont beaucoup moins apparens que dans l'homme.

Parmi les circonvolutions cérébrales, il y en a plusieurs qui se ressemblent d'un côté à l'autre, moins cependant que dans le mouton.

Le sillon de Sylvius, est en général très-peu marqué dans le veau & dans les quadrupèdes.

Vers la partie postérieure du cerveau, la substance corticale s'enfonce très-profondément dans ce viscère.

Le corps calleux est très-étroit.

Les prolongemens postérieurs des ventricules latéraux n'existent point, ou au moins l'on n'en trouve que l'ébauche.

Le *septum lucidum* est blanchâtre, & il a un peu plus d'épaisseur que dans le mouton.

Dans le veau, comme dans le mouton, dans le cheval & dans les autres grands quadrupèdes que j'ai disséqués, la voûte à trois piliers a beaucoup de consistance; elle est très-blanche, & elle a beaucoup d'épaisseur, même dans les piliers antérieurs. Il est sur-tout important de remarquer que dans ces animaux, les couches optiques sont supérieurement tout-à-fait recouvertes par la voûte à trois piliers, de sorte qu'on ne les aperçoit point dans la cavité des ventricules latéraux.

Le *plexus* choroïde est très-exprimé dans le veau & dans le cheval, comme dans le mouton; on y distingue sur son bord interne, des veines qui communiquent avec celles de Galien; on suit facilement ces *plexus* jusqu'à la partie antérieure, où, sur les côtés des piliers de la voûte, on trouve la communication du troisième ventricule avec les deux latéraux. Là, chaque *plexus* choroïde se recourbe & paroît très-volumineux dans le troisième ventricule, où ces *plexus* sont situés sur deux lignes parallèles; dans tous ces animaux, les *plexus* choroïdes du quatrième ventricule sont très-considérables. La masse de leur cerveau étant beaucoup moindre que celle de l'homme, il est étonnant que ces réseaux vasculaires y soient plus grands. En général, comme ces sortes de cerveaux sont presque toujours en très-bon état lorsqu'on les dissèque, il est facile d'y distinguer les veines & les artères dont les plexus vasculaires y sont composés.

Lorsqu'après avoir coupé les piliers antérieurs de la voûte, on les soulève en la rejetant en arrière, on est étonné de voir dans sa face inférieure de chaque côté, un gros tubercule qui est immédiatement appliqué sur la couche optique correspondante, de laquelle on le détache facilement par le moyen de la dissection: ce tubercule est l'origine de la corne d'ammon. C'est de-là, que naît sur-tout la partie corticale que Tarin a bien décrite dans l'homme; pour en prendre une

bonne idée, il faut ouvrir les ventricules par la base du cerveau, alors on voit bien les hypotampes entiers, leur naissance, & comment les corps bordés les accompagnent & se joignent à eux.

Ces derniers, appelés aussi *corpora fimbriata*, sont très-larges dans le veau & dans le cheval, auxquels les détails précédens doivent s'appliquer également, ainsi qu'au mouton.

Le *tania semi-circularis* existe dans ces animaux, mais il n'est pas à beaucoup près aussi fibreux que dans l'homme.

Le troisième ventricule du veau & du cheval diffère aussi beaucoup de celui de l'homme; les couches optiques adhèrent dans une très-grande étendue, d'où il résulte 1.^o une rigole en dessus qu'occupent les *plexus choroïdes* du troisième ventricule & les veines de Galien, & que recouvre la partie moyenne de la voûte; 2.^o un canal en dessous, qui du pavillon de l'entonnoir s'étend jusqu'au conduit étroit placé sous les tubercules quadrijumeaux; 3.^o en devant & derrière les piliers de la voûte, une cavité qui répond à celle de l'*infundibulum* ou entonnoir; 4.^o une autre excavation perpendiculaire comme la précédente, & qui est placée devant les tubercules quadrijumeaux. C'est l'adossément des couches optiques qui sépare l'une de l'autre ces deux cavités que l'on voit communiquer en-dessous; on conçoit que dans l'état naturel, elles ont très-peu d'étendue, mais la dissection les démontre facilement.

Les tubercules antérieurs & supérieurs des couches optiques existent à peine; la face supérieure de ces couches est légèrement excavée pour recevoir le renflement qui se trouve sous la voûte à trois piliers, & que nous avons dit être l'origine de la corne d'ammon; origine qui dans l'homme est placée plus en arrière & y fait peu de saillie; dans le veau, la glande pinéale est allongée; dans le cheval, elle est plus arrondie. Ses péduncules sont très-considérables dans ces animaux; plusieurs filets blancs pénètrent dans l'intérieur de cette glande, & une membrane médullaire est repliée à sa base, en une manière d'entonnoir.

La commissure antérieure est volumineuse, on peut la suivre sur le côté; elle se prolonge en se recourbant vers la partie antérieure des corps striés, & elle se termine dans la substance blanche qui compose en partie le nerf olfactif.

La commissure postérieure est formée de plusieurs paquets de fibres, dont la direction est transversale.

J'ai suivi, comme dans l'homme, les piliers antérieurs de la voûte jusqu'aux éminences mamillaires, qui dans ces animaux sont réunies de manière cependant à faire apercevoir deux saillies vers leur extrémité inférieure.

Les tubercules quadrijumeaux sont formés comme dans le mouton; au-dessous de ces tubercules est une strie blanche & transversale en manière de commissure, & plus loin, entre deux colonnes médullaires sous la tête du *vermis*, est une membrane fine transparente traversée par quelques filets médullaires, qui dans le cheval ont une forme très-élégante, c'est la valvule de Vieussens.

Le cerveau du veau & du cheval, auquel cette description est commune dans presque tous les points, doit aussi être considéré par sa base.

On y aperçoit de chaque côté les nerfs olfactifs, qui, vus dans leur entier, forment de chaque côté une espèce de circonvolution qui se termine par un arrondissement irrégulier formé de substance corticale; il y en a un semblable dans l'homme, mais qui n'a qu'un très-petit volume. Vers le côté externe du nerf olfactif, est un *tractus* blanc & longitudinal que l'on doit regarder comme l'une de ses origines; ce *tractus* existe aussi dans l'homme. La cavité du ventricule des nerfs olfactifs est assez grande, sa forme est ovale; & elle communique avec la partie antérieure des ventricules latéraux par un très-petit orifice qui s'ouvre obliquement de derrière en devant & de haut en bas. Ces productions cérébrales, qu'on appelle du nom de *nerf olfactif*, sont composées de substance grise en dehors.

La lame qui est placée devant les nerfs optiques dans la base du cerveau, est très-mince.

Vers le milieu de cette base, on observe la saillie que font les circonvolutions qui répondent à l'extrémité de la corne d'amon. L'entonnoir qui est souvent dur & presque cartilagineux dans le mouton, a ici moins de consistance; la cavité ne s'étend point jusqu'à la glande pituitaire qui est plus grosse & plus détachée dans le cheval, que dans le mouton & le veau.

A la place du corps noir que l'on trouve dans les jambes du cerveau de l'homme, on trouve dans celles du cheval, un espace dont la couleur blanche est comme ternie.

La protubérance annulaire fait peu de saillie.

Les corps olivaires n'existent point, & deux prolongemens longitudinaux & parallèles tiennent lieu de corps pyramidaux; les nerfs de la sixième paire naissent de la partie extérieure de ces prolongemens. Il n'y a point de corps rhomboïdal dans le cervelet, ses jambes sont très-rapprochées & profondes.

La partie postérieure de la dure-mère, qui recouvre le cervelet, est très-épaisse.

Le *vermis* forme dans le quatrième ventricule, une saillie comme dans le mouton.

En introduisant de l'air par le quatrième ventricule, ou par la tige pituitaire, ou par la cavité des nerfs olfactifs, on fait facilement circuler ce fluide dans tous les ventricules.

L'origine des nerfs optiques est la même que dans l'homme; & la partie postérieure des couches, qui portent le même nom, est aussi inégale & tuberculeuse.

La troisième & la cinquième paires n'offrent rien de particulier dans leur naissance.

La quatrième paire fait peu de trajet avant de s'enfoncer entre les lames de la dure-mère.

La septième paire molle est postérieure; elle sort près de l'origine des jambes du cervelet.

Le nerf dur de la septième paire est placé en devant; son

volume est moins considérable, & on trouve entre ces deux nerfs plusieurs filets nerveux, comme dans l'homme.

Les racines de la huitième paire sont nombreuses, & le petit nerf hypoglosse n'en est pas aussi distinct que dans l'homme.

Le nerf accessoire est très-déprimé; & parmi les filets de son origine, on en trouve un sur-tout qui est très-considérable.

La neuvième paire est formée de plusieurs filets; elle a plusieurs origines & plusieurs orifices sont percés dans la dure-mère pour sa sortie.

Les sinus placés sur les côtés de la selle turchique, ont une cavité très-considérable.

Ces recherches sur le cerveau du veau & du cheval, précédées par la description du cerveau du mouton, m'ont paru d'autant plus importantes, qu'elles sont moins connues. Le cerveau du cheval, le seul que l'on ait examiné avec quelque détail, n'est décrit que d'une manière très-incomplète. Il n'existoit non plus aucune figure exacte du cerveau de ces animaux: j'ai fait mes efforts pour y suppléer.

CERVEAU DES OISEAUX.

Explication des Planches.

P L A N C H E I I I.

Figure 3. Cette figure représente le cerveau de la poule, vu en dessus, & ouvert pour faire voir les ventricules latéraux, le pavillon de l'entonnoir & le quatrième ventricule.

a a. Les yeux.

b b. Mandibule supérieure au-dedans de laquelle se distribuent les nerfs olfactifs.

c. Lieu d'où naissent les nerfs de la première paire ou olfactifs.

ff. Lobes antérieurs & supérieurs, ou olfactifs; ils tiennent lieu de corps striés.

ooo, d, ooo, d. Membrane blanche, médullaire & radiée, que l'on voit épanouie sur la face interne de chacun des lobes olfactifs: c'est entre l'une de ces lames ou expansions & le lobe lui-même, que sont

Q q q ij

placés les ventricules latéraux ou supérieurs ; on y fait passer facilement l'air en l'introduisant par le quatrième ventricule. Il est difficile , dans la dissection , en écartant les deux lobes olfactifs , de ne point blesser ces deux lames qui sont situées entre les lobes , & contigues.

dd. Tige ou tronc de ces deux membranes , ou expansions radiées ; cette tige est placée devant la commissure antérieure.

cc. Commissure antérieure.

g. Ouverture , ou pavillon de l'*infundibulum* ou entonnoir.

hh. Commissure postérieure , coupée pour mieux faire voir le passage du quatrième ventricule au troisième & aux ventricules latéraux.

ii. C'est dans ces deux points que se trouve , de chaque côté , l'ouverture des ventricules optiques.

ll. Tige ou tronc des ramifications de l'arbre de vie dans le cervelet.

mm. Bifurcation des branches de l'arbre de vie , dont la plupart sont simples & quelques-unes doubles.

kk. Le quatrième ventricule.

pp. Le troisième ventricule entre les commissures ; il est très-court , & l'entonnoir est placé vers son milieu.

nn. Moelle allongée , jusqu'à l'origine de la moelle épinière.

Figure 4. Cette figure représente le cerveau de la poule , vu en dessus ; le cervelet & les ventricules optiques étant ouverts.

b. La mandibule supérieure.

aa. Région antérieure des yeux.

cc. Les yeux.

l. Les nerfs olfactifs ou de la première paire.

ff, cc. Ces lettres désignent des lobes antérieurs ou olfactifs , & elles sont placées dans des points où la substance blanche forme des ovales au milieu de la substance corticale : ces lobes tiennent lieu des corps striés.

kk. Intervalle qui sépare les lobes olfactifs : ils sont un peu écartés , & on aperçoit entr'eux les deux lames blanches & radiées , dont chacune compose , avec le lobe qui lui correspond , un des ventricules latéraux.

dd. Commissure antérieure.

hh. Commissure postérieure.

g. Pavillon de l'entonnoir. Cette lettre désigne aussi le troisième ventricule qui est placé entre les deux commissures.

ii. Ouvertures des ventricules optiques dans le quatrième ventricule : ces orifices sont placés derrière la commissure postérieure.

kk. Excavation des ventricules optiques.

pp. Tiges de l'arbre de vie dans le cervelet.

mm. Le cervelet. Ces lettres montrent les bifurcations de l'arbre de vie, qui sont tout au plus doubles.

oo. Cavité du quatrième ventricule.

n. Moelle allongée.

Figure 5. Cette figure représente le cerveau de la poule, vu en dessus, & de derrière en devant.

a. Cervelet.

ii. Deux petites bosses ou prolongemens latéraux du cervelet, qui s'engagent dans une excavation placée près de celle de l'organe de l'ouïe.

hh. Les yeux.

ff. Lobes supérieurs ou latéraux qui tiennent lieu des corps striés.

g. Division de ces lobes.

k. Petite appendice ou glandule placée entre le cervelet & les lobes latéraux ou olfactifs.

bb. Couches optiques.

d, e. Moelle épinière.

c, d. Moëlle allongée.

c. Quatrième ventricule. *Calamus scriptorius.*

mm. Parties latérales du quatrième ventricule, formées par l'expansion de la moelle allongée.

PLANCHE I V.

Figure 1. Cette figure représente la base du cerveau d'un corbeau, & l'origine des neuf paires de nerfs.

1. Partie antérieure des grands lobes du cerveau, qui tiennent lieu des corps striés : c'est de cette partie que naissent les nerfs olfactifs, dont ces lobes peuvent aussi porter le nom.

2. Extrémité antérieure & moyenne des couches optiques, d'où sort un bouton qui est le tronc commun des nerfs optiques. Dans tous les quadrupèdes ces deux nerfs communiquent, avant leur entrée dans l'orbite : ici leur origine est commune.

3, 3. Les nerfs de la troisième paire qui naissent derrière l'entonnoir.

4, 4. Nerfs de la quatrième paire, dont l'origine est près de la commissure postérieure.

5, 5. Nerfs de la cinquième paire, que l'on voit naître des parties latérales de la portion de la moelle allongée, qui tient lieu de la protubérance annulaire.

6, 6. Nerfs de la sixième paire, qui sortent de la partie la plus élevée de la moelle allongée.

7, 7. Nerfs de la septième paire, qui naissent des côtés de la moelle alongée.

8, 8. Nerfs de la huitième paire, qui naissent au-dessous des précédens.

9, 9. Les nerfs de la neuvième paire, qui sortent des côtés de la moelle épinière, près de son origine.

10, 10. Région inférieure des lobes olfactifs, qui tiennent lieu des corps striés. -

11, 11. Région inférieure des lobes ou couches optiques.

12, 12. Moelle alongée.

13. Origine de la moelle épinière.

a. Entonnoir ou *infundibulum*.

DISSECTION du cerveau du Corbeau, du Geai, de la Pie, de la Grive, du Coq-d'Inde, du Coq ordinaire & de la Poule.

IL suffit de consulter la figure première de la *planche IV*, pour voir que j'ai trouvé dans la base du cerveau des oiseaux les neuf paires de nerfs que l'on trouve dans l'homme & dans les quadrupèdes; & que les proportions de ces nerfs, dans leur origine, sont à peu-près les mêmes que dans les quadrupèdes.

Au lieu de la protubérance annulaire, on trouve une éminence aplatie qui en tient la place.

En devant, sont les lobes ou hémisphères olfactifs; dans le milieu & en arrière sont les lobes, éminences ou couches optiques, & tout-à-fait en arrière se trouvent le cervelet & la moelle alongée. On observe dans la base du crâne des oiseaux trois sortes d'excavations destinées à recevoir ces différens organes.

En considérant ce cerveau en dessus, on y remarque sur-tout deux grands lobes, dont la forme est ovale, qui sont composés à l'extérieur de substance corticale, sans circonvolution, & à l'intérieur d'un mélange de substance grise & médullaire, qui donne naissance aux nerfs olfactifs qui contribuent à la formation des ventricules latéraux, & que l'on doit par conséquent regarder comme répondant aux corps striés des quadrupèdes.

En écartant ces deux lobes, on aperçoit, 1.^o deux commissures, l'une antérieure, l'autre postérieure; 2.^o sur la face interne de chacun des lobes ou hémisphères susdits, une membrane médullaire très-mince, qui s'y applique de manière à laisser entr'elle & le lobe une cavité analogue à celle des ventricules latéraux. Cette cavité est semi-circulaire de haut en bas & de devant en arrière; de droite à gauche elle est très-étroite, & elle se prolonge jusqu'à l'origine du nerf olfactif, qui est creux dans son principe. Au-dessous de la commissure postérieure, le quatrième ventricule communique avec les latéraux: cette communication s'étend même entre les deux commissures; là, les expansions médullaires qui forment la paroi interne des ventricules latéraux, sont adossées, & on y trouve le pavillon de l'entonnoir qui, joint à l'espèce de rigole comprise entre les deux commissures, compose tout ce que l'on trouve dans les oiseaux d'analogue au troisième ventricule.

Derrière la commissure postérieure, on trouve de chaque côté une ouverture qui établit une communication entre l'extrémité antérieure du quatrième ventricule & les cavités ou ventricules optiques.

Je ne dois pas oublier de remarquer ici que j'ai observé dans les ventricules latéraux un petit réseau vasculaire, analogue au plexus choroïde.

Il résulte de cette exposition, que l'on peut séparer les deux hémisphères olfactifs, sans trouver aucun obstacle, jusqu'aux commissures.

En soulevant postérieurement les lobes ou hémisphères olfactifs, on aperçoit en arrière & sur les côtés la face supérieure des lobes ou couches optiques: ces dernières sont formées de lames assez irrégulières, & qui sont alternativement blanches & grises.

Le cervelet semble n'être composé que du *vermis*, & les expansions latérales de cet organe manquent entièrement, si l'on en excepte deux renflemens latéraux très-petits,

marqués *ii*, *fig. 5*, *pl. III*, & qui sont contenus de chaque côté dans une légère excavation pratiquée près des trous auditifs internes.

Le quatrième ventricule a la forme d'un losange; il est placé entre le cervelet & la moelle allongée; & lorsqu'on y introduit de l'air par le moyen d'un chalumeau, ce fluide pénètre dans les cavités des couches optiques & dans celles des ventricules, que j'ai cru pouvoir appeler *latéraux*. Toutes ces excavations communiquent ensemble près de la commissure postérieure.

Le *processus* vermiciforme, ou *vermis*, qui compose presque tout le cervelet, a une saillie ou tête que l'on aperçoit dans la cavité du quatrième ventricule.

Les grands lobes ou tubercules olfactifs, sont portés dans la base du cerveau sur des *jambes* ou *crura*, que l'on voit s'étendre presque parallèlement vers la partie qui tient lieu de protubérance annulaire, & dont les régions latérales se confondent avec le bord interne des couches optiques.

Je ne parlerai point ici de la structure des nerfs des oïseaux, que j'ai spécialement examinés dans la cigogne & dans le cygne; je me borne aux détails nécessaires pour justifier ce que j'ai avancé dans mon quatrième Mémoire sur le cerveau.

CERVEAU DES REPTILES.

Explication des Planches.

PLANCHE IV.

Figure 7. Cette figure représente le cerveau de la grenouille, vu en dessus.

a Moelle épinière.

b. Petite portion du quatrième ventricule.

c. Cervelet, qui est très-petit.

d. Strie médullaire transversale placée devant le cervelet.

cc. Tubercules ou lobes optiques.

f. Portion cérébrale placée entre les tubercules optiques & les olfactifs.

g g. Les

g g. Les tubercules olfactifs.

h. Petits renflemens placés à l'origine des nerfs olfactifs.

i i. Les nerfs olfactifs.

Figure 8. Elle montre le cerveau de la vipère en grandeur naturelle , & vu en dessus.

a. Moelle allongée.

b. Quatrième ventricule vu en arrière.

c. Cervelet , ce n'est qu'un point.

d. Tubercules optiques.

e. Tubercules ou lobes olfactifs.

g. Nerfs olfactifs.

ff. Yeux , dont le volume paroît surpasser celui du cerveau.

h. Extrémité antérieure de la tête.

J'ai observé dans ce cerveau qui remplit exactement la cavité du crâne , 1.^o *l'infundibulum* , en écartant les lobes antérieurs ; 2.^o deux petits tubercules placés devant le cervelet , & que l'on voit en écartant les lobes optiques : répondent-ils aux tubercules quadrijumeaux ? 3.^o un nerf analogue à la cinquième paire , & qui donne des rameaux aux dents & aux mâchoires ; 4.^o un nerf qui tient lieu de la huitième paire.

CERVEAU DES POISSONS.

Explication des Planches.

PLANCHE I V.

Figure 2. Elle représente le cerveau du cabillaud vu en dessus.

g. Moelle épinière.

f. Cervelet.

o o. Nerfs qui naissent sous le cervelet.

e e. Tubercules optiques.

dd. Lobes ou tubercules olfactifs.

a, c. Les deux nerfs optiques.

h, b. Le nerf olfactif avant sa division.

i. Division du nerf olfactif.

ll. Les deux branches de ce nerf divisé.

Mém. 1783.

R r r

DANS ce poisson, les nerfs optiques se croisent : celui du côté gauche est le plus élevé & se porte à droite, tandis que le droit est inférieur & se porte à gauche.

En voyant le cerveau en-dessus, on y compte cinq tubercules : en dessous, derrière l'*infundibulum*, sont deux saillies qui répondent aux éminences mamillaires.

Les tubercules olfactifs & les optiques sont creux.

En fendant le cervelet, on n'y trouve qu'une strie blanche, d'où sortent quelques rameaux fort courts.

Le *calamus scriptorius* s'étend sous le cervelet, & l'air qu'on y introduit passe dans les ventricules optiques & olfactifs.

Un rameau de nerf, qui est très-gros, sort par-dessus la tête par un trou qui perce la calotte osseuse du crâne, & qui s'étend très-loin en se contournant derrière l'os par lequel l'opercule des ouïes est soutenu. Je n'ai point vu dans un autre animal un nerf sortir ainsi par la partie supérieure du crâne.

Le cerveau, dessiné en grandeur naturelle dans la *figure 2*, est très-petit, eu égard au volume de la tête, comme les dimensions suivantes le prouveront.

La tête, depuis l'origine de la moelle épinière jusqu'au bout du nez, avoit 7 pouces 8 lignes de longueur.

La distance d'un oeil à l'autre, étoit de 3 pouces 2 lignes.

La largeur de la bouche, d'une commissure à l'autre, étoit de 4 pouces.

La distance de l'opercule d'un côté, à celui du côté opposé, étoit de 6 pouces & demi.

Figure 3. Elle représente le cerveau du congre, vu en dessus.

a a. Les nerfs olfactifs, placés l'un à côté de l'autre.

b b. Les lobes ou tubercules olfactifs.

c c. Deux lobes pairs, creux.

d d. Deux autres lobes pairs creux , que je regarde comme les optiques.

e. Le cervelet.

f. Le quatrième ventricule.

g. Petit pont de substance médullaire , placé transversalement sur le quatrième ventricule.

i i. Nerfs qui naissent sous le cervelet.

DISSECTION du cerveau du Congre.

IL y a dans ce cerveau sept tubercules : 1.^o deux petits , antérieurs , donnent origine aux nerfs olfactifs , qui sont très-rapprochés ; 2.^o deux , un peu plus grands , sont placés derrière ceux-ci ; 3.^o deux autres , plus gros , sont situés derrière les seconds ; 4.^o un se trouve en arrière , où il fait fonction de cervelet. En soulevant la partie postérieure de ce tubercule , on trouve un prolongement transversal cendré.

En écartant les tubercules du second ordre , on voit une commissure.

L'air , introduit par le quatrième ventricule , entre dans les cavités des tubercules.

Figure 4. Elle représente le cerveau d'un brochet , vu en dessus , & ouvert de manière à faire voir la cavité que forment les ventricules optiques.

h. Nerfs olfactifs , rapprochés.

b b. Lobes ou tubercules des nerfs olfactifs.

d, e, d, e. Portions des tubercules ou lobes optiques , ouverts.

c. Sorte de commissure antérieure.

i i. Face interne des couches ou lobes optiques : ces lobes ou tubercules sont réunis vers le haut , & sous leur voûte se trouvent les ventricules optiques.

k. Petite ouverture ou fente qui mène à une excavation analogue au pavillon de l'entonnoir : cette lettre désigne aussi le troisième ventricule.

h h. Ces lettres montrent des stries blanches radiées , & un petit segment blanc , placé de chaque côté , au-dessous des stries , dont ce segment est l'appui.

f, g. Les quatre tubercules quadrijumeaux , sur lesquels on ne trouve point de glande pinéale.

g. Cervelet.

a. Moelle épinière.

Les nerfs olfactifs, les tubercules quadrijumeaux, & le cervelet, ont été dessinés par le célèbre M. Camper (*Savans étrangers, tome VI, page 188, planche II, figures 1, 2*) la figure que j'en donne ici diffère cependant un peu de celle de cet Anatomiste.

DISSECTION du cerveau du Brochet.

IL est composé de cinq tubercules ou lobes : les deux antérieurs sont de forme ovale, & paroissent en partie composés de substance corticale. Je les ai appelés *olfactifs*.

Les seconds sont beaucoup plus volumineux ; ils sont composés en grande partie de substance blanche ; ils sont réunis dans leur milieu par une membrane médullaire très-fine & transparente. Pour les bien voir, il faut les remplir d'air par le quatrième ventricule ; ils se distendent alors sans que l'air s'échappe par aucun endroit. Lorsqu'on les ouvre avec précaution, on voit que les cavités dont ils sont creusés, & qui sont assez amples, ont entr'elles dans le milieu une communication ovale très-étendue. Après les avoir renversés sur le côté, si on en examine l'intérieur, on y aperçoit, 1.^o en-devant des fibres transversales, marquées *c*, figure 4 ; 2.^o derrière cette commissure, l'ouverture de l'*infundibulum* ; 3.^o en arrière, les quatre tubercules quadrijumeaux, dont les inférieurs se voient même en dehors, en écartant les lobes optiques du cervelet ; 4.^o un intervalle compris entre les tubercules quadrijumeaux & la commissure antérieure. Cet espace répond au troisième ventricule : on y trouve 1.^o l'entonnoir dont j'ai déjà parlé ; 2.^o de chaque côté un petit segment médullaire, placé le long de la rigole qui répond au troisième ventricule ; 3.^o des fibres blanches radiées, qui paroissent s'implanter sur le segment que je viens de décrire, & qui s'étendent sur toute la paroi interne des ventricules optiques.

Le cervelet est placé en arrière : sur chacun de ses côtés est un petit renflement ; il est composé de substance corticale, au milieu de laquelle est une strie blanche.

Au-dessous du cervelet, est la moelle allongée & le qua-

trième ventricule, qui communique avec le troisième & les ventricules optiques, sous les tubercules quadrijumeaux.

Tout le cerveau est recouvert supérieurement par une lame brillante; il est renfermé dans des cavités cartilagineuses & demi-transparentes; dans la base on trouve l'entonnoir qui répond au pavillon *k*, *figure 4*, & au-dessous des lobes olfactifs on voit les nerfs optiques qui se croisent & qui naissent immédiatement des couches ou lobes optiques, que j'ai dit être excavés.

Il n'y a donc ici ni corps calleux ni ventricules latéraux, mais seulement le quatrième ventricule & le troisième où se trouve le pavillon de l'*infundibulum*, & sur les côtés duquel s'ouvrent les ventricules ou couches optiques, qui sont creusés comme dans les oiseaux. Pour en donner une idée plus précise, c'est comme si dans l'homme les couches optiques étant réunies par leurs bords supérieurs, ces mêmes couches étoient creusées d'une cavité, qui de chaque côté s'ouvrit dans le troisième ventricule.

DISSECTION du cerveau de la Carpe.

CE cerveau est un des plus compliqués que présente l'anatomie des Poissons; il est composé de huit tubercules, dont six sont pairs & deux impairs. Je les considérerai en-dessus & de devant en arrière.

1.^o On voit en devant les deux lobes olfactifs, formés principalement de substance corticale, & d'où sortent les deux nerfs de la première paire, qui sont terminés à peu-près comme dans l'homme, par un renflement de substance grise.

2.^o Plus loin on aperçoit les lobes ou tubercules optiques, dont la forme est très-bizarre. En devant & en dessus, ils sont composés d'une lame très-mince & transparente, qui sur les côtés se continue avec une lame médullaire blanche striée dans sa paroi interne, laquelle forme l'enveloppe extérieure des tubercules optiques. Lorsqu'on introduit de l'air par le quatrième ventricule, toute cette cavité se trouve distendue. Après avoir ouvert la membrane transparente dont j'ai parlé,

& pénétré dans la cavité des couches optiques, on y aperçoit de chaque côté un bourlet ayant à peu-près la forme d'une oreille humaine, dont l'extrémité la plus renflée est en-dessus, ou qui ressemble à une petite corne d'ammon. Lorsqu'on soulève les bords internes de ces deux bourlets, on observe un réseau vasculaire, qui semble avoir quelque rapport avec le plexus choroïde, & dans le milieu un petit renflement ou tubercule moyen.

On peut soulever en devant, soit par le moyen du soufflé, soit par celui du scalpel, la masse entière de ces deux bourlets: on voit alors, 1.^o que c'est sous leur face inférieure que le quatrième ventricule communique avec le troisième, ce qui fait que je regarde ces deux bourlets comme représentant les tubercules quadrijumeaux; 2.^o dans le milieu de cet espace, c'est-à-dire, au-dessous des bourlets susdits, est le pavillon de l'entonnoir, & plus antérieurement on observe des stries blanches, & transversales qui s'étendent d'un côté à l'autre & qui répondent à la commissure antérieure; 3.^o sur les côtés on voit, comme dans le brochet, la paroi interne des couches optiques, composées de fibres blanches radiées, appuyées sur deux segmens de substance blanche, qui suivent la longueur du troisième ventricule. J'appelle de ce nom tout l'espace compris depuis le pavillon de l'entonnoir jusqu'au passage qui va au quatrième ventricule, & qui est creusé sous les deux bourlets, que j'ai dit tenir lieu des tubercules quadrijumeaux.

A la rigueur, les deux couches optiques sont ici confondues, comme dans plusieurs autres poissons, & n'en forment en quelque sorte qu'une seule.

3.^o Un gros tubercule impair est placé derrière ceux-ci.

4.^o Un second tubercule impair, d'un moindre volume, est situé derrière le premier; tous les deux paroissent tenir lieu de cervelet. Le quatrième ventricule passe au-dessous de l'un & de l'autre.

5.^o De chaque côté du dernier tubercule impair, tout-à-fait en arrière, est un petit lobe: l'un & l'autre semblent être des appendices du cervelet.

Dans la base du cerveau, on voit la tige pituitaire, la glande qui porte le même nom, & en devant les nerfs optiques qui se croisent, & qui sortent de la partie antérieure & inférieure des lobes que j'ai dit être placés derrière les olfactifs.

Je publierai ailleurs des figures qui représenteront ces détails.

Figure 5. Cette figure représente le cerveau d'un turbot, vu en dessus.

e e. Lobes olfactifs.

f. Le nerf olfactif avant sa division.

c, d. Lobes optiques.

b. Cervelet.

a. Moelle épinière.

h. Quatrième ventricule.

g. Petit pont médullaire, placé sur le quatrième ventricule.

Figure 6. Dans cette figure on voit le cerveau du turbot en dessus, mais dans lequel les lobes olfactifs sont enlevés pour mieux montrer les nerfs optiques; on a détruit le petit pont transversal, placé en forme de valvule sur le quatrième ventricule.

a. Moelle épinière.

b. Cervelet.

c, d. Lobes olfactifs.

e, f. Nerf optique droit, qui se porte à gauche & en dessus.

g, h. Nerf optique gauche, qui se dirige de gauche à droite & en dessous; il est le plus long.

	pouces.	lignes.
Longueur du nerf optique le plus long.	2.	8.
Longueur du nerf optique le plus court.	1.	6.
Longueur de tout le cerveau.	1.	4.
Largeur du cerveau	"	9.
Longueur de la tête depuis la naissance de la moelle épinière, jusqu'à l'extrémité antérieure des mâchoires.	6.	2.
Largeur de la tête entière, mesurée en dehors.	2.	6.

Le turbot que j'ai disséqué étoit d'une grande taille.

DISSECTION du cerveau d'un Barbor.

IL a cinq tubercules; 1.^o deux paires, petits, antérieurs, donnent origine aux nerfs olfactifs; ces nerfs sont réunis, & ne forment qu'un tronc: 2.^o deux paires, plus gros, & creux,

sont les optiques : 3.^o l'impair, qui est le cervelet. Au-dessous du cervelet est le quatrième ventricule, & là, derrière ce tubercule, est un prolongement transversal de substance grise.

En ouvrant les tubercules optiques, on trouve une cavité, dans laquelle est une petite éminence ronde & blanche.

Sur le côté sont les nerfs de la cinquième paire.

Tout le cerveau est contenu dans une cavité cartilagineuse, épaisse.

Les nerfs optiques se croisent ; ils sont formés de filamens très-marqués, couverts d'une membrane qui les cache.

On doit sur-tout remarquer la grosseur & la dureté de ces nerfs, qui sont placés entre deux pulpes : la pulpe de la rétine & celle des couches optiques.

En introduisant de l'air dans le quatrième ventricule, on soulève le cervelet, & on gonfle les tubercules optiques.

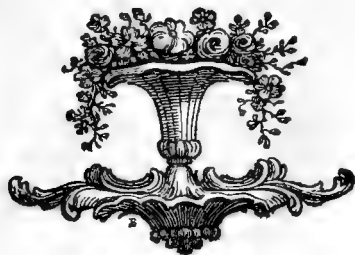
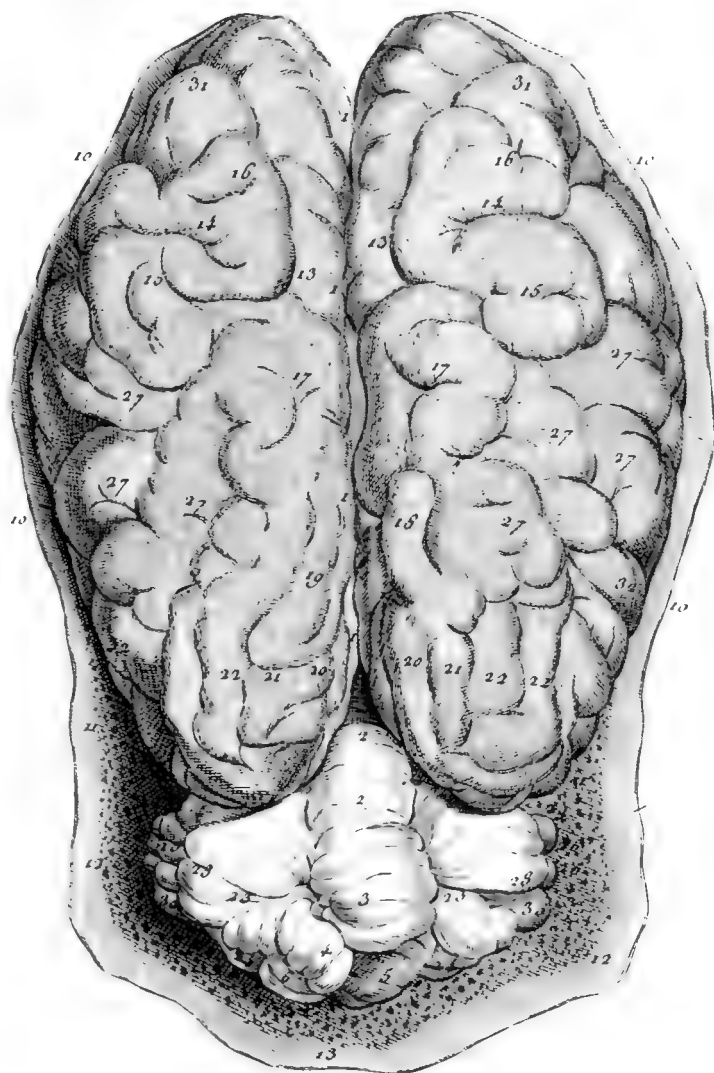


Planche 1^{re}





Pl

Fig. 2

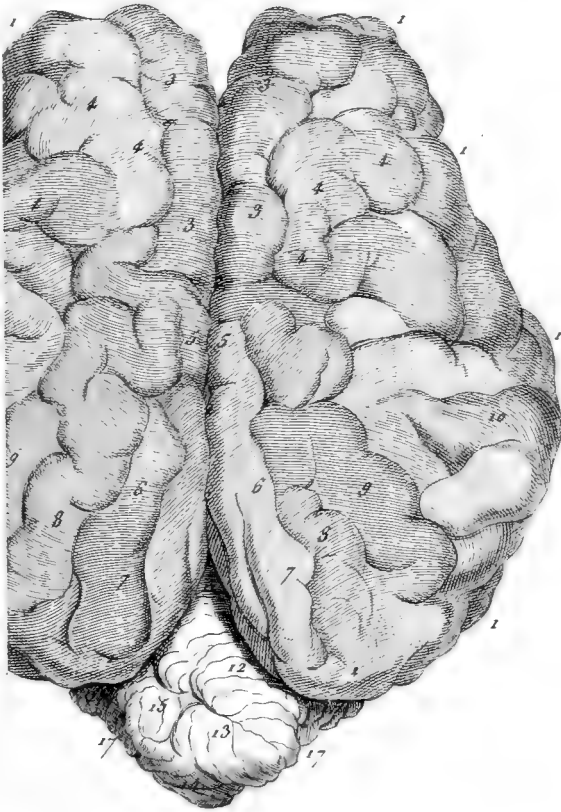


Planche 2.

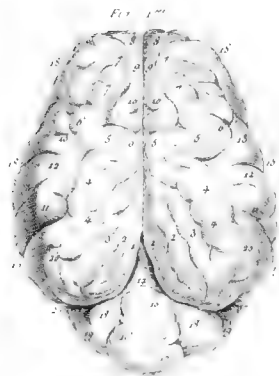


Planche 3^e

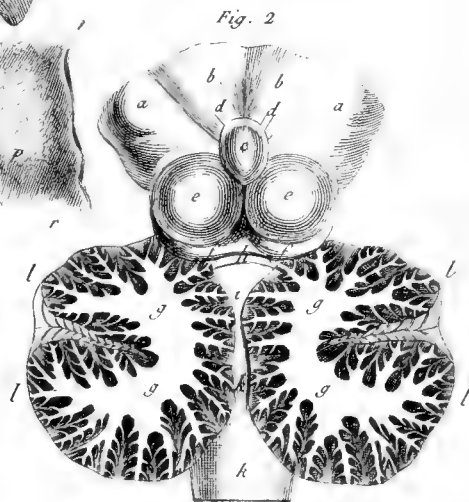
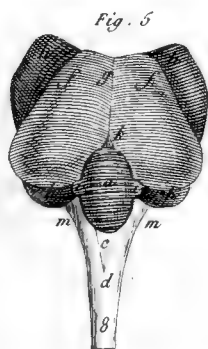
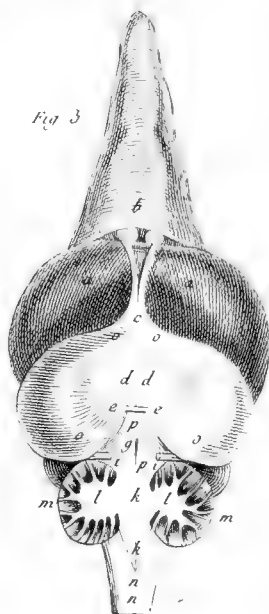
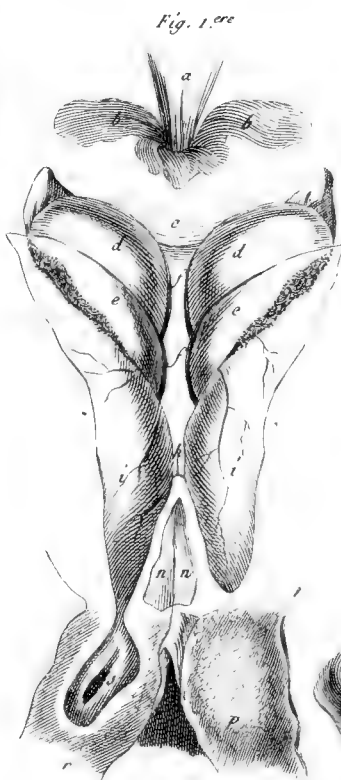
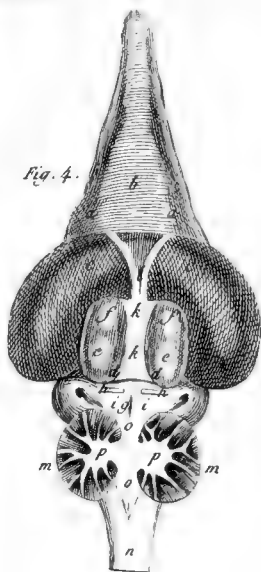




Planche 4^e.

Fig. 1^{re}

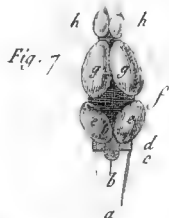
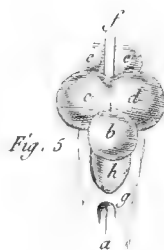
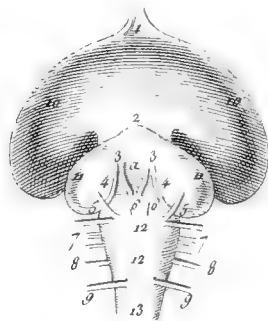
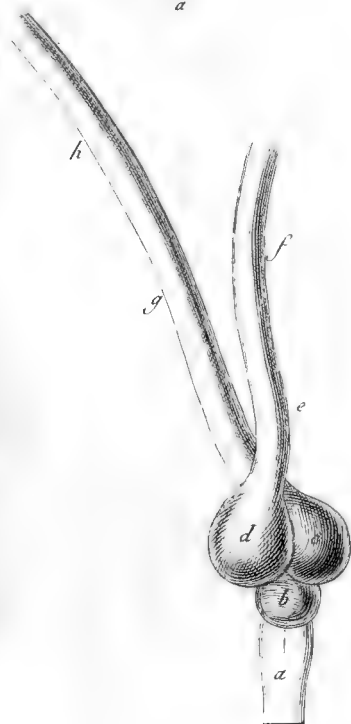
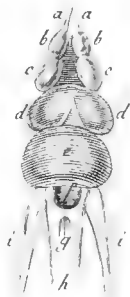
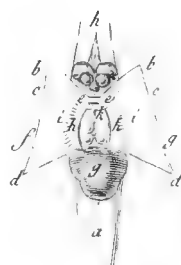
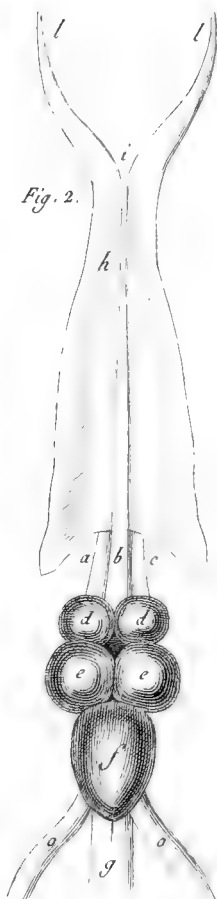


Fig. 2.





R É F L E X I O N S
SUR LE PHLOGISTIQUE,
Pour servir de développement à la théorie de la
Combustion & de la Calcination ,
publiée en 1777.

Par M. L A V O I S I E R.

DANS la suite de Mémoires que je viens de communiquer à l'Académie *, j'ai passé en revue les principaux phénomènes de la Chimie; j'ai insisté sur ceux qui accompagnent la combustion, la calcination des métaux, & en général toutes les opérations où il y a absorption & fixation d'air. J'ai déduit toutes les explications d'un principe simple, c'est que l'air pur, l'air vital, est composé d'un principe particulier qui lui est propre, qui en forme la base, & que j'ai nommé *principe oxygène*, combiné avec la matière du feu & de la chaleur. Ce principe une fois admis, les principales difficultés de la Chimie ont paru s'évanouir & se dissiper, & tous les phénomènes se sont expliqués avec une étonnante simplicité.

Mais si tout s'explique en Chimie d'une manière satisfaisante, sans le secours du phlogistique, il est par cela seul infiniment probable que ce principe n'existe pas; que c'est un être hypothétique, une supposition gratuite: & en effet, il est dans les principes d'une bonne logique, de ne point multiplier les êtres sans nécessité. Peut-être aurois-je pu m'en tenir à ces preuves négatives, & me contenter d'avoir prouvé qu'on rend mieux compte des phénomènes sans phlogistique qu'avec le phlogistique: mais il est temps que je m'explique d'une manière plus précise & plus formelle sur une opinion

* Quelques-uns de ces Mémoires ne sont point encore imprimés.
Mém. 1783.

que je regarde comme une erreur funeste à la Chimie, & qui me paroît en avoir retardé considérablement les progrès, par la mauvaise manière de philosopher qu'elle y a introduite.

Je prie mes Lecteurs, en commençant ce Mémoire, de se dépouiller, autant qu'il leur sera possible, de tout préjugé; de ne voir dans les faits que ce qu'ils présentent, d'en bannir tout ce que le raisonnement y a supposé, de se transporter aux temps antérieurs à Stalh, & d'oublier pour un moment, s'il est possible, que sa théorie a existé.

A l'époque où Stalh a écrit, les principaux phénomènes de la combustion étoient encore ignorés. Il n'a connu de cette opération que ce qui frappe les sens, le dégagement de la chaleur & de la lumière. De ce que quelques corps brûloient & s'enflammoient, il en a conclu qu'il existoit en eux un principe inflammable, du feu fixé; mais comme il étoit difficile de concilier la fixité qu'on observe dans quelques corps combustibles avec la mobilité, la subtilité qui paroît caractériser l'élément du feu, il a supposé qu'un principe terreux servoit d'intermède pour unir le feu aux corps combustibles, & il a appelé *principe inflammable* ou *phlogistique*, le résultat de cette combinaison. Telle est au moins la manière dont M. Macquer a présenté la doctrine de Stalh dans son dictionnaire de Chimie: il est vrai que le Chimiste Allemand ne l'a pas toujours exposée dans ce degré de simplicité; qu'il a souvent regardé, avec le P. Becher, le phlogistique, comme un élément purement terreux, mais j'ai pensé qu'il étoit inutile de le suivre dans les différentes opinions qu'il a successivement embrassées, & que je pourrois m'en tenir à la doctrine de Stalh, telle qu'elle a été conçue & présentée par M. Macquer. Si Stalh se fût borné à cette simple observation, son système ne lui auroit pas mérité sans doute la gloire de devenir un des Patriarches de la Chimie, & de faire une sorte de révolution dans cette Science. Rien n'étoit plus naturel en effet, que de dire que les corps combustibles s'enflamment, parce qu'ils contiennent un principe inflammable: mais on doit à Stalh deux découvertes importantes, indépendantes de tout

système, de toute hypothèse, qui seront des vérités éternelles : la première, c'est que les métaux sont des corps combustibles ; que la calcination est une véritable combustion & qu'elle en présente tous les phénomènes. Ce fait constant que Stalh paroît avoir reconnu le premier, & qui est aujourd'hui généralement avoué de tout le monde, le mettoit dans la nécessité d'admettre un principe inflammable dans les métaux : & en effet, si la combustion est due au dégagement d'un principe inflammable qui étoit fixé dans les corps, de ce que les métaux sont combustibles, il s'ensuivoit nécessairement que ces substances contiennent un principe inflammable.

La seconde découverte dont on est redevable à Stalh, & qui est plus importante encore, c'est que la propriété de brûler, d'être inflammable, peut se transmettre d'un corps à un autre : si l'on mêle, par exemple, du charbon qui est combustible, avec de l'acide vitriolique qui ne l'est pas, l'acide vitriolique se convertit en soufre, il acquiert la propriété de brûler, tandis que le charbon la perd. Il en est de même des substances métalliques, elles perdent par la calcination leur qualité combustible ; mais si on les met en contact avec du charbon, & en général avec des corps qui aient la propriété de brûler, elles se revivifient, c'est-à-dire, qu'elles reprennent, aux dépens de ces substances, la propriété d'être combustibles. Stalh a conclu de ces faits, que le phlogistique, le principe inflammable pouvoit passer d'un corps dans un autre, & qu'il obéissoit à de certaines loix auxquelles on a donné depuis le nom d'affinité.

Suivant Stalh, le phlogistique, le principe inflammable est un corps pesant, & en effet on ne peut pas se former une autre idée d'un principe terreux, ou au moins dans la composition duquel entre l'élément terreux ; il a même essayé dans son Traité du soufre, d'en déterminer la pesanteur.

Cette théorie de Stalh, sur la calcination des métaux & sur la combustion en général, ne rendoit pas compte d'un phénomène très-anciennement observé, vérifié par Boyle, & qui est devenu aujourd'hui une vérité incontestable : c'est

que tous les corps combustibles augmentent de poids pendant le temps même qu'ils brûlent & se calcinent ; c'est ce qu'on observe sur-tout d'une manière frappante dans les métaux , dans le soufre, dans le phosphore, &c. Or dans le système de Stalh , il s'échappe des métaux, pendant qu'on les calcine , & des corps combustibles qui brûlent, du phlogistique qui est un principe pesant ; ils devoient donc perdre une partie de leur poids , au lieu d'en acquérir.

Les Chimistes qui ont écrit depuis Stalh , & qui ont adopté ses principes , se sont dissimulé , autant qu'ils ont pu , cette difficulté , & M. Macquer dans la première édition de son Dictionnaire de Chimie , n'a pas dit un mot, ni du fait, ni des moyens de l'expliquer. M. Baumé, dont la Chimie a paru peu de temps après , a bien senti qu'une contradiction aussi formelle entre la théorie & les faits, exigeoit une réforme dans le système de Stalh , & il a eu le courage de l'entreprendre : il admet un principe inflammable , composé de la matière du feu , combinée avec un principe terreux ; il suppose que les êtres organisés, les végétaux & les animaux ont été chargés par la Nature, de la combinaison de ces deux principes , & il prétend que tout le phlogistique existant dans le règne minéral, doit son origine aux deux autres règnes. Jusque-là le système de M. Baumé se rapprochoit beaucoup de celui de Stalh ; mais un point dans lequel il s'en est écarté d'une manière plus formelle, c'est qu'il a supposé que le feu libre & l'élément terreux qui entrent dans la composition du phlogistique , pouvoient se combiner dans une infinité de proportions , & qu'il existoit par conséquent une infinité d'états intermédiaires entre le feu libre & le phlogistique proprement dit : quoique cette extension donnée au système de Stalh rendît un grand nombre de faits plus faciles à expliquer , & qu'un principe susceptible de prendre ainsi une infinité de formes différentes, suivant le besoin , fût extrêmement commode pour les Chimistes , cependant M. Baumé n'en a pas été plus heureux dans l'explication qu'il a donnée de l'augmentation de poids des chaux métalliques ; il prétend,

avec Sthal, que les métaux perdent leur phlogistique pendant leur calcination, mais que ce phlogistique est remplacé par du feu pur, ou du moins par du feu moins chargé d'élément terreux, & c'est à l'addition de ce feu presque libre, qu'il attribue l'augmentation de poids des chaux métalliques.

M. Baumé, dans cette hypothèse, se trouve obligé de donner à l'élément du feu une pesanteur extrêmement grande; car il est des métaux, comme le fer, qui augmentent de plus d'un tiers de leur poids par la simple calcination à l'air libre; il faudroit donc que le feu pur eut non-seulement occasionné toute cette augmentation, mais qu'il eut encore remplacé la perte de poids occasionnée par la volatilisation du phlogistique, qui lui-même est nécessairement pesant puisqu'il est composé de deux éléments pesans: or cette supposition de la grande pesanteur du feu, est contraire à tous les faits: cet élément, ce fluide subtil obéit probablement, comme tous les autres, aux loix de l'attraction, mais sa pesanteur est si petite qu'il n'est pas possible de la rendre sensible dans aucune expérience physique.

J'ai rendu compte ailleurs des tentatives que j'ai faites à cet égard: j'ai prouvé que la quantité de matière du feu & de la chaleur qui se dégage de quatre-vingt-douze grains de phosphore qui brûlent, n'a point de pesanteur qu'on puisse apprécier, même avec les instrumens les plus exacts; d'ailleurs, loin qu'il y ait du feu libre d'absorbé pendant la calcination des métaux, comme le suppose M. Baumé, il y en a au contraire une grande quantité qui passe de l'état fixe à l'état libre; cette quantité de feu qui se dégage est très-sensible, & susceptible même d'être mesurée lors de la calcination du fer & du zinc dans l'air vital.

Les expériences faites depuis peu en Angleterre, en France & en Suède, sur la chaleur, fournissent encore de nouvelles objections contre le système de M. Baumé: si réellement le feu libre ou presque libre avoit la propriété de se combiner avec les substances métalliques, & de réduire leurs chaux à l'état métallique, les corps qui contiendroient le plus de feu libre, ou au moins dans un état très-voisin de celui de

liberté, devroient être aussi les plus propres à opérer la réduction. On fait aujourd'hui que les fluides en vapeur, l'eau, par exemple, est dans ce cas : cette substance ne se maintient dans l'état aériforme, lorsqu'elle est exposée à une température supérieure à 80 degrés, que parce qu'elle est combinée avec une portion de matière du feu presque dans un état de liberté, qui lui communique de l'élasticité : l'eau en vapeurs, & surtout dans le voisinage de la température à laquelle elle redevient eau, devoit donc revivifier les chaux métalliques, convertir le soufre en acide vitriolique ou sulfureux, le phosphore en acide phosphorique, communiquer à un grand nombre de corps la propriété de brûler, & être elle-même inflammable; cependant on n'observe rien de semblable, d'où il résulte que ce n'est point à la combinaison du feu libre ou presque libre avec les substances métalliques, que sont dûs les phénomènes de la revivification des métaux, de la formation du soufre & du phosphore. Enfin dans l'opinion de M. Baumé, lorsque l'on calcine des métaux dans des vaisseaux de verre scellés hermétiquement, il devoit y avoir augmentation de poids; tandis qu'il est de fait que si l'on pèse le vaisseau avant & après la calcination, sans l'ouvrir, on ne trouve aucune différence de poids, même avec les balances les plus sensibles.

Pendant que M. Baumé s'occupoit de la rédaction & de l'impression de sa Chimie, une circonstance qui a lieu constamment dans toutes les réductions métalliques, me conduisit à faire quelques recherches sur cet objet : je remarquai que dans toutes ces opérations, il y avoit une effervescence considérable au moment où le métal passoit de l'état de chaux à l'état métallique; il étoit naturel d'en conclure qu'il se dégageoit un gaz, & j'imaginai un appareil propre à le rassembler & à le recueillir. Dès le mois de Novembre 1772, je déposai au Secrétariat de l'Académie, un Écrit dans lequel je rendis compte de mes expériences; j'y faisois voir qu'il se dégageoit du *minium*, pendant sa réduction, c'est-à-dire, pendant son passage à l'état de plomb une grande quantité d'un fluide élastique, tout semblable à celui qu'on retire de la craie, des terres calcaires, des alkalis fixes effervescens, des cuves de

liqueurs en fermentation , &c. Je répétai plusieurs fois ces expériences en 1773 , notamment en présence de plusieurs Membres de l'Académie.

Je m'occupai , pendant l'été de la même année , d'expériences d'un ordre inverse , sur la calcination des métaux au verre ardent , dans des quantités déterminées d'air : j'observai que dans ces opérations , à mesure que le métal se calcinoit , le volume de l'air diminuoit , & que le poids dont le métal augmentoit étoit fort exactement égal à celui de la quantité d'air qui avoit disparu : il étoit impossible de ne pas conclure de ces faits , que l'augmentation de poids des chaux métalliques étoit due à la fixation d'une portion d'air qui se combinait avec le métal à mesure de sa calcination. Le détail de ces expériences a fait le sujet de plusieurs Mémoires que j'ai lus à l'Académie pendant l'année 1773 , & que j'ai rassemblés en un volume *in-8.* sous le titre d'*Opuscules physiques & chimiques* , qui a paru dans le mois de Décembre de cette même année.

Quelques démonstratives que fussent les expériences sur lesquelles je m'étois appuyé , on a commencé , suivant l'usage , par révoquer les faits en doute ; ensuite , ceux qui cherchent à persuader au Public que tout ce qui est nouveau n'est pas vrai , ou que tout ce qui est vrai n'est pas neuf , sont parvenus à trouver dans un Auteur très-ancien , le premier germe de cette découverte. Sans examiner ici l'authenticité de l'Ouvrage dont on s'est empressé de donner à cette époque une nouvelle édition , j'ai vu avec quelque plaisir que le Public impartial avoit jugé qu'une assertion vague & jetée au hasard , qui n'étoit appuyée d'aucune expérience , qui étoit ignorée de tous les Savans , n'empêchoit pas que je ne pusse être regardé comme l'auteur de la découverte de la cause de l'augmentation de poids des chaux métalliques.

Non-seulement je démontrai alors que l'augmentation de poids étoit une des conditions de toute calcination métallique , mais je prouvai que cette même loi avoit lieu dans les combustions ; que le soufre , le phosphore , tous les corps

combustibles en général augmentoient de poids en brûlant, & que cette augmentation étoit due à la combinaison, à la fixation de l'air.

Ces nouveaux faits déconcertoient & le système de Stalh & celui de M. Baumé: M. Macquer le sentit; mais il crut en même temps qu'il n'étoit pas impossible de concilier les expériences modernes avec la doctrine du phlogistique. La théorie nouvelle qu'il imagina pour remplir cet objet, se trouve savamment exposée dans la seconde édition de son dictionnaire de Chimie, au mot *phlogistique*, à celui de *calcination*, & dans un grand nombre d'articles. On est étonné d'y voir que M. Macquer, tout en paroissant défendre la doctrine de Stalh, en conservant la dénomination de *phlogistique*, présente une théorie toute nouvelle, & qui n'est point celle de Stalh: au phlogistique, au principe inflammable, à ce principe pesant, composé de l'élément du feu & de l'élément terreux, il substitue la pure matière de la lumière; en sorte que M. Macquer a conservé le mot sans conserver la chose, & qu'en paroissant défendre la doctrine de Stalh, il y a porté une véritable atteinte. Mais pour mieux faire sentir en quoi consiste ce nouveau système, qui n'est plus ni celui de Stalh, ni celui d'aucun autre Chimiste ou Physicien, & qui appartient exclusivement à M. Macquer, il est nécessaire que j'entre dans quelques détails.

M. Macquer conçoit que les métaux, le soufre, le charbon, le phosphore, tous les corps combustibles de la Nature, contiennent une grande abondance de matière de la lumière dans un état de combinaison & de fixité, & c'est à cette matière ainsi combinée qu'il donne le nom de *phlogistique*: il n'admet plus en conséquence l'élément terreux comme principe constitutif du phlogistique, ni dans une proportion fixe, comme l'avoit avancé Stalh, ni dans des proportions variables, comme l'avoit prétendu M. Baumé. Suivant M. Macquer, le phlogistique ou la matière de la lumière, en s'unissant aux corps naturellement solides, ne les rend pas fluides, mais il diminue leur dureté & augmente toujours leur

leur fusibilité : il en est de même de la fixité ; les composés qui résultent de la combinaison du principe inflammable avec une substance fixe, ont moins de fixité que n'en avoit cette substance avant son union avec ce principe : le phlogistique augmente, suivant lui, la pesanteur absolue, souvent même la pesanteur spécifique des corps auxquels il s'unit, & il leur communique communément de l'opacité. Les substances qui, dans leur état naturel, n'ont ni odeur ni couleur, acquièrent presque toujours l'une ou l'autre de ces qualités, souvent même toutes les deux par leur union avec le principe inflammable.

Le phlogistique n'est susceptible, suivant M. Macquer, de se combiner, ni avec l'air, ni avec l'eau ; en général il s'unit difficilement avec les substances fluides, légères & volatiles, il se combine au contraire aisément avec les substances fixes, solides & pesantes, telles que les terres ; enfin il est identique dans tous les corps.

Jusque-là M. Macquer n'expliquoit point encore la cause de l'augmentation de poids que les métaux acquièrent en se calcinant ; car puisqu'il s'en sépare un principe pesant, ils devroient perdre de leur poids, au lieu d'en acquérir : l'objection subsisteroit même encore, quand on accorderoit que le phlogistique n'a pas de pesanteur sensible, car alors les métaux pendant leur calcination ne devroient ni augmenter, ni diminuer de pesanteur. Pour expliquer ce phénomène, M. Macquer admet, conformément à mes expériences, que l'air, ou plutôt la portion la plus pure de l'air, se combine avec les métaux pendant leur calcination avec les substances combustibles pendant la combustion, & que les uns & les autres augmentent de poids en proportion de l'air absorbé ; mais il pense qu'à mesure que cette union s'opère, la matière de la lumière qui étoit unie au corps, s'en sépare, de sorte que dans ce système, toute calcination, toute combustion est une combinaison d'air, & en même-temps une précipitation, une séparation de phlogistique, ou, ce qui est la même chose, de matière de la lumière.

M. Macquer se trouve obligé en outre de rejeter l'élément du feu, de supposer qu'il n'existe pas de matière propre de la chaleur; que la chaleur consiste dans un mouvement très-rapide imprimé aux molécules élémentaires des corps; & comme la lumière est la plus subtile de toutes les matières, il la regarde comme plus susceptible qu'aucune autre de prendre le mouvement qui constitue la chaleur.

Tel est à peu-près le tableau que présente M. Macquer, dans son Dictionnaire de Chimie, de la théorie de Stalh, ou plutôt de celle qu'il y a substituée: il est certain qu'un grand nombre d'objections qui étoient absolument insolubles dans l'hypothèse de Stalh, s'expliquent d'une manière naturelle & simple avec les modifications qui y ont été apportées par M. Macquer; telle est, comme l'on vient de le voir, l'augmentation de poids des chaux métalliques, & la sorte de combustion qu'elles éprouvent pendant la calcination; telle est aussi la propriété qu'ont quelques chaux métalliques, de se revivifier sans addition de phlogistique, ni sans être mises en contact avec des corps qui en contiennent, comme celles d'or, d'argent & de mercure: la matière de la chaleur & de la lumière ayant la propriété de pénétrer, de passer à travers les vaisseaux, il suffit, pour revivifier ces chaux, de les exposer à un certain degré de chaleur, & de les garantir du contact de l'air. M. Macquer n'explique pas d'une manière moins heureuse ce qui se passe dans la formation du gaz nitreux; ce gaz, comme l'on sait, se dégage de la dissolution du fer, du cuivre, du mercure, &c. dans l'acide nitreux. M. Macquer suppose que dans ces opérations l'air vital qui entre dans la composition de l'acide nitreux, se combine avec le métal, qu'il en dégage le phlogistique, lequel se combine avec une portion d'acide nitreux dépouillé d'air vital, pour former l'air nitreux; & que lorsqu'ensuite on combine ensemble de l'air nitreux & de l'air vital, il se reforme de l'acide nitreux, & le phlogistique qui devient libre, s'échappe en passant à travers les pores des vaisseaux. Le système de Stalh admis sans modification, & tel qu'il a

été adopté par M. Priestley, ne pouvoit satisfaire à l'explication des phénomènes de cette expérience; car puisque dans ce système le phlogistique est un corps incapable de pénétrer à travers les vaisseaux, il devoit se retrouver dans le vase où s'étoit faite la combinaison; & en effet M. Priestley avoit prétendu qu'il restoit un résidu d'air phlogistiqué; mais le fait est que quand l'air nitreux & l'air vital qu'on emploie, sont purs, les deux airs s'absorbent en entier, & se convertissent en acide nitreux sans reste & poids pour poids: il faut donc ou renoncer au phlogistique dans l'explication de cette expérience, ou bien dire avec M. Macquer, qu'il passe à travers les vaisseaux.

Mais si le nouveau système imaginé par M. Macquer, pour concilier la doctrine de Stahl avec les découvertes modernes, satisfait à un assez grand nombre de phénomènes, il est un nombre tout aussi grand de circonstances dans lesquelles il est absolument en défaut. M. Macquer admet d'abord avec toute l'école de Stahl, que le phlogistique est un corps pesant; cependant tous les phénomènes de la Nature, le consentement unanime de tous les Physiciens, nombre d'expériences décisives ne permettent pas de supposer à la lumière une pesanteur susceptible d'être appréciée, ni même aperçue, dans des expériences chimiques.

Mais quand on accorderoit encore à M. Macquer cette supposition, quand on admettroit, contre toute apparence, contre l'évidence des faits, que la lumière peut se combiner & s'accumuler dans les corps, au point de devenir une partie constituante de leur poids; il resteroit encore bien des phénomènes que son système ne peut expliquer. Si le phlogistique étoit la pure matière de la lumière, toutes les chaux métalliques devroient se revivifier au verre ardent comme elles se revivifient par le contact du charbon. Cependant toutes les substances métalliques, à l'exception de l'or, de l'argent & du mercure, se calcinent au verre ardent; leurs chaux, loin d'y reprendre l'état métallique, s'y fondent en des espèces de verre; tandis que ces mêmes chaux

reprennent subitement leur état métallique dès qu'on les met en contact avec du charbon à un degré de chaleur convenable. La matière qui existe dans le charbon, n'est donc pas la même que celle qui constitue les rayons solaires; le phlogistique n'est donc pas la pure matière de la lumière.

M. Macquer a cru échapper à cette objection en disant que la revivification des métaux ne peut avoir lieu tant qu'ils ont le contact de l'air, par la raison qu'ils se recalcinent à mesure qu'ils se revivifient, & que c'est par cette raison que les chaux métalliques se vitrifient au verre ardent sans passer à l'état métallique: mais cette réponse de M. Macquer peut se détruire par une expérience décisive; c'est que les chaux métalliques ne se revivifient pas à l'aide des rayons solaires, lors même qu'on les y expose sous des cloches remplies de mofette atmosphérique; cependant alors il n'y a point de principe qui puisse recalciner les métaux à mesure qu'ils se revivifient, ils sont dans des circonstances toutes semblables à celles qui ont lieu dans les vaisseaux fermés; & puisqu'ils y demeurent constamment dans l'état de chaux, il faut en conclure que les rayons solaires, la matière de la lumière, n'agissent pas de la même manière que le charbon, & que par conséquent le phlogistique n'est pas la pure matière de la lumière.

Ces objections contre le système de M. Macquer ont été plus ou moins senties par les Chimistes, & c'est sans doute par cette raison qu'il n'a été complètement adopté par aucun d'eux: il s'est établi un grand nombre de doctrines particulières dans lesquelles on n'a conservé que le nom de phlogistique; chacun a attaché à ce mot une idée vague que personne n'a rigoureusement définie, & on a réuni, sans s'en apercevoir, dans le même être, des propriétés inconciliables & contradictoires: quelques exemples rendront ceci plus sensible.

Lorsqu'on brûle du charbon très-pur dans de l'air vital, la totalité du charbon disparoît, & l'air vital se convertit en air fixe. Si l'opération s'est faite dans un vaisseau fermé,

exactly pesé avant & après la combustion, on n'éprouve, ni augmentation, ni diminution de poids, mais l'air de l'intérieur du vaisseau dans lequel s'est opérée la combustion, au lieu de peser $o^{\text{grains}} 473 17$, le pouce cube pèse $o^{\text{grains}} 695$, & l'augmentation de pesanteur absolue qu'a éprouvée cet air, se trouve exactement égale au poids du charbon qui a été employé.

Si on demande au plus grand nombre des Chimistes, partisans de la doctrine de Stalh, l'explication de ce qui se passa dans cette expérience, ils seront forcés de reconnoître, 1.^o qu'il se dégage de la matière de la chaleur & de la lumière, laquelle s'échappe à travers les vaisseaux & se dissipe; or, comme le poids des vaisseaux dans lesquels on opère, n'augmente ni ne diminue, ils sont obligés de convenir que la matière de la chaleur & de la lumière n'a pas de pesanteur sensible: ils seront forcés en second lieu de reconnoître qu'il se forme pendant la combustion, un acide particulier, l'air fixe; or, comme le poids de cet acide est égal au poids réuni de l'air vital & du charbon, il en résulte évidemment, qu'indépendamment de tout système, il existe dans le charbon une matière pesante qui ne peut pas s'échapper à travers les vaisseaux de verre, & qui par conséquent n'est pas la matière de la chaleur & de la lumière. On voit donc que dans la combustion du charbon, les disciples de Stalh donnent le nom de *phlogistique* à deux matières très-différentes, à la matière non pesante qui s'échappe à travers les pores des vaisseaux, & à la matière pesante qui s'unit avec l'air vital pour former l'air fixe: voilà donc deux substances bien distinctes que confondent les disciples de Stalh, un phlogistique non pesant & un phlogistique pesant; l'un qui est la matière de la chaleur, l'autre qui ne l'est pas, & c'est en empruntant les propriétés, tantôt de l'une, tantôt de l'autre de ces substances, qu'ils parviennent à tout expliquer.

Les disciples de Stalh admettent également, sans s'en apercevoir, deux espèces de phlogistique dans les réductions métalliques; celle des chaux d'or, d'argent ou de mercure, s'opère, comme l'on sait, par la simple chaleur & sans

addition ; on a d'une part le métal revivifié , de l'autre , l'air vital qui lui étoit combiné , & le poids réuni de l'air & du métal est égal à celui qu'avoit la chaux avant la réduction. On ne peut expliquer ces sortes de réductions dans le système de Stalh , qu'en disant avec M. Macquer , que la matière de la lumière qui se dégage des charbons ardens qui brûlent dans le fourneau , se tamise à travers les pores des vaisseaux , & se combine avec le métal : & puisque dans cette expérience le poids de l'air qu'on obtient & celui du métal ne surpassent pas le poids de la chaux métallique , il est clair que s'il s'est combiné du phlogistique du métal , ce phlogistique ne pèse pas.

Dans la réduction au contraire des autres métaux , on est obligé d'ajouter une substance charbonneuse quelconque ; on obtient alors de l'air fixe & le métal réduit ; mais le produit total se trouve augmenté de tout le poids du charbon qui a été employé : voilà donc encore ici un phlogistique matériel & pesant , & les disciples de Stalh qui sont encore obligés de donner le nom de *phlogistique* à deux corps très-différens , à la matière de la lumière ou à l'élément du feu qui ne pèse pas , & à la matière charbonneuse qui pèse.

La réduction des chaux métalliques fournit encore contre eux un argument embarrassant : la substance qui est combinée avec le métal pour constituer la chaux métallique , est , comme on ne peut en douter , l'air vital , le principe oxygène : cependant ce principe se dégage dans l'état d'air fixe quand on a ajouté du charbon : le phlogistique du charbon s'est donc uni à l'air vital pour le constituer air fixe ; & en effet on retrouve dans l'air fixe le poids de l'air vital & du charbon qui ont été employés : mais si tout le poids du charbon est entré dans la composition de l'air fixe , il ne s'en est donc point uni au métal ou , au moins , ce qui s'est uni au métal n'a pas de pesanteur. Il faudroit donc admettre ici un phlogistique qui pèse , & qui , combiné avec l'air vital , constitue l'air fixe , & un phlogistique qui ne pèse pas , & qui , combiné avec la chaux , lui donne les propriétés métalliques ; d'où il résulte encore que les disciples de Stalh donnent le même nom à deux substances

différentes. Indépendamment de ces difficultés qui sont communes aux différentes modifications qui ont été apportées à la doctrine du phlogistique, le système de M. Macquer en présente une qui lui est particulière; si, comme il le prétend, le phlogistique n'est autre chose que la pure matière de la lumière & de la chaleur, il en résulte que les métaux, dans leur état métallique, doivent contenir beaucoup plus de matière de la chaleur que les chaux métalliques; & cependant les expériences de M. Crawford, celles de M. Wilke, celles de M. de la Place & les miennes, prouvent le contraire: ainsi de deux choses l'une, ou le phlogistique n'est point, comme l'avance M. Macquer, la pure matière de la chaleur & de la lumière, ou les métaux contiennent moins de phlogistique que les chaux de ces mêmes métaux; or, ces deux conséquences dont il est cependant nécessaire d'admettre l'une ou l'autre, sont également destructives du système de M. Macquer & de la doctrine du phlogistique en général.

Les partisans de la doctrine de Stalh, sont perpétuellement dans de semblables embarras: si on leur demande ce qui se passe lorsque l'on calcine du mercure dans l'air vital, les Physiciens anglois répondront qu'à mesure que le phlogistique se dégage du métal, il se combine avec l'air dans lequel on opère, & qu'il le change en air fixe ou en air phlogistiqué; mais cette assertion est encore absolument contraire aux faits. Lorsque l'on opère sur de l'air vital absolument pur, on peut l'absorber jusqu'à la dernière goutte, & si l'on interrompt l'opération avant que l'absorption ait été complète, la portion d'air vital qui reste n'est nullement altérée, elle ne contient exactement que la même quantité d'air méphitique qui étoit contenue originairement dans la totalité de l'air qu'on a employé. Le phlogistique, dans cette expérience, ne s'est donc point combiné avec l'air, comme le prétendent les Physiciens anglois, & alors il faut admettre, avec M. Macquer, qu'il s'est échappé sous la forme du feu libre, de matière de la lumière, à travers les pores des vaisseaux: mais si le phlogistique peut ainsi passer

librement à travers les pores des vaisseaux , si lors de la calcination des métaux dans l'air vital, il a la propriété de pénétrer le verre, s'il a cette même propriété dans la revivification des chaux d'or, d'argent & de mercure, pourquoi n'en jouit-il pas à l'égard des autres chaux métalliques? Ainsi, les partisans de la doctrine de Stalh, après avoir été forcés de dire que le phlogistique tantôt pèse, & tantôt ne pèse pas, sont encore obligés de convenir que, même dans son état de liberté, tantôt il pénètre à travers les pores des vaisseaux les plus compactes, tantôt qu'il n'y pénètre pas, toutes qualités incompatibles dans un même être, & qui prouvent de plus en plus qu'on a donné le même nom à des choses fort différentes.

On peut faire un raisonnement semblable sur la formation & la destruction de l'air nitreux; cet air, suivant les partisans de la doctrine de Stalh, résulte de la combinaison de l'acide nitreux & du phlogistique; mais ils ne s'aperçoivent pas qu'ils sont encore obligés d'accorder ici au phlogistique deux qualités incompatibles.

Lorsque l'on combine ensemble, dans des proportions convenables, de l'air nitreux & de l'air vital dans leur plus grand état de pureté, les deux airs se pénètrent & s'absorbent réciproquement; ils perdent leur état aériforme & se convertissent en entier en une liqueur qui est l'acide nitreux: les partisans de l'opinion de Stalh sont obligés de convenir que dans cette expérience il y a dégagement de phlogistique; mais comme on n'obtient que de l'acide nitreux, qu'il ne reste rien dans les vaisseaux après la combinaison, ils sont forcés d'admettre que le phlogistique a passé à travers les pores des vaisseaux & s'est échappé: le phlogistique dont il est question ici, est donc le phlogistique de M. Macquer, la matière de la lumière; mais alors en combinant l'air nitreux avec la matière de la lumière pure, en le faisant simplement chauffer, on devroit former de l'air nitreux, tandis qu'il faut au contraire que le corps qui contient le phlogistique, soit immédiatement en contact avec l'acide nitreux: on se trouve donc forcé, en soutenant cette hypothèse, d'admettre

pour

pour la formation de l'air nitreux, un phlogistique qui ne passe pas à travers les vaisseaux ; & pour la composition de l'acide nitreux , un phlogistique qui passe à travers les vaisseaux.

La doctrine du phlogistique est également en contradiction avec elle-même dans le plus grand nombre des explications chimiques: on nous enseigne que le phlogistique est le principe des couleurs, & cependant c'est en proportion que les chaux métalliques en sont privées davantage, qu'elles deviennent plus colorées: la chaux de plomb est d'abord grise, à mesure qu'elle perd son phlogistique, elle devient jaune & rouge ; la chaux de fer est d'abord jaune, elle passe ensuite au rouge & au brun; la chaux de mercure est rouge, celles de cuivre sont vertes & bleues, &c. Si donc le phlogistique est le principe des couleurs, ces chaux contiennent du phlogistique ; les chaux métalliques ne sont donc pas des métaux privés de phlogistique.

Il est vrai que plusieurs substances métalliques, telles que l'antimoine, l'étain & quelques autres, donnent des chaux parfaitement blanches, mais ce n'est pas le plus grand nombre, & l'exception se trouve ici plus habituelle que la règle même. J'observerai d'ailleurs que les partisans de la doctrine de Stalh, n'ont pas des idées justes sur ce qu'on doit entendre par un corps sans couleur; le blanc, loin d'être l'absence de toute couleur, comme ils le supposent, en est au contraire la réunion: si donc le phlogistique est le principe des couleurs, il faut admettre que toutes les chaux métalliques contiennent du phlogistique, puisque quelques-unes réunissent toutes les couleurs, & que d'autres en présentent de particulières. Les mêmes difficultés nous suivent si nous passons des substances métalliques aux substances végétales & animales: du papier, du linge qu'on brûle, laissent échapper du phlogistique dans le système de Stalh, & en grande abondance, puisque ce sont à peu-près les corps les plus combustibles que nous connoissons; l'un & l'autre en brûlant se convertissent en une substance charbonneuse noire; si donc la couleur noire est le caractère de la présence du phlogistique, si la couleur blanche est le

caractère de son absence, les partisans de la doctrine de Stalh ne peuvent se dispenser de convenir que le papier brûlé contient plus de phlogistique que le papier blanc, ce qui est contraire à l'évidence des faits, puisque la majeure partie de la matière du feu s'étant échappée par la combustion, il en doit rester d'autant moins dans le résidu.

Il en est à peu-près de même de la causticité: le phlogistique, dans le système de Stalh, est le principe du goût & de la causticité; les métaux qui sont abondamment pourvus de phlogistique devroient donc être éminemment caustiques, & cependant la plupart sont même dépourvus de goût; les chaux métalliques au contraire qui sont privées de phlogistique, devroient être dans un état terreux, insolubles dans l'eau & sans aucun goût, & cependant par un effet tout contraire, la calcination des métaux les rapproche de l'état salin, leur donne de la solubilité dans l'eau, les rend corrosives. Il est vrai que dans ces derniers temps, on a expliqué d'une manière assez heureuse la causticité qu'acquièrent les substances métalliques quand on les prive de phlogistique; cette causticité, a-t-on dit, est l'effet de la tendance qu'elles ont à reprendre ce principe par-tout où elles le retrouvent; mais cette explication est encore un exemple de la facilité avec laquelle l'hypothèse du phlogistique se prête à tout, puisqu'on explique la causticité également par l'absence & par la présence du phlogistique, par la grande quantité qu'elles en contiennent, & par la tendance qu'elles ont à le reprendre.

Les effets de la matière du feu se manifestent plus clairement à l'égard des odeurs: on peut en général distinguer trois sortes de corps odorans; les corps vaporisés, les corps dissous dans l'air, enfin ceux dont les molécules sont tellement divisées, qu'elles flottent en l'air & sont chariées par lui: or, il est bien sûr que les corps vaporisés, même ceux dissous dans l'air, sont combinés avec la matière du feu; on peut donc dire dans ce sens, non pas que le feu est le principe des odeurs, mais qu'il en est le véhicule; ce qui se rapproche, jusqu'à un certain point, de l'opinion des partisans de Stalh.

Toutes ces réflexions confirment ce que j'ai avancé, ce que j'avois pour objet de prouver, ce que je vais répéter encore, que les Chimistes ont fait du phlogistique un principe vague qui n'est point rigoureusement défini, & qui en conséquence s'adapte à toutes les explications dans lesquelles on veut le faire entrer : tantôt ce principe est pesant, & tantôt il ne l'est pas ; tantôt il est le feu libre, tantôt il est le feu combiné avec l'élément terreux ; tantôt il passe à travers les pores des vaisseaux, tantôt ils sont impénétrables pour lui : il explique à la fois la causticité & la non-causticité, la diaphanéité & l'opacité, les couleurs & l'absence des couleurs. C'est un véritable Protée qui change de forme à chaque instant.

Il est temps de ramener la Chimie à une manière de raisonner plus rigoureuse, de dépouiller les faits dont cette Science s'enrichit tous les jours, de ce que le raisonnement & le préjugé y ajoutent ; de distinguer ce qui est de fait & d'observation d'avec ce qui est systématique ou hypothétique ; enfin de faire en sorte de marquer le terme auquel les connoissances chimiques sont parvenues, afin que ceux qui nous suivront puissent partir de ce point & procéder avec sûreté à l'avancement de la Science : mais avant de développer mes idées sur la combustion & la calcination, qu'il me soit permis de m'arrêter à quelques considérations sur la nature de la chaleur & sur les effets généraux qu'elle produit.

Lorsqu'on chauffe un corps quelconque, solide ou fluide, ce corps augmente de dimension dans tous les sens, il occupe un volume de plus en plus grand : si la cause chauffante cesse, à mesure que le corps se refroidit, il repasse par les mêmes degrés d'extension qu'il a parcourus ; enfin, si on le ramène au même degré de température qu'il avoit dans le premier instant, il reprend sensiblement le même volume qu'il avoit d'abord.

Il résulte de-là, que les molécules des corps ne se touchent point, qu'il existe entr'elles une distance que la chaleur augmente & que le froid diminue.

On ne peut guère concevoir ces phénomènes, qu'en

admettant l'existence d'un fluide particulier dont l'accumulation est la cause de la chaleur, & dont l'absence est la cause du froid : c'est sans doute ce fluide qui se loge entre les particules des corps, qui les écarte & qui occupe la place qu'elles laissent entr'elles. Je nomme, avec le plus grand nombre des Physiciens, ce fluide quel qu'il soit, *fluide igné, matière de la chaleur & du feu*.

Je ne nie pas que l'existence de ce fluide ne soit jusqu'à un certain point hypothétique; mais en supposant que ce soit une hypothèse, qu'elle ne soit pas rigoureusement prouvée, c'est la seule que je serai obligé de former. Les partisans de la doctrine du phlogistique ne sont pas plus avancés que moi sur cet article, & si l'existence du fluide igné est une hypothèse, elle est commune à leur système & au mien.

On conçoit que dans cet état des choses, les molécules des corps n'auroient aucune liaison entr'elles, qu'il n'y auroit aucun corps solide si elles n'étoient retenues par une autre force, par l'attraction qui, quelle qu'en soit la cause, est une loi générale de la Nature à laquelle toute la matière paroît être soumise.

D'après ce premier aperçu, tous les corps de la Nature obéissent à deux forces, le fluide igné, la matière du feu qui tend continuellement à en écarter les molécules, & l'attraction qui contre-balance cette force : tant que la dernière de ces forces, l'attraction, est victorieuse, le corps demeure dans l'état solide; ces deux forces sont-elles dans un état d'équilibre, le corps devient liquide; enfin lorsque la force expansive de la matière de la chaleur l'emporte, le corps prend l'état aériforme. Mais s'il n'existoit que ces deux forces au moment où les corps cessent d'être dans l'état solide, le moindre accroissement de chaleur qu'ils recevraient suffiroit pour les vaporiser, & non-seulement ils passeroient brusquement à l'état aériforme, mais encore leurs molécules s'écarteroient de plus en plus indéfiniment. Mais il est une troisième force qui empêche que cet effet n'ait lieu, c'est la pesanteur de l'atmosphère; sans cette pression, au moment où l'eau cesseroit d'être

glace, à zéro du thermomètre, elle se réduiroit en un fluide aëriforme, tandis qu'au contraire cet effet n'a lieu qu'à une chaleur de 80 degrés, sous une pression de 28 pouces.

Pour nous former des idées nettes sur une matière aussi abstraite, empruntons une comparaison des objets qui nous sont les plus familiers: supposons pour un moment un espace, une caisse si l'on veut, dont les parois soient imperméables à la matière de la chaleur: si l'on enferme dans cette caisse un certain nombre de corps, la matière de la chaleur qui sera renfermée avec eux se mettra dans une espèce d'équilibre dans tous; si, par quelque moyen que ce soit, on introduit dans cette même caisse une nouvelle quantité de matière de la chaleur, il en résultera une nouvelle force qui écartera de nouveau les molécules des corps toujours jusqu'au point d'équilibre: mais on conçoit que cette matière de la chaleur ne se répartira pas également dans chacun des corps, qu'elle ne s'y répartira pas même en proportion de leur poids, ni de leur volume: la quantité que chacun pourra en admettre, dépendra de la grandeur des pores, des intervalles que laisseront entr'elles les molécules, de l'attraction plus ou moins grande que ces mêmes molécules exerceront les unes sur les autres; enfin de l'affinité plus ou moins grande qui existera entre les mêmes molécules & celles de la matière de la chaleur.

Ainsi, par exemple, plus les molécules seront près les unes des autres, moins elles admettront entr'elles de matière de la chaleur, & on peut en concevoir deux raisons; la première, parce qu'il existera peu d'espace entr'elles, par conséquent peu de place pour y loger de la matière de la chaleur; la seconde, parce que plus les molécules seront près, plus l'attraction mettra d'obstacle à leur écartement. La mesure de cette quantité de matière de la chaleur que chaque corps peut recevoir par un changement quelconque de température, a été nommée *capacité* pour contenir la matière de la chaleur: un moment de réflexion sur ce qui se passe dans l'eau, rendra tout ceci beaucoup plus sensible.

Si on plonge dans ce fluide des morceaux de différens

bois égaux entr'eux, par exemple, d'un pied cube, l'eau s'introduira peu-à-peu dans leurs pores; ils se gonfleront & augmenteront de poids: mais chaque espèce de bois admettra une quantité d'eau différente; les plus légers & les plus poreux en logeront davantage, ceux qui seront compacts & ferrés, n'en laisseront pénétrer qu'une très-petite quantité; enfin la quantité d'eau qu'ils recevront, dépendra encore de l'affinité plus ou moins grande que les molécules de ces bois auront avec l'eau. On pourra donc dire que chaque espèce de bois a une capacité différente pour recevoir de l'eau; on pourra même, par l'augmentation du poids, connoître ce qu'ils en auront absorbé; mais comme on ignorera la quantité d'eau qu'ils contenoient avant d'avoir été plongés dans l'eau, il ne sera pas possible de connoître la quantité absolue qu'ils en contiendront en en sortant.

Toutes les mêmes circonstances se retrouvent dans les corps qui sont plongés dans le fluide igné, dans le fluide de la chaleur, avec cette différence seulement, que l'eau est un fluide incompressible, tandis que le fluide igné est doué d'une grande élasticité, & qu'il doit présenter des phénomènes particuliers dépendans de cette qualité.

Me voilà maintenant en état de désigner, par des définitions précises, les différens états du fluide igné, ou principe de la chaleur. J'appellerai *feu combiné*, *chaleur combinée*, la portion qui est unie à un corps, tellement qu'on ne peut la lui enlever sans le décomposer, telle est celle qui existe dans l'acide nitreux, & qui ne devient libre que par la décomposition de cet acide: la matière de la chaleur, dans cet état, paroît dépouillée de son élasticité, elle n'est plus dans un état d'agrégation, mais elle fait partie constituante des corps, & ne produit plus d'effet échauffant.

Je désignerai sous le nom de *chaleur libre*, toute celle qui n'est point engagée dans une combinaison. Mais il est aisé de concevoir que comme nous ne pouvons opérer que dans des milieux pour lesquels la matière de la chaleur a de l'affinité, elle ne peut être dans un état de liberté absolue;

d'ailleurs, comme au moment où elle se dégage, elle se répartit dans les différens corps environnans, elle les mouille, pour ainsi dire, & elle y tient avec une adhérence plus ou moins grande.

D'après ces définitions, la chaleur qui dispaçoit au moment où la glace se convertit en eau, est de la chaleur qui passe de l'état libre à l'état combiné; cette quantité de chaleur est constante & déterminée. On a observé en effet, que pour fondre une livre de glace, il falloit une livre d'eau à 60 degrés d'un thermomètre à mercure, divisé en 80 parties: il n'existe plus de glace quelques instans après ce mélange, & toute l'eau est exactement à zéro du thermomètre. Il est clair que dans cette expérience la quantité de chaleur nécessaire pour élever une livre d'eau de zéro du thermomètre à 60 degrés, a été employée à fondre une livre de glace, ou en d'autres termes, que cette chaleur a passé de l'état libre à l'état combiné.

Ce phénomène n'est pas particulier à la liquéfaction de la glace, il a généralement lieu dans le passage de tous les corps de l'état solide à l'état liquide; il y a toujours une portion de chaleur libre qui dispaçoit & qui devient chaleur combinée; c'est ce qu'on observe pour la cire à 49 degrés $\frac{1}{2}$ du thermomètre, & pour le suif à 31 degrés $\frac{3}{4}$.

On en peut dire autant du passage des corps de l'état liquide à l'état aériforme; il y a également dans ce cas une quantité considérable de chaleur libre qui passe à l'état de chaleur combinée, & cette chaleur reparoit & redevient libre lorsque le corps repasse de l'état aériforme à l'état liquide.

J'appellerai avec M. Crawffort, *chaleur spécifique*, la quantité de chaleur libre nécessaire pour élever la température d'un corps quelconque d'un certain nombre de degrés: cette quantité est variable dans tous les corps, mais elle est constante pour chacun, au moins dans l'intervalle d'un petit nombre de degrés; par exemple, depuis la congélation jusqu'à l'eau bouillante.

Il est clair *à priori*, & indépendamment de toute hypothèse, que plus les molécules des corps sont écartées les unes des

autres, plus elles doivent laisser entr'elles de capacité pour contenir de la matière de la chaleur, & plus par conséquent leur chaleur spécifique sera grande; ainsi la chaleur spécifique d'un corps liquide doit être moindre que celle du même corps lorsqu'il étoit dans l'état acristorme: elle doit être moindre encore quand il est dans l'état solide, & c'est en effet le résultat constant des expériences qui ont été faites jusqu'à présent sur ce sujet.

Il me reste encore à dire un mot sur ce qu'on doit entendre par l'expression de chaleur sensible. En général, nous n'avons de sensation que par le mouvement; en sorte qu'on pourroit poser comme un axiome, *point de mouvement, point de sensation*: plus on réfléchira sur cette assertion, plus on en reconnoîtra la vérité. Ce principe s'applique au sentiment du froid & du chaud: lorsque nous touchons un corps froid, la chaleur, qui tend à se mettre en équilibre dans tous les corps, passe de notre main dans le corps que nous touchons, & alors nous avons la sensation du froid. L'effet contraire arrive lorsque nous touchons un corps chaud; la matière de la chaleur passe du corps chaud à notre main, & nous avons la sensation du chaud. Si le corps & la main sont de même température, nous n'éprouvons aucune sensation, ni de chaud ni de froid, parce qu'encore une fois il n'y a point de sensation sans un mouvement qui l'occasionne. On pourroit donner à cette chaleur le nom de *chaleur sensible*, si M. Crawffort, & quelques Physiciens Anglois modernes, n'eussent donné un autre sens à cette expression.

Lorsque le thermomètre monte, c'est une preuve qu'il y a un écoulement de chaleur libre qui se répand dans les corps environnans: le thermomètre qui est au nombre de ces corps, en prend sa part, en raison de sa masse & de la capacité qu'il a lui-même pour contenir la matière de la chaleur. Le changement du thermomètre n'annonce donc qu'un déplacement de la matière de la chaleur; il n'indique tout au plus que la portion qu'il en a prise; mais il ne mesure pas la quantité totale qui a été dégagée, déplacée ou absorbée:

nous

nous n'avons encore de moyen exact pour remplir cet objet, que celui imaginé par M. de la Place. (*Voyez Mémoires de l'Académie, 1780, page 364*). Il consiste à placer le corps ou la combinaison d'où se dégage la chaleur, au milieu d'une sphère creusée de glace : la quantité de glace fondue est une mesure exacte de la quantité de chaleur qui s'est dégagée.

Par une suite nécessaire des différentes notions que je viens de donner, toutes les fois qu'un corps passera de l'état aériforme à l'état liquide, ou mieux encore, de l'état aériforme à l'état solide, il y aura un dégagement considérable de chaleur, c'est-à-dire, une quantité considérable de chaleur qui passera de l'état de chaleur combinée à l'état de chaleur libre. Or, l'air atmosphérique, ou plutôt l'air vital contenu dans l'air de l'atmosphère, étant de tous les fluides élastiques aériformes que nous connoissons, celui qui contient le plus de chaleur combinée, il en faut conclure, que c'est celui de tous qui doit laisser échapper le plus de chaleur libre lorsqu'il passe de l'état aériforme à l'état concret.

Ces principes une fois posés, considérons un moment les principaux phénomènes qui accompagnent la combustion ; ils sont au nombre de quatre.

Premièrement, il n'y a de combustion réelle, de dégagement de flamme & de lumière, qu'autant que le corps combustible est environné d'air vital, & qu'il est en contact avec cet air : non-seulement la combustion n'a pas lieu dans le vide, ni dans aucune autre espèce d'air, mais elle cesse d'avoir lieu dès qu'on y plonge le corps enflammé ou allumé, de la même manière que si on le plongeait dans de l'eau.

Secondement, dans toute combustion il y a absorption de l'air dans lequel se fait la combustion, & si on opère dans de l'air vital très-pur, on parvient, en prenant les précautions convenables, à l'absorber en totalité.

Troisièmement, dans toute combustion il y a augmentation dans le poids du corps brûlé, & cette augmentation est exactement égale au poids de l'air qui a été absorbé.

Mém. 1783.

XXX

Quatrièmement, dans toute combustion il y a dégagement de chaleur & de lumière.

L'explication de ces phénomènes généraux de la combustion n'a rien d'embarrassant, d'après les détails dans lesquels je suis entré sur la constitution de l'air : si c'est du phosphore qu'on brûle, l'air & le phosphore disparaissent, & on trouve à la place un acide concret en poudre blanche qui attire l'humidité avec une étonnante facilité : si c'est du soufre, on obtient de l'acide vitriolique, soit dans un état de concrétion, soit dans l'état d'une liqueur épaisse, & d'une pesanteur spécifique double de celle de l'eau : si c'est un métal qu'on a calciné, le résultat de l'opération est une chaux concrète. L'air vital passe donc dans la combustion du phosphore & du soufre, de l'état aériforme à l'état solide, ou au moins d'un fluide très-dense ; il doit donc, dans ces deux cas, abandonner la matière de la chaleur qui lui étoit combinée, & qui le constituoit fluide aériforme : mais la lumière & la flamme doivent être plus vives dans la combustion du phosphore que dans celle du soufre, par deux raisons : la première, parce qu'il s'absorbe plus d'air dans la combustion du phosphore que dans celle du soufre ; la seconde, parce que la combustion du phosphore étant plus rapide que celle du soufre, il y a plus d'air décomposé dans un temps donné, & par conséquent plus de matière de la chaleur qui devient libre à la fois.

S'il n'y a pas de chaleur & de lumière aussi sensibles dans la calcination des métaux, c'est qu'en général la décomposition de l'air est extrêmement lente dans cette opération ; mais lorsqu'il est possible de la rendre plus prompte, comme dans la calcination du fer & du zinc dans l'air vital, alors la calcination devient une véritable combustion, & elle est accompagnée de dégagement de flamme, de chaleur & de lumière.

Je n'ai parlé jusqu'ici que d'un cas très-simple de la combustion, c'est celui où l'air passe de l'état aériforme, à l'état concret ou liquide, mais cette circonstance ne se

rencontre pas dans toutes les combustions : dans celle de charbon , par exemple , le résultat de la combustion est de l'air fixe ou acide charbonneux , & cet acide est encore dans l'état aériforme . Si donc l'air vital ne laisse échapper la matière du feu qui lui étoit unie , qu'autant qu'il perd l'état aériforme , il ne devoit pas y avoir de dégagement de chaleur dans la combustion du charbon ; cette circonstance qui semble contrarier les idées générales que j'ai cherché à donner de la combustion , exige quelques détails particuliers .

J'observerai d'abord que dans la formation de l'air fixe , ou ce qui est la même chose , dans la combustion du charbon dans l'air vital , le charbon dispa roît en entier , & que la quantité de cette substance qui se trouve dissoute ainsi dans l'air vital , est de plus du tiers de son poids : mais loin que l'air qui a reçu une aussi grande quantité de matière , & qui l'a logée entre ses molécules constituantes , ait augmenté de volume , il se trouve au contraire diminué d'un dix-neuvième : il est donc évident que les particules élémentaires de l'air vital se sont rapprochées ; que les intervalles qu'elles laissoient entr'elles ont été diminués , & que par cette seule cause une partie de la matière de la chaleur qui y étoit logée , a dû en être chassée . Il est évident , d'un autre côté , que les molécules élémentaires du charbon n'ont pu se loger entre celles de l'air vital sans en chasser la matière de la chaleur , puisqu'une molécule de matière ne peut occuper la place d'une autre molécule ; il a donc dû y avoir encore par cette seconde cause une portion de matière de la chaleur expulsée qui est devenue libre .

Cette considération se trouve appuyée par une expérience décisive , c'est qu'il faut moins de matière de la chaleur pour élever la température de l'air fixe d'un certain nombre de degrés , que pour élever celle de l'air vital du même nombre de degrés : l'air fixe a donc moins de capacité que l'air vital pour contenir la matière de la chaleur ; donc toutes les fois que de l'air vital se convertira en air fixe , il y aura une portion de chaleur qui deviendra libre , & c'est ce qu'on observe dans

la combustion du charbon : si cette combustion se fait avec moins d'activité que celle du phosphore , c'est par la raison que le produit qui en résulte, étant une substance aériforme, l'air fixe , qui demande une certaine quantité de matière de la chaleur pour être tenu dans l'état d'élasticité, il y en a moins qui devient libre.

On demandera peut-être comment il est possible que l'air vital diminue de volume en se convertissant en air fixe, quoiqu'il reçoive pendant la combustion une addition considérable de matière? je répondrai que cet effet remarquable s'explique d'une manière très-heureuse, d'après les principes que j'ai exposés dans ce Mémoire. On doit en effet concevoir deux manières de diminuer le volume d'un corps ; la première en soutirant une partie de la matière de la chaleur logée entre les parties, & qui les écarte ; la seconde, en augmentant l'attraction que les molécules exercent les unes contre les autres : la diminution de volume qu'on observe au moment où l'air vital se convertit en air fixe, tient probablement à cette dernière cause : les molécules de l'air vital acquièrent plus de masse par l'addition du charbon qui s'y combine ; leur attraction doit donc être augmentée proportionnellement à l'augmentation de la masse ; & puisque le volume des fluides élastiques dépend de l'équilibre entre l'attraction des molécules & la force répulsive occasionnée par la chaleur , il est clair que l'attraction augmentant, le volume doit diminuer.

Il suit de ces réflexions, que les circonstances les plus favorables, toutes choses d'ailleurs égales, pour obtenir une combustion forte, c'est-à-dire, un grand dégagement de matière de la chaleur, sont 1.^o lorsque les deux corps que l'on combine sont chacun séparément dans l'état aériforme avant la combustion ; parce que l'un & l'autre fournissent alors la plus grande quantité possible de chaleur & de lumière, 2.^o quand ces mêmes corps, en se combinant, se réduisent à l'état concret ; 3.^o lorsque l'effet est instantané : il n'y a aucune combustion dans laquelle ces trois circonstances se rencontrent ; la combustion de l'air inflammable

& de l'air vital en réunit bien deux, mais le produit qui est de l'eau, est dans l'état liquide, & non pas dans l'état concret; & il y a lieu de croire que cette combustion seroit plus rapide & plus vive si on opéroit dans une température très-froide & fort inférieure au terme de la congélation, parce que les deux airs passeroient tout d'un coup de l'état aériforme à l'état concret, & laisseroient échapper toute la matière de la chaleur qui constitue l'eau dans l'état liquide: cette combustion n'en produit pas moins une détonation violente & une forte chaleur, sur-tout si l'on considère la médiocrité du poids des matériaux qu'on y emploie.

Il ne sera pas inutile, en parlant d'air inflammable, de distinguer ce qu'on doit entendre par *ignition*, par *inflammation*, par *détonation*: ces trois expressions, dans l'état actuel de nos connoissances, ne peuvent pas être employées l'une pour l'autre, & il est nécessaire de les définir.

L'ignition a lieu toutes les fois que le corps combustible n'est pas dans l'état aériforme, ni susceptible de prendre l'état aériforme par la chaleur de la combustion; c'est ce qui a lieu dans la combustion du charbon bien calciné: alors il n'y a point de flamme, & la combustion se fait à la surface même du corps combustible.

L'inflammation au contraire a lieu lorsque le corps combustible est naturellement aériforme, ou qu'il est susceptible de prendre l'état aériforme par la chaleur même de la combustion: l'air inflammable est dans le premier cas, l'esprit-de-vin, l'éther, les huiles essentielles, quelquefois les métaux sont dans le second; ces substances ne sont point combustibles dans leur état liquide, il faut qu'elles aient été réduites en vapeurs, c'est-à-dire, dans l'état aériforme, avant de pouvoir s'enflammer, & c'est la chaleur même de la combustion qui produit cet effet, ou au moins qui le continue.

A l'égard des huiles fixes, communément appelées *huiles grasses*, & qui sont toutes tirées des végétaux par expression & sans le secours de la distillation, on sait qu'il entre dans leur composition une grande quantité d'air inflammable & qu'elles en sont principalement composées: la chaleur même,

occasionnée par la combustion, suffit pour dégager cet air qui s'enflamme ensuite; en sorte que dans la combustion des huiles fixes il y a deux opérations très-distinctes, la décomposition de l'huile, c'est-à-dire, sa résolution en air inflammable, & son inflammation. La mèche de coton qu'on emploie dans les lampes, n'y agit point comme combustible, & ce qui le prouve, c'est qu'on peut y substituer des mèches d'amiant & d'autres substances incombustibles: la mèche n'est donc qu'un assemblage de tuyaux capillaires rangés à côté les uns des autres, qui agissent *mécaniquement* pendant la combustion, ce sont ces tuyaux qui portent à la flamme la quantité d'huile qu'elle est capable de décomposer & de réduire en air inflammable; tandis que si l'huile n'eût point été divisée, si elle eût été présentée en masse à la flamme, elle n'aurait point acquis le degré de chaleur supérieur à l'eau bouillante, qui est nécessaire pour la décomposer.

Les mêmes circonstances se retrouvent dans la combustion du bois, il y a de même décomposition, dégagement d'air inflammable, & inflammation; lorsqu'ensuite les matériaux susceptibles de prendre l'état aériforme sont épuisés, le charbon qui reste n'est plus inflammable, & présente les phénomènes de l'ignition.

Enfin la détonation est une troisième sorte de combustion toute particulière*; dans l'inflammation, il y a deux fluides aériformes, l'air inflammable & l'air vital qui se combinent, qui laissent subitement échapper la matière du feu avec laquelle ils étoient combinés, & qui se condensent sous la forme d'eau; dans l'ignition, c'est un corps concret, le charbon qui se combine avec une substance aériforme, l'air vital, qui le convertit en air fixe, & qui chasse une partie de la matière de la chaleur qui étoit logée dans ses interstices, ou plutôt qui y existoit dans

* C'est de la détonation du nitre dont on entend parler ici, à l'égard de la détonation de l'air vital & de l'air inflammable dans les vaisseaux fermés, le bruit & l'explosion dont elle est accompagnée, est un effet de la dilatation subite de l'eau qui

se forme, & qui occupe un espace plus considérable que celui des deux airs, lorsqu'elle est dans l'état de vapeurs; mais bientôt elle se condense, & alors le volume des deux airs disparoit.

un état de combinaison ; dans la détonation , au contraire , ce sont deux corps concrets qui se combinent l'un avec l'autre , & qui chassent réciproquement la matière de la chaleur qui leur étoit combinée ; mais cette matière de la chaleur est fournie principalement & presque exclusivement par le nitre ; une foule de raisons portent à le croire , & j'en ai exposé quelques-unes lorsque j'ai parlé de la combinaison de l'air nitreux avec le principe oxygène , & de la formation de l'acide nitreux.

On voit par tout ce qui vient d'être dit , que la combustion en général & à un très-petit nombre d'exceptions près , est un phénomène dépendant de la constitution de notre atmosphère ; qu'un corps combustible est celui qui a la propriété de décomposer l'air vital , celui avec lequel le principe oxygène a plus d'affinité qu'avec la matière de la chaleur ; enfin que la combustion elle-même n'est autre chose que l'effet qui a lieu dans le moment où le principe oxygène abandonne la matière de la chaleur pour s'engager dans une nouvelle combinaison.

Il est aisé de voir que cette doctrine est diamétralement opposée à celle de Stahl & de tous ses Disciples : c'est dans les corps combustibles qu'ils plaçoient la matière de la chaleur , le feu combiné , le phlogistique qui s'échappe au moment de la combustion ; j'avance au contraire , & je crois avoir démontré que l'air & le corps combustible y contribuent chacun ; 1.^o en raison de leur chaleur spécifique ; 2.^o en raison de la portion de chaleur combinée qui devient libre ; mais comme l'expérience & l'analogie prouvent également que la chaleur spécifique de l'air & celle qui lui est combinée , est infiniment plus abondante que celle de quelque corps combustible que ce soit , si ce n'est l'air inflammable , il en résulte que c'est l'air qui fournit la très-majeure partie de la matière de la chaleur qui se dégage pendant la combustion.

Quelques Physiciens , entr'autres M. Monge , qui adoptent ces mêmes principes en poussent encore plus loin les conséquences ; ils regardent comme une espèce de combustion tout mélange , toute combinaison dans laquelle il se dégage de la matière de la chaleur : ainsi lorsqu'on jette dans de l'eau de

l'esprit-de-vin, de l'acide vitriolique concentré, de la chaux vive, il s'excite une chaleur considérable. Comme dans les deux premiers de ces mélanges, les liqueurs réunies occupent moins de volume qu'elles n'en occupoient chacune séparément, les interstices qui existoient entre leurs molécules sont nécessairement diminués; il reste donc moins d'espace pour loger la matière de la chaleur; elle est donc obligée de se répandre au dehors dans l'état de chaleur libre, & de se répartir dans les corps environnans. C'est l'eau, dans cette combinaison, qui fournit la majeure partie de la chaleur, & on ne sauroit en douter quand on considère qu'elle contient beaucoup plus de chaleur spécifique que l'acide vitriolique & l'esprit-de-vin.

Je ferai remarquer ici un phénomène très-particulier qui a lieu dans le mélange de l'acide vitriolique avec l'eau, & qui me paroît confirmer d'une manière frappante ce que j'avance ici: si on prend de l'acide vitriolique très-concentré, & qu'on y mêle partie égale d'eau, il s'opère une grande chaleur, & la diminution du volume est considérable; si on ajoute à ce mélange, quand il est refroidi, une nouvelle partie d'acide vitriolique, la chaleur est moindre & la diminution du volume est également moindre; l'addition d'une troisième partie ne produit plus qu'une chaleur à peine sensible, & la diminution de volume se trouve moindre dans la même proportion. Enfin, ce n'est que lorsqu'on n'observe plus de diminution dans la somme des volumes des deux liqueurs mélangées, qu'il n'y a plus de chaleur. Il y a donc une relation entre la diminution du volume & la quantité de chaleur dégagée; quand l'une est à son *maximum*, l'autre y est aussi; quand l'une est réduite à zéro, l'autre y est également réduite. N'est-ce pas une nouvelle preuve que le fluide de la chaleur occupe les interstices des corps? Que toutes les fois que les interstices diminuent, il y a de la chaleur qui en est chassée & qui devient libre? Que toutes les fois qu'ils augmentent, il se forme en quelque sorte un vide qui se remplit aux dépens de la chaleur de tous les corps environnans? Je dirois presque que tous les corps de la Nature sont pour la matière de

de la chaleur, ce qu'une éponge est pour l'eau : pressez l'éponge; vous diminuez les petites cellules qui retiennent l'eau; faites en sorte de la dilater, aussitôt les cellules augmentées se trouvent en état de loger une plus grande quantité d'eau. Ces idées au surplus sur le dégagement de la matière de la chaleur qui a lieu lorsqu'on diminue le volume des corps, ne me sont point propres. M.^{rs} Vandermonde & Monge ont avancé la même chose dans un Mémoire lû à l'Académie.

Les variations que tous les corps éprouvent, par l'effet du chaud & du froid, sont une suite de ce phénomène; on ne peut les échauffer, c'est-à-dire, on ne peut y introduire une plus grande quantité de matière de la chaleur sans en écarter les parties, & c'est cet écartement qui fait place à la matière de la chaleur: réciproquement toutes les fois qu'on parvient à les amplifier, à augmenter leur volume d'une manière quelconque, ils acquièrent en même temps une plus grande capacité pour contenir la matière de la chaleur, & ils sont alors disposés à en recevoir de tous les corps environnans. Il est possible que ce soit à cet effet que tiennent la chaleur très-sensible que prennent les métaux, lorsqu'on les écrouit ou qu'on en diminue le volume d'une manière quelconque; c'est une manière de presser l'éponge & d'exprimer le fluide qu'elle contient.

On m'objectera peut-être que si l'explication que je donne de la chaleur qui se dégage du mélange de l'eau avec l'acide vitriolique, avec l'acide nitreux, avec l'esprit-de-vin, étoit vraie, il devroit également y avoir chaleur lors de la dissolution des sels dans l'eau; car il y a diminution de volume dans presque toutes ces dissolutions, c'est-à-dire, que le volume de la dissolution est moindre que n'étoit la somme du volume de l'eau & du sel à dissoudre. Je répondrai que le principe, qu'il y a dégagement de chaleur toutes les fois qu'il y a diminution de volume, n'est vrai que dans la combinaison des liquides entr'eux; il ne peut plus en être de même lorsqu'un des deux corps combiné change d'état par le résultat de la combinaison; c'est ce qui arrive aux sels que l'on dissout dans l'eau; ils passent de l'état solide & concret

à l'état liquide; or ce passage ne peut avoir lieu sans une absorption de matière de la chaleur, sans qu'une portion de matière de la chaleur ne se combine avec eux pour les constituer dans l'état liquide. Le refroidissement qu'on observe dans la dissolution des sels ne prouve donc autre chose, sinon qu'il y a plus de matière de la chaleur employée pour dissoudre le sel, qu'il ne s'en dégage des interstices de l'eau par l'effet de la diminution du volume; toute cette chaleur au surplus qui a été employée à dissoudre les sels, reparoît au moment où ils cristallisent, ce qui prouve encore que leur passage de l'état liquide à l'état concret, est assujetti à la loi commune, comme leur passage de l'état concret à l'état liquide.

Je n'ai eu pour objet dans ce Mémoire, que de donner de nouveaux développemens à la théorie de la combustion, que j'ai publiée en 1777; de faire voir que le phlogistique de Stalh, est un être imaginaire dont il a supposé gratuitement l'existence dans les métaux, dans le soufre, dans le phosphore, dans tous les corps combustibles; que tous les phénomènes de la combustion & de la calcination s'expliquent d'une manière beaucoup plus simple & beaucoup plus facile sans phlogistique qu'avec le phlogistique. Je ne m'attends pas que mes idées soient adoptées tout d'un coup; l'esprit humain se plie à une manière de voir, & ceux qui ont envisagé la Nature sous un certain point de vue, pendant une partie de leur carrière, ne reviennent qu'avec peine à des idées nouvelles; c'est donc au temps qu'il appartient de confirmer ou de détruire les opinions que j'ai présentées: en attendant, je vois avec une grande satisfaction, que les jeunes gens qui commencent à étudier la Science sans préjugé, que les Géomètres & les Physiciens qui ont la tête neuve sur les vérités chimiques, ne croient plus au phlogistique dans le sens que Stalh l'a présenté, & regardent toute cette doctrine comme un échafaudage plus embarrassant qu'utile pour continuer l'édifice de la Science chimique.

Je donnerai dans un Mémoire particulier, quelques détails sur les phénomènes de la détonation du nitre avec différens corps.



M É M O I R E

SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

QUATRIÈME PARTIE.

*Réflexions sur la méthode de déterminer la Probabilité
des évènements futurs, d'après l'Observation
des évènements passés.*

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

CETTE partie de l'Analyse qui enseigne à déterminer la probabilité des évènements futurs, d'après l'ordre qu'ont suivi les évènements passés du même genre que l'on a observés, est susceptible d'un grand nombre d'applications utiles & curieuses : j'ai cru en conséquence qu'il pourroit n'être pas inutile d'examiner les principes sur lesquels cette Analyse est fondée ; tel est l'objet des Réflexions suivantes.

I.

SOIENT deux évènements A & N que je suppose simplement contradictoires, c'est-à-dire, ne pouvant subsister ensemble & ayant nécessairement lieu l'un ou l'autre. Si A a eu lieu m fois & N n fois, & qu'on demande la probabilité d'avoir en $p + q$ évènements, p évènements A & q évènements N , la probabilité demandée sera

$$\frac{p + q \dots \dots q + 1}{1.2 \dots \dots q} \cdot \frac{\int x^{m+p} (1-x)^{n+q} dx}{\int x^m (1-x)^n dx},$$

cette intégrale étant prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$; telle est la règle générale.

I I.

ON voit d'abord que cette loi n'exprime réellement la probabilité que dans les deux hypothèses suivantes.

Y y ij

1.^o Si la probabilité des évènements A & N reste la même dans toute la suite des évènements; cela est évident par la formule même qui exprime la loi.

2.^o Dans le cas où cette même probabilité est variable, mais où l'on supposeroit en même temps que la valeur de la probabilité, quoique pouvant être différente pour chaque évènement, est cependant prise au hasard pour chacun, d'après une certaine probabilité générale x pour A , & $1 - x$ pour N .

Supposons, par exemple, une suite d'urnes qui renferment des boules blanches & des noires: il est clair qu'on peut supposer qu'il existe dans chaque urne un même nombre de boules blanches & de boules noires; & c'est la première hypothèse. On peut supposer aussi qu'on ait rempli les urnes, en tirant des boules au hasard d'une autre urne qui renfermoit un certain nombre de boules blanches & noires. Dans ce dernier cas qui représente la seconde hypothèse, le rapport du nombre des boules blanches à celui des boules noires n'est pas nécessairement le même dans toutes les urnes, mais seulement la valeur moyenne de ce rapport est la même dans toutes, & est égale à celle du même rapport pour l'urne de laquelle toutes les boules ont été tirées. Si donc on suppose le nombre des boules infini, la formule ci-dessus conviendra également aux deux hypothèses.

Si on applique cette méthode à des cas réels, c'est-à-dire; à des évènements naturels, on voit d'abord que chaque évènement en lui-même est déterminé par une loi, comme le tirage d'une boule le seroit également; qu'ainsi dans l'un & l'autre cas, ce que nous appelons *probabilité*, n'est que le rapport du nombre des combinaisons qui amènent un évènement à celui des combinaisons qui ne l'amènent pas; combinaisons que notre ignorance nous fait regarder comme également possibles.

Ainsi la première hypothèse consiste à supposer que le rapport entre ces combinaisons également possibles, reste le même pour tous ces évènements; & la seconde consiste à

regarder ce rapport comme variable, mais déterminé de manière que la valeur moyenne des rapports possibles soit toujours la même pour chaque évènement.

Les résultats seront les mêmes, parce que ces deux hypothèses ne diffèrent réellement que par rapport à moi, qui, dans le premier cas, regarde tous les évènements comme également probables, & qui, sachant dans le second qu'ils ne doivent pas l'être, mais ignorant la loi suivant laquelle leur probabilité varie, la suppose dépendante semblablement d'une même loi générale.

Mais dans toute autre hypothèse, la formule ci-dessus ne peut être regardée comme donnant des résultats rigoureux; & il faut examiner s'il n'y a pas entre ces hypothèses & celle qui suppose tous les évènements indépendans, quelque autre supposition qui soit propre à représenter la probabilité, d'une manière plus vraie dans une partie des questions qu'on peut avoir à résoudre; autrement il suffiroit, au lieu d'employer sans restriction la méthode précédente, de suivre celle que j'ai indiquée dans l'*Essai sur la probabilité des décisions*, page 178.

III.

Si l'on examine la même formule générale, on trouvera que la probabilité sera la même dans quelqu'ordre que les m évènements A & les n évènements N se soient succédés.

Cette égalité a lieu nécessairement toutes les fois qu'on suppose x constant pour toute la suite des évènements; mais il paroît en même temps qu'il doit en résulter une objection contre cette hypothèse.

Supposons en effet, que sur cent mille évènements, A soit arrivé 51,000 fois & N 49,000 fois : si sur chaque suite de 100 évènements consécutifs, on trouve qu'on a eu 51 fois A & 49 fois N , ne se croira-t-on pas autorisé à juger que dans les évènements futurs, le nombre des A surpassera le nombre des N avec plus de probabilité, que si dans le même nombre on avoit eu quelquefois le nombre des N

supérieur à celui des A , & que l'ordre de ces évènements eût été plus irrégulier?

Supposons ensuite que, ces évènements étant partagés en suites de mille chacune, le nombre des A l'emporte beaucoup dans les premières, que cette supériorité diminue peu-à-peu, qu'elle devienne presque nulle vers le milieu; qu'ensuite vers la fin N commence à l'emporter, de manière toutefois que la différence pour la totalité soit toujours de deux mille en faveur de A . Ne seroit-on pas alors avec quelque raison tenté de croire que N l'emportera sur A dans l'avenir, si sur-tout on ne considère pas un très-grand nombre d'évènements futurs?

Les résultats de l'hypothèse de x constant sont donc ici en contradiction avec ce que la raison paroît indiquer. Il faut donc examiner si l'on ne devoit pas, du moins dans plusieurs cas, y substituer une méthode où la probabilité pût dépendre de l'ordre des évènements.

I V.

Nous considérerons ici l'hypothèse où l'on suppose x variable dans les deux cas, 1.^o d'une suite d'évènements qui ne sont liés entr'eux par aucune loi relative au temps & à l'ordre de leur production; 2.^o d'une suite d'évènements liés entr'eux par une loi relative à cet ordre. Dans le premier cas, si on connoissoit la loi de la probabilité de ces évènements, la formule qui l'exprimeroit ne seroit pas une fonction du temps ou de la place qu'occupe l'évènement; elle le seroit dans le second.

Si, par exemple, je suppose des paquets de cartes rouges & noires, dont le nombre soit $m + n + p + q$, que j'aie tiré de $m + n$ de ces paquets m cartes rouges, & n noires, & que je cherche la probabilité de tirer des $p + q$ paquets restans, p cartes rouges & q noires. Si je ne sai pas que ces paquets ont été formés en tirant au hasard des cartes d'un tas donné de cartes rouges & noires, il est clair que je n'ai aucune raison de supposer ni que le

rapport du nombre des cartes rouges à celui des cartes noires, soit constant pour tous les paquets, ni que la valeur moyenne de ce rapport supposé variable, soit la même pour tous; & en même temps je n'ai aucune raison de supposer que ce rapport varie suivant l'ordre dans lequel on range les paquets, ou suivant celui où l'on tire une carte de chacun.

Dans une suite au contraire d'événemens naturels, il se présente un grand nombre de cas où l'on peut supposer que l'ordre du temps influe sur la production des événemens.

V.

PUISQUE dans le premier cas la probabilité peut être différente pour les événemens successifs, & que cependant elle est indépendante de l'ordre qu'ils suivent, il est clair qu'elle ne peut être assujettie à aucune autre loi que celle qui naît de la probabilité qu'elle fera plutôt la même que différente pour les divers événemens. Supposons donc que t exprime le nombre des événemens tant passés que futurs, $t' = m + n$ celui des événemens passés, $t'' = p + q$ celui des événemens futurs, & que $x', x'', x''' \dots x^{(t)}$ expriment des probabilités différentes en faveur de A ; au lieu de la formule du *paragraphe I*, on aura pour la probabilité de p événemens A , & de q événemens N , dans t'' événemens futurs, la fonction

$$\frac{t'' \cdot t'' - 1 \dots p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} \times$$

$$\int \left[\frac{(x' + x'' + x''' \dots + x^{(t)})^{m+p}}{t} \cdot \left(1 - \frac{x' + x'' + x''' \dots + x^{(t)}}{t} \right)^{n+q} dx' dx'' \dots dx^{(t)} \right]$$

$$\int \left[\frac{(x' + x'' + x''' \dots + x^{(t)})^m}{t} \cdot \left(1 - \frac{x' + x'' + x''' \dots + x^{(t)}}{t} \right)^n dx' dx'' \dots dx^{(t)} \right]$$

les intégrales étant prises t fois pour chaque x successivement, depuis 1 jusqu'à 0; & l'on aura

$$\int (x' + x'' + x''' \dots + x^{(t)})^m (1 - x' - x'' - x''' \dots - x^{(t)})^n dx' dx'' \dots dx^{(t)}$$

$$= \frac{1}{m! n!} \int \dots \int (1 - x' - x'' - x''' \dots - x^{(t)})^{m+n} dx' dx'' \dots dx^{(t)}$$

par rapport aux x' , x'' , x''' x'''' ; mais celles du numérateur n'étant prises que depuis

$$x' + x'' + x''' \dots \dots \dots + x'''' = z$$

jusqu'à

$$x' + x'' + x''' \dots \dots \dots + x'''' = \frac{z}{2}$$

& faisant enfin $z = \frac{1}{0}$.

V I.

Si nous supposons maintenant qu'il existe une variation dans la probabilité, qui puisse dépendre de l'ordre des évènements, soit x' la probabilité du premier A , & $1 - x'$ celle du premier N ; $\frac{x' + x''}{2}$ & $\frac{2 - x' - x''}{2}$ pourront exprimer les probabilités du second A ou du second N , $\frac{x' + x'' + x'''}{3}$ & $\frac{3 - x' - x'' - x'''}{3}$ celles du troisième A ou du troisième N ; & celles des r^{es} A ou N pourront l'être par $\frac{x' + x'' + x''' \dots + x'''}{r}$ & $\frac{r - x' - x'' - x''' \dots - x'''}{r}$; où l'on voit que x' est la probabilité de A au premier coup, x'' celle de A au second si elle est différente de celle du premier, x''' celle de A au troisième si elle est différente de celle des deux autres, & ainsi de suite.

On voit ensuite que comme l'on ne connoît pas la loi de l'ordre des évènements, mais qu'on sait seulement qu'il peut en exister une, la méthode consiste, de même que dans l'article précédent, à prendre seulement la probabilité que celle des évènements successifs sera ou ne sera pas la même, avec cette seule différence qu'ici l'on a égard à l'ordre que les évènements se sont suivis.

Si donc on a un certain nombre d'évènements A & N qui se sont succédés, & qu'on cherche la probabilité que dans un nombre donné d'évènements futurs, les A & N suivront un ordre quelconque donné, on prendra successi-

vement pour chaque évènement A ou N , l'expression qui lui convient, suivant le rang où il est arrivé, ou celui où l'on suppose qu'il doit arriver; on formera un produit de toutes ces valeurs successives, 1.^o pour les évènements passés seulement, 2.^o tant pour les évènements passés que pour les évènements futurs; le premier produit contenant r , x si r est le nombre des évènements passés, & le second contenant $r + r'$, x si r' est le nombre des évènements futurs: on prendra $r + r'$ fois l'intégrale du second produit successivement pour chaque x , depuis 1 jusqu'à zéro; & r fois l'intégrale du premier produit pour chaque x , depuis 1 jusqu'à zéro; & l'intégrale du second produit, divisée par celle du premier, donnera la valeur de la probabilité cherchée.

On voit qu'ici la formule varie suivant l'ordre des évènements passés & suivant celui des évènements futurs.

Supposons ici qu'on ait eu deux fois A , & qu'on cherche la probabilité de l'avoir encore une fois, elle sera $\frac{2}{4}$, qui est plus petit que $\frac{3}{4}$ que donne la méthode ordinaire, & que $\frac{3}{5}$ que donne l'hypothèse du *paragraphe V*.

Si l'on a eu trois fois A , & qu'on demande la probabilité de l'avoir une quatrième, on trouvera qu'elle est $\frac{1799}{3600}$, au lieu de $\frac{4}{5}$ ou $\frac{40824}{67200}$ qu'on auroit eu dans les deux autres hypothèses.

Comme ici on doit avoir une fonction différente, suivant l'ordre qu'on a supposé, soit aux évènements passés, soit aux évènements futurs, il est aisé de voir qu'il faudra faire de nouveaux calculs pour chaque disposition d'évènements, ce qui, si les nombres r ou r' sont fort grands, rendroit impossible l'usage de cette méthode: on doit donc, dans les cas où cette hypothèse paroîtroit pouvoir être admise, chercher à déterminer dans la suite des évènements, telle qu'elle s'est offerte, un ordre constant qui y ait toujours été observé; cet ordre une fois supposé connu, on regardera la constance comme un évènement unique qui s'est répété sans jamais manquer;

on cherchera ensuite la probabilité qu'il continue d'avoir dans la suite la même constance, & ce sera à cette nouvelle hypothèse que l'on appliquera le calcul.

Ainsi soit n le nombre des évènements arrivés constamment, & p celui des évènements futurs: la probabilité que cet évènement aura lieu, ou que cette loi sera observée pendant l'espace de ces p révolutions, sera exprimée par

$$\frac{\int \left[(x' \cdot \frac{x' + x''}{2} \cdot \frac{x' + x'' + x'''}{3} \dots \frac{x' + x'' \dots x''^{n+p}}{n+p}) \partial x \partial x'' \dots \partial x''^{n+p} \right]}{\int \left[(x \cdot \frac{x' + x''}{2} \cdot \frac{x' + x'' + x'''}{3} \dots \frac{x' + x'' \dots + x''^{n+p}}{n+p}) \partial x' \partial x'' \dots \partial x''^{n+p} \right]}$$

Pour déterminer ensuite la valeur de

$\int (x' \cdot x' + x'' \dots x' + x'' \dots + x''^{n+p} \cdot \partial x' \partial x'' \dots \partial x''^{n+p})$,
on prendra une série de termes $z', z'', z''', z'''' \dots z''^{n+p}$, tels que

$$z' = 1,$$

$$\Delta z'' = \frac{n-1}{2},$$

$$\Delta z''' = \frac{n-2}{2} z'' + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3},$$

$$\Delta z'''' = \frac{n-3}{1 \cdot 2} z''' + \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z'' + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

.....

& la valeur cherchée sera $\frac{z'}{n+1} + \frac{z''}{n} + \frac{z'''}{n-1} + \frac{z''''}{n-2} + \&c$, ou $\int [(z' x^n + z'' x^{n-1} + z''' x^{n-2} + z'''' x^{n-3} + \&c.) \partial x]$, l'intégrale étant prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$.

On peut observer qu'il n'est pas nécessaire de connoître la valeur de cette formule pour être assuré, 1.^o que plus n sera grand, plus p restant le même, on aura une grande probabilité d'avoir ces évènements futurs assujettis à la même loi; en sorte que pour un nombre donné, on peut prendre n assez

grand pour que cette probabilité soit aussi grande qu'on voudra; 2.^o que n restant le même, plus p croîtra, plus cette probabilité diminuera; en sorte que quel que soit n , elle deviendra nécessairement trop petite pour une certaine limite des valeurs de p ; & ainsi dans cette hypothèse, la probabilité qu'une loi observée continuera d'avoir lieu, est nécessairement décroissante, & par conséquent on ne peut compter à chaque époque sur la constance d'une loi, que pour un nombre p d'événemens déterminé, ou pour un temps donné. Il est vrai que si dans ce temps donné & pour ces p événements, la loi continue de s'observer, l'on aura à cette époque soit une probabilité égale, que la loi sera encore constante pour un nombre p' d'événemens plus grand & pour un temps plus long, soit une probabilité plus grande pour une seconde suite de p événements, ou pour un temps égal au premier. Cette diminution dans la probabilité que la même loi embrassera un plus grand nombre d'événemens futurs, & s'observera dans des temps plus éloignés, s'accorde avec ce que la raison nous indique.

Nous n'oserions nous répondre que la loi la plus régulière que nous observons dans les phénomènes, se conserve sans aucune modification pendant un temps indéfini. Nous supposons à la vérité qu'il peut exister une loi constante plus compliquée, qui pendant un temps semble la même à nos yeux que celle qu'on a d'abord établie, & qui ensuite s'en écarte d'une manière sensible; mais il est aisé de voir que c'est précisément le cas où la loi observée d'abord, cessant d'être constante, on lui en substitue une autre qui embrasse à la fois les phénomènes auxquels la première loi répondoit & ceux qui paroissent y échapper.

V I I.

Nous avons donc ici trois hypothèses différentes; 1.^o celle où la probabilité est constante, c'est-à-dire, où l'on suppose chaque événement également probable, ou du moins la probabilité moyenne pour chacun, déterminée d'une manière

semblable; 2.^o celle où l'on suppose cette probabilité variable, mais indépendante du temps où les événemens sont arrivés, & de l'ordre dans lequel ils ont été observés; 3.^o celle où on les suppose dépendans, ou plutôt pouvant dépendre de cet ordre.

Cette dernière hypothèse est la plus générale, & même c'est celle à laquelle on doit s'arrêter toutes les fois qu'on n'a aucun motif de croire que l'une des deux premières doit être préférée: en effet, dans l'une on suppose la probabilité constante; dans la seconde, on la suppose indépendante de l'ordre des événemens; suppositions qui peuvent n'être pas rigoureusement légitimes, au lieu que dans la troisième on ne fait proprement aucune supposition: le cas de la probabilité constante & celui de la probabilité indépendante de l'ordre des événemens, y entrent même chacun avec l'espèce de probabilité que l'observation peut donner à l'une ou à l'autre hypothèse: ainsi toutes les fois que l'on voudra connaître, d'après les événemens, une loi observée dans la Nature, on commencera d'abord par déterminer, d'après l'examen de ces événemens, quelque loi constante à laquelle tous ces événemens aient été assujettis, ou suivant laquelle ils puissent être classés & réduits à des événemens plus généraux qui aient lieu constamment. On cherchera la loi la plus simple qu'il soit possible, celle qui, pour le même nombre d'événemens observés, donne le plus grand nombre d'événemens assujettis à la loi, & qu'on peut regarder comme amenés constamment; ensuite on cherchera la probabilité que cette loi sera observée pour les temps futurs.

VIII.

LA probabilité de la constance d'une loi observée, telle qu'on pourroit la déduire de la troisième hypothèse, & même celle qu'on détermineroit d'après la première, diminue si promptement, qu'à moins que le nombre des événemens observés ne soit très-grand, on ne pourroit avoir que pour des temps très-courts une probabilité fort grande que cette loi

continuera d'avoir lieu; & cependant pour avoir un juste motif de croire que cette loi est constante, il faut à la fois que cette probabilité soit très-grande, & qu'elle subsiste telle pour un temps très-long.

Mais nous remarquerons que, s'il s'agit d'événemens naturels dont chacun, quoiqu'assujetti à des loix différentes, a toujours paru constamment assujetti chacun à sa loi particulière, cette constance observée dans tous ces événemens doit augmenter pour chacun la probabilité de celle qui aura lieu dans la suite des événemens futurs; & nous allons chercher l'expression de la probabilité dans cette nouvelle hypothèse.

Pour cela, 1.^o nous désignerons par A' , A'' , $A''' \dots A''^m$, m événemens que nous supposerons avoir eu lieu constamment, & nous ferons la probabilité moyenne du premier de chacun de ces événemens égale à $\frac{x' + x'' + x''' \dots + x''^m}{m}$.

Comme ces événemens sont supposés indépendans les uns des autres, il paroîtroit qu'on dût exprimer la probabilité de chacun par des quantités différentes; mais il faut observer qu'ici ce ne sont point les probabilités des événemens particuliers A' , $A'' \dots A''^m$ que l'on examine, mais celle de l'événement qui a lieu en général, plutôt que l'événement contradictoire, c'est-à-dire, de l'événement qui, par la nature des choses, arrive constamment, tandis que l'événement contradictoire n'arrive pas, & qu'ainsi on peut leur supposer une égale probabilité moyenne, comme on l'a supposé pour les événemens semblables *paragraphe 5*.

2.^o Soit $n' + 1$ le nombre de fois que l'événement A' est arrivé, $n'' + 1$ le nombre de fois que l'événement A'' est arrivé, & $n''^m + 1$ le nombre de fois qu'on a eu l'événement A''^m , & qu'on cherche la probabilité que cet événement A''^m arrivera p fois de plus.

On formera les produits

$$P' = \frac{x' + x'' \dots + x''^{n'+1}}{n' + 1} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x''^{n''+1}}{n'' + 1} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x''^{n''^m+1}}{n''^m + 1} \dots \frac{x' + x'' \dots + x''^{n''^p+1}}{n''^p + 1}$$

$$P'' = \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+2}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+3}}{m+3} \dots$$

$$\dots \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+n}}{m+n},$$

$$P''^m = \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+3}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+2}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+1}}{m+3} \dots$$

$$\dots \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+n}}{m+n};$$

$$Q = \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+2}}{m+2} \cdot \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+3}}{m+3} \dots$$

$$\dots \frac{x' + x'' \dots + x_{1,1}''^{m+p}}{m+n''+p};$$

dans lesquels on voit que les m premiers x qui appartiennent aux m premiers évènements de chaque classe, sont les mêmes pour tous, mais que les autres x qui appartiennent aux évènements subléquens de chaque classe, sont différens pour chacun.

Cela posé, on aura la probabilité cherchée, c'est-à-dire, celle d'avoir p fois de suite l'évènement futur A''^m exprimée par la fonction

$$\frac{f(P' P'' \dots P''^{m-1} Q \delta x')}{f(P' P'' \dots P''^m \delta x')}.$$

Si l'on suppose que les x sont les mêmes, alors on aura pour cette même probabilité

$$\frac{n' + n'' \dots + n''^m + 1}{n' + n'' \dots + n''^m + p + 1}, \text{ au lieu de } \frac{n' + n'' \dots + n''^m + m + 1}{n' + n'' \dots + n''^m + m + p + 1}.$$

qu'on auroit eu s'il n'y avoit eu réellement qu'un seul évènement.

Cette formule suffit pour montrer comment un fait naturel observé une seule fois, pourvu qu'il ait été bien observé & analysé de manière à n'être pas confondu avec un autre, peut être regardé comme un fait constant avec une très-grande probabilité; cette probabilité très-grande est alors l'effet de la constance observée dans un grand nombre de faits, qui

rend probable l'existence d'une constance semblable dans un autre fait.

I X.

NOUS terminerons cet article par une dernière remarque, supposons qu'on ait observé deux suites S & S' des évènements A & N ; que dans la première le nombre des A soit m , & n celui de N ; que dans la seconde on eût eu m' A & n' N , que le rapport de m à n diffère assez de celui de m' à n' , pour que l'on puisse supposer que dans ces deux suites la probabilité de A ne soit pas la même, & on demande dans ce cas la probabilité d'avoir p fois A & q fois N dans $p + q$ évènements futurs. Soit x la probabilité de A dans la suite S , x' cette probabilité dans la suite S' ; $1 - x = z$, $1 - x' = z'$ les probabilités de l'évènement N ; soit enfin $X = x^m \cdot (1 - x^n)$, & $X' = x'^{m'} (1 - x')^{n'}$, nous prendrons d'abord dans $(x + z + x' + z')^{p+q}$ la suite de tous les termes où la somme des exposans de x & de x' égale p , & où celle des exposans z & z' égale q . Soit $A x^a x'^b, z^{a'} z'^{b'}$ un de ces termes, la probabilité qui en résulte sera

$$A. \frac{f X x^a z^{a'} \partial x \cdot f X' x'^b z'^{b'} \partial x'}{f X \partial x \cdot f X' \partial x'}$$

& la probabilité cherchée sera égale à la somme de tous ces termes ainsi formés, pourvu que l'on suppose qu'il est également probable qu'un évènement futur appartienne à la suite S ou à la suite S' .

Si au contraire, on suppose que cette même probabilité dépend de l'ordre observé dans ces deux suites, alors pour avoir la probabilité, on multipliera le terme

$$A. \frac{f X x^a z^{a'} \partial x \cdot f X' x'^b z'^{b'} \partial x'}{f X \partial x \cdot f X' \partial x'}$$

par $(\frac{p+a}{a+a'}) \cdot f(X \partial x)^{a+a'} \cdot f(X' \partial x')^{b+b'}$, & la probabilité cherchée sera égale à la somme de tous les termes, divisée

divisée par $\int (X \partial x + \int X' \partial x')^p + q$. Enfin on peut supposer cette probabilité réglée suivant le nombre des termes de chaque suite, & alors il faudra multiplier le même terme par $\frac{p+q}{a+a'} \int x''^{m+m'+a+b} (1-x'')^{m+n+a'+b'} \partial x''$, prendre la somme de tous ces termes, & la diviser par $\int x''^{m+m'} (1-x'')^{n+n'} \partial x''$.

Ce que nous avons dit pour deux suites S & S' , s'applique facilement à un nombre quelconque de suites semblables.

On pourroit choisir encore d'autres hypothèses, chacune desquelles doit être préférée suivant la nature des questions que l'on traite; car en général dans cette partie du calcul des probabilités où il s'agit sur-tout de trouver des valeurs moyennes, il ne le faut employer que pour les quantités dont le raisonnement ne peut nous apprendre ni la valeur ni les limites, & seulement comme un supplément à une connoissance directe à laquelle nous ne pouvons atteindre, & chercher à resserrer, autant qu'il est possible, le nombre des combinaisons que notre ignorance seule nous fait regarder comme indifférentes entr'elles.

CINQUIÈME PARTIE.

Sur la probabilité des faits extraordinaires.

I.

Si l'on s'étoit procuré une liste de faits extraordinaires, dont la vérité a été attestée par un témoin oculaire, & qu'on connût de plus, lesquels de ces faits ont été reconnus pour vrais, ou trouvés faux dans la suite par l'effet d'un examen approfondi, on pourroit en déduire par le calcul la probabilité d'un témoignage sur les faits extraordinaires; & si on dressoit cette liste suivant les différens ordres de l'in vraisemblance de ces faits, on pourroit évaluer pour chaque classe la crédibilité des témoins.

Mais indépendamment de la difficulté de se procurer de telles listes, & de former exactement ces classifications, on

sent combien on trouveroit d'obstacles même pour distinguer ceux des faits extraordinaires qu'on doit regarder comme vrais ou comme faux.

I I.

AU défaut de cette méthode directe nous en proposerons une qui, à la vérité, est indirecte, mais dont on pourra faire des applications très-utiles.

Supposons que u désigne la probabilité d'un évènement A , & e celle d'un évènement N , que u' & e' désignent les probabilités de deux autres évènements A' & N' ; $\frac{u u'}{u u' + e e'}$ exprimera la probabilité de la combinaison des évènements A, A' ; & $\frac{e e'}{u u' + e e'}$ la probabilité de celle des évènements N, N' .

Or il est aisé de voir que ces deux combinaisons A, A' , & N, N' peuvent désigner deux évènements contradictoires entr'eux, pourvu que la production de ces évènements soit dépendante de deux conditions.

Supposons, par exemple, que l'on ait $u + e$ urnes, que u de ces urnes contiennent u' jetons d'or, & e' jetons d'ivoire; & que e de ces urnes contiennent e' jetons d'argent & u' jetons de bois.

La probabilité, d'avoir une pièce d'or plutôt qu'une pièce d'argent sera $\frac{u u'}{u u' + e e'}$, & celle d'avoir une pièce d'argent plutôt qu'une pièce d'or sera $\frac{e e'}{u u' + e e'}$; en sorte que, si l'on suppose les jetons métalliques égaux en poids l'un à l'autre, de même que les jetons d'ivoire & de bois, & que sans voir celui qui a été tiré, on reconnoisse au poids qu'il est métallique, les probabilités qu'il sera d'or ou d'argent seront

$$\frac{u u'}{u u' + e e'}, \frac{e e'}{u u' + e e'}.$$

Supposons maintenant que u & e représentent les probabilités de la vérité d'un évènement extraordinaire & de la

fausseté du même évènement, & qu'en même-temps u' & e' expriment la probabilité qu'un témoignage sera ou non conforme à la vérité, & qu'un témoin ait assuré de la vérité de cet évènement. On voit que l'évènement extraordinaire déclaré vrai, représente ici le jeton d'or, que l'évènement extraordinaire faux & déclaré vrai représente le jeton d'argent, qu'on est ici dans le cas précisément où l'on fait d'avance que le jeton est de métal, & qu'ainsi la probabilité que l'évènement extraordinaire déclaré vrai l'est réellement, sera

$$\frac{u u'}{u u' + e e'}, \text{ \& celle qu'il est faux } \frac{e e'}{u u' + e e'}.$$

Supposons par exemple, $e = \frac{999999}{1000000}$, & $n = \frac{1}{1000000}$;

$$u' = \frac{999}{1000}, e' = \frac{1}{1000}, \text{ nous aurons } \frac{u u'}{u u' + e e'} = \frac{999}{1000998}, \text{ \& } \frac{e e'}{u u' + e e'} = \frac{999999}{1000998}.$$

L'on voit par cet exemple, qu'un témoignage duquel, pour un évènement ordinaire ou dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, il résulteroit une probabilité $\frac{999}{1000}$ de l'évènement affirmé, ne donneroit cependant, pour un évènement très-extraordinaire, qu'une probabilité moindre que $\frac{1}{1000}$.

III.

LA probabilité n de l'évènement désigne ici cette probabilité prise en elle-même, & telle qu'elle existe, lorsqu'indépendamment de toute preuve relative à cet évènement individuel, on demande quelle est la probabilité qu'il a eu lieu plutôt que l'évènement contradictoire.

Mais on doit observer que cette probabilité doit être celle d'un évènement déterminé, comparée à la probabilité d'un autre évènement déterminé, qui ne peut subsister avec le premier, & non à celle d'un évènement quelconque de la somme des évènements possibles,

Ainsi, par exemple, si on dit que dans une loterie de 100000 billets, c'est le numéro 99 qui est sorti le premier : comme la sortie de ce billet est aussi probable que celle de tout autre billet déterminé, je dois regarder sa sortie comme aussi probable que celle d'un événement contradictoire. Je ferai donc dans ce cas $u = \frac{1}{2}$, & le témoignage qui m'assure de la sortie de ce billet ne doit rien perdre de sa force. Il n'en est pas de même si le témoignage a précédé la sortie du billet ; alors cette proposition : *le numéro 99 sortira*, est l'équivalent de celle-ci : *j'ai deviné d'avance le numéro qui doit sortir*, la probabilité u d'avoir deviné juste, ne doit être que

$$\frac{1}{100000} ; \text{ \& si un témoin, dont la probabilité est } \frac{999}{1000} ;$$

annonce qu'il a vu se réaliser la prédiction d'un pareil événement, la probabilité qui résultera pour la vérité de son assertion, sera $\frac{999}{100998}$.

Supposons encore qu'on ait un jeu de quarante cartes, & que l'on considère la probabilité d'avoir tiré deux fois de suite une carte déterminée, comme le roi de pique ; il est clair que la probabilité de tirer deux fois le roi de pique, est en elle-même $\frac{1}{1600}$: mais si on la cherche relativement à celui qui annonçeroit cet événement comme étant arrivé, on observera que l'on doit regarder comme également possibles tous les événements où l'on aura amené deux fois la même carte. On ne doit donc regarder comme l'événement contradictoire à l'événement qui est arrivé, que celui d'amener une carte semblable, après avoir amené la première ; & par conséquent $\frac{1}{40}$ sera la valeur de u . La détermination de ce qu'on doit regarder comme le fait contradictoire à celui dont on veut connoître la probabilité, peut avoir quelques difficultés dans l'application, mais on parviendra toujours à les lever au moyen du principe que nous venons d'exposer.

I V.

QUANT aux quantités u' & e' qui désignent ici la proba-

bilité d'un témoignage, il faut observer qu'il s'agit seulement de la probabilité du témoignage en lui-même, c'est-à-dire, de la probabilité de voir les objets bien ou mal, & de rendre ce qu'on a vu avec vérité; & il faut la considérer ici indépendamment du degré de possibilité que présente le fait considéré en lui-même, & par conséquent u' & e' expriment la probabilité du témoignage telle qu'on pourroit la connoître d'après les faits ordinaires qui ont une probabilité égale à celle du fait contradictoire. En effet, dans ce cas $u = \frac{1}{2}$

& $e = \frac{1}{2}$; donc $\frac{u u'}{u u' + e e'} = u'$, & $\frac{e e'}{u u' + e e'} = e'$.

Cependant cette probabilité du témoignage n'est pas la même pour tous les faits; elle dépend, 1.^o de la difficulté de les bien observer, 2.^o des causes d'erreurs qui peuvent avoir une influence plus ou moins grande sur les témoignages, 3.^o de la complication du fait en lui-même.

Quant à ce dernier objet, il faut remarquer, 1.^o que l'on ne doit pas entendre cette expression, un fait simple, dans un sens rigoureux & métaphysique; mais dans ce sens, qu'un fait simple, est celui dont un homme d'une capacité ordinaire peut saisir l'ensemble & les détails d'un seul coup-d'œil sans un trop grand effort d'attention.

2.^o Que par fait compliqué, on ne doit pas entendre deux faits isolés, mais une combinaison de deux faits d'où résulte une conséquence qui ne soit légitime que lorsque les deux faits sont vrais en même temps.

Cela posé, soit u' la probabilité du témoignage pour un fait simple, elle sera $u' u'$ pour un fait composé de deux faits simples, u'^3 pour un fait composé de trois faits simples, &c. Ainsi supposant en général une égale justesse & une égale bonne foi aux témoins, il est clair que celui qui peut d'un seul coup-d'œil voir un ensemble de trois faits dont chacun exigeroit toute l'attention d'un autre, aura pour ce fait une probabilité u' , tandis que chacun des autres n'aura qu'une probabilité u'^3 .

Il arrivera aussi très-souvent que des témoins peu éclairés, & ne sachant pas que la vérité d'un fait compliqué suppose celle de plusieurs faits simples, se croiront sûrs de la réalité de ce fait, quoiqu'ils n'aient vu ou cru voir que quelques-uns & quelquefois même un seul des faits qui forment cette combinaison; alors si le nombre des faits qu'ils ont vus est m , & n celui des faits qu'il auroit fallu observer de plus pour avoir vu l'ensemble du fait dont ils affirment la vérité, la probabilité de leur témoignage, au lieu d'être $u'^m + n$, ne sera plus que $\frac{u'^m}{2^n}$.

Soit donc u' & e' la probabilité de la vérité & de la fausseté produite par des témoignages, u'' celle d'un témoignage sur un fait simple, on aura ici pour la probabilité d'un témoignage $u' = \frac{u''^m}{2^n}$, & $e' = 1 - \frac{u''^m}{2^n}$; & si le

nombre des témoins concordans est p , on aura $\frac{u'^p}{u'^p + e'^p}$

& $\frac{e'^p}{u'^p + e'^p}$, qu'il faut substituer à u' & e' dans la formule ci-dessus.

Comme la plupart des faits extraordinaires sont des faits compliqués, & presque toujours ne doivent ce caractère qu'à la réunion de plusieurs circonstances dont chacune en particulier ne seroit qu'un fait ordinaire, on sent combien la considération précédente doit affoiblir encore la force des témoignages.

V.

Si maintenant on cherche la probabilité que le fait extraordinaire déclaré faux par un témoin, sera vrai, elle sera exprimée par $\frac{u e'}{u e' + e u'}$, & celle que ce fait extraordinaire étant déclaré faux, est réellement faux, sera exprimée par

$$\frac{e u'}{u e' + e u'}$$

Supposons enfin p témoins qui attestent la vérité du fait extraordinaire, & q témoins qui la nient, la probabilité de la vérité de ce fait sera exprimée par $\frac{u u' p e' q}{u u' p e' q + e u' q e' p}$, & celle de la fausseté par $\frac{e e' p u' q}{u u' p e' q + e u' q e' p}$; si $q = p$, ces deux probabilités deviennent $\frac{u}{u + e}$ & $\frac{e}{u + e}$, comme cela doit être, puisque les témoignages n'ajoutent & n'ôtent rien ici à la probabilité du fait.

De plus grands détails seroient ici superflus; il nous suffit d'avoir montré comment on peut expliquer par le calcul l'affoiblissement qu'éprouvent les témoignages lorsqu'ils tombent sur des faits extraordinaires.



T H É O R È M E

S U R L E S

ÉQUATIONS EN DIFFÉRENCES FINIES.

Par M. C H A R L E S .

Lü
le 23 Nov.
1785.

CE théorème qui s'est présenté à moi sur les Équations en différences finies, à la suite d'un travail que j'ai entrepris sur ce sujet, peut s'énoncer ainsi, *il y a des équations en différences finies, qui ont deux intégrales complètes.*

D É M O N S T R A T I O N .

Soit $V = 0$ l'intégrale complète de l'équation en différences finies du premier ordre $Z = 0$. (V est fonction de x, y , & d'une arbitraire a qui n'est pas dans Z). Si on différencie V en faisant a constant, & si on élimine l'arbitraire par le moyen des équations $V = 0$, & $\Delta V = 0$, il est clair qu'on retrouvera $Z = 0$. (Δ indique que a n'a pas varié). Mais si on fait varier aussi a , on aura

$$\Delta V = \Delta V + R \Delta a;$$

or cette équation, combinée avec $V = 0$, donnera également $Z = 0$ si $R = 0$, ce que M. de la Grange a remarqué depuis long-temps, pour les équations en différences infiniment petites.

Dans cette dernière supposition, a est donné par une équation sans différences, & par conséquent sa substitution dans V donne une équation unique sans arbitraire, qui satisfait encore à $Z = 0$, & qui n'auroit pu résulter de $V = 0$ par aucune valeur constante de a ; tout cela est très-connu.

Mais dans le cas des différences finies, R contiendra le plus

plus souvent Δa , a dépendra donc d'une équation du premier ordre, & par conséquent contiendra une arbitraire.

E X E M P L E I.

Soit l'équation $g y = x \Delta y + \frac{\Delta y^2}{4 n^2}$ dont l'intégrale complète est $g y = 2 n a x + a^2$. ($\Delta x =$ la constante g); différenciant, on a $\Delta y = 2 n a$, équation qui combinée avec l'intégrale, donne la proposée.

Maintenant, si on fait varier à la fois x & a , on aura $\Delta y = 2 n a + \frac{\Delta a}{g} [2 n (x + g) + 2 a + \Delta a]$; équation qui se réduira à $\Delta y = 2 n a$, si on fait

$$2 n (x + g) + 2 a + \Delta a = 0;$$

multipliant par $(-1)^{\frac{x}{g} + 1}$ & intégrant, on aura

$$-a (-1)^{\frac{x}{g}} = b + n (-1)^{\frac{x}{g}} \left(\frac{g}{2} + x \right).$$

(b est l'arbitraire). Substituant cette valeur de a dans la première intégrale complète, on trouve la seconde

$$g y = -n^2 x^2 + \left[\frac{g n}{2} + b (-1)^{\frac{x}{g}} \right]^2,$$

qui vérifie aussi la proposée.

Faisant varier b dans cette seconde intégrale, & suivant le même procédé, on trouveroit la première.

E X E M P L E II.

$$\text{Soit } \Delta y = g \frac{\lambda - 1}{x} \left[-n + \sqrt{\left(\frac{y}{g} \lambda^{\frac{x}{g}} + n^2 \right)}, \right.$$

dont l'une des intégrales est $y = 2 n a + a^2 \lambda^{\frac{x}{g}}$

$$y = - \frac{4n^2 \lambda g}{(\lambda + 1)^2 \lambda \frac{x}{g}} + \frac{2n(\lambda - 1)}{\lambda + 1} b(-1)^{\frac{x}{g}} + \frac{b^2}{g} \lambda \frac{x}{g}$$

a & b sont les arbitraires.

C O R O L L A I R E.

On sent bien qu'il y a des remarques analogues à faire sur les équations d'un ordre plus élevé; par exemple, soit l'équation du second ordre

$$y = \frac{(m + n - 2) \Delta y - \Delta^2 y}{(m - 1) \times (n - 1)} + \frac{k}{g} \\ \times \frac{[\Delta^2 y - (n - 1) \Delta y] \times [(m - 1) \Delta y - \Delta^2 y]}{\frac{x}{g} (mn) (m - 1) \times (n - 1) \times (m - n)^2}$$

dont l'intégrale est $y = am \frac{x}{g} + bn \frac{x}{g} + \frac{kab}{g}$.

Différentiant, en faisant varier en même temps les arbitraires a & b , & faisant

$$mm \frac{x}{g} \Delta a + nn \frac{x}{g} \Delta b + \frac{k}{g} \Delta(ab) = 0,$$

$$m(m - 1)m \frac{x}{g} \Delta a + n(n - 1)n \frac{x}{g} \Delta b = 0.$$

Les valeurs de Δy & $\Delta^2 y$, seront comme si les arbitraires n'avoient pas varié; il faudra donc tirer a & b de ces dernières équations, ce qui donnera pour seconde intégrale,

$$y = - \left(\frac{m - n}{m n - 1} \right)^2 \frac{g}{k} (mn) \frac{x}{g}$$

$$+ [A + B(-1)^{\frac{x}{g}}] \cdot [\sqrt{(mn) \frac{x}{g}} + f(A, B)];$$

f désigne une fonction déterminée des nouvelles arbitraires.



DE L'ACTION DU FEU,

*Animé par l'air vital, sur les substances minérales
les plus réfractaires.*

Par M. LAVOISIER.

INTRODUCTION.

J'AI donné, dans un Mémoire imprimé dans le Recueil de l'Académie, *année 1782, page 466*, une description détaillée d'un soufflet, ou plutôt d'une espèce de trombe, au moyen de laquelle on peut entretenir & animer le feu des charbons avec cet air que M. Priestley a appelé *air déphlogistiqué*, & que je continuerai à appeler *air vital*, d'après l'Historien de l'Académie. J'ai fait voir qu'avec cet appareil on obtenoit un effet sensiblement plus fort qu'avec les plus grands verres ardents qu'on eût employés jusqu'ici, & j'ai promis de communiquer à l'Académie une suite d'expériences faites avec ce nouvel agent sur les substances minérales les plus réfractaires. Je m'empresse de remplir aujourd'hui une partie de l'engagement que j'ai contracté: je serai incessamment en état d'y joindre tout ce qui concerne les pierres précieuses*, & je ne doute pas que lorsque mes expériences auront été discutées par l'Académie, & qu'elles auront acquis de la publicité, les observations & les réflexions qui me feront communiquées, ne me mettent en état de donner par la suite plus d'étendue & de perfection à mon travail.

La manière dont j'ai opéré dans le très-grand nombre des expériences rapportées dans ce Mémoire, consiste à pratiquer un petit creux dans un gros charbon; à l'allumer à la flamme d'une chandelle ou d'une bougie, par le moyen d'un chalumeau; à mettre dans le charbon ainsi creusé & allumé, la

* Cette partie de mon travail a été imprimée dans le volume de 1782, pages 436 & suivantes.

matière sur laquelle je veux opérer, & à le présenter au courant d'air vital.

J'ai fait aussi quelques expériences au dard de la flamme d'une lampe d'émailleur, à travers laquelle je faisois passer un courant d'air vital, & je rendrai compte particulièrement des effets que j'ai obtenus; mais je prévien les lecteurs, qu'à moins que je n'avertisse du contraire d'une manière précise, les corps sur lesquels j'ai opéré ont toujours été exposés sur un charbon ardent dont le feu étoit animé par l'air vital.

Pour rendre ce travail plus intéressant, j'ai cru devoir en rapprocher les expériences que nous avons faites en 1772, par ordre de l'Académie, avec le grand verre ardent de Tschirnhausen, qui lui a été donné par M. le Régent. Nous opérons le plus communément, dans ces expériences, sur des supports de grès ou de porcelaine dure, & le foyer de la grande lentille étoit rétréci & raccourci par le moyen d'une seconde lentille. Les résultats que nous avons obtenus n'ont point encore été publiés.

J'avois d'abord suivi, pour l'arrangement des matières, le système adopté par M. Daubenton, au Cabinet du Roi; mais le résultat même de mes expériences m'a forcé d'y apporter quelques modifications, & je me suis trouvé insensiblement rapproché de l'ordre qui depuis a été adopté par M. Bergman dans sa Sciagraphie, & par M. Kirwan dans ses *Elémens de Minéralogie*.

L'air vital dont je me suis servi, étoit tiré du mercure précipité rouge: j'ai quelquefois essayé de me servir de celui tiré du nitre, mais j'ai reconnu qu'il produisoit moins d'effet.

Quoique ce genre d'expériences soit cher, il ne l'est pas cependant autant qu'on le croiroit au premier coup-d'œil: il est rare qu'une expérience emploie plus de six pintes d'air vital; la pinte revient à peu-près à quatre sous six deniers, tout évalué, ainsi chaque expérience coûte vingt-cinq à trente sous tout au plus. Les mêmes expériences, tentées avec un feu de charbon, coûteroient davantage; & en employant beaucoup plus de temps, on auroit beaucoup moins d'effet.

Je ne me dissimule pas qu'on peut faire deux objections principales contre ce genre d'expériences : premièrement, les corps sur lesquels on opère ayant le contact du charbon embrasé, les métaux se revivifient, & la plupart des sels neutres ou des substances minérales, dans la composition desquelles il entre un acide, se décomposent.

Secondement, on n'est pas sûr si le charbon ne fournit pas de l'alkali & de la terre aux corps soumis aux expériences, & si cette circonstance ne favorise pas leur fusibilité.

Sans disconvenir entièrement de la réalité de la première de ces objections, j'observerai que si quelquefois il peut y avoir de l'inconvénient à mettre les corps en contact avec le charbon, il y en a bien davantage, sur-tout dans les expériences de Lithéogéognosie, à les placer dans des creusets, c'est-à-dire, à les mettre en contact avec des matières plus ou moins fusibles : cette considération est d'une telle importance, que dans les expériences qui ont été faites jusqu'ici, on ne peut presque jamais juger si une substance fusible l'est par elle-même ou par sa combinaison avec l'argile du creuset. Par une suite de ce même inconvénient, on ne peut presque jamais répondre si les substances fondues sont pures ; on a toujours à craindre qu'elles n'aient été altérées par l'argile du creuset, & le *liquor silicum* fournit un exemple frappant de cette vérité. Cette combinaison de l'alkali fixe & du sable attaque tellement les creusets, qu'à moins d'avoir opéré dans un vase de fer, on obtient un résultat plus ou moins mêlé d'argile, & qui donne de l'alun avec l'acide vitriolique, tandis que le *liquor silicum* fait dans le creux d'un charbon, est parfaitement pur, & qu'on ne peut y démontrer que de l'alkali fixe & de la terre quartzeuse.

Quant à la seconde objection, je puis assurer, d'après une longue expérience, qu'elle est à peu-près déstituée de tout fondement : le courant d'air qui frappe le charbon est si rapide, qu'il entraîne & dissipe tous les corps qui sont soumis à son action, à moins qu'ils ne soient en masses assez fortes ; à plus forte raison doit-il dissiper les molécules terreuses qui

se trouvent dans un état de division excessif quand elles se dégagent d'un charbon qui brûle.

Au surplus, quand il seroit vrai qu'il se combine quelquefois de petites parcelles terreuses avec les corps mis en expérience, elles sont si ténues & en si petite quantité, qu'elles ne peuvent produire un effet bien sensible, sur-tout dans les expériences qui ne durent que deux ou trois minutes. Enfin si cette objection étoit fondée, le cristal de roche fondroit dans toutes les expériences de ce genre, & cependant on verra qu'il n'éprouve qu'un très-léger ramollissement.

P R E M I E R O R D R E.

Terres & Pierres.

P R E M I È R E C L A S S E.

Pierres quartzeuses ou siliceuses, dont le caractère est de faire feu avec l'acier : on y a joint quelques pierres mélangées, dans lesquelles la terre siliceuse se rencontre en quantité prédominante par rapport aux autres matières.

Cristal de Roche.

ON a placé un morceau de cristal de roche de Madagascar dans le creux d'un charbon ardent, & on l'a exposé à un courant d'air vital tiré du précipité rouge. Quoique l'activité du feu fût très-grande, il n'a pas fondu pendant l'espace de 2 minutes 30 secondes qu'a duré l'expérience, mais il s'est étonné & fendillé dans toutes ses parties, ses angles se sont un peu arrondis, & il a donné quelques signes de ramollissement : l'ayant laissé refroidir; il étoit chatoyant & couleur d'opale dans quelques endroits, ce qui venoit de la séparation des couches, qui avoit été occasionnée par la violence de la chaleur & des diverses réfractions & réflexions qui résultoient de cette séparation.

Suivant M. Bergman, le cristal de roche n'est pas la terre siliceuse pure; il est composé de quatre-vingt-treize parties de terre siliceuse, de six d'argile & d'une de terre calcaire : il est probable que c'est ce mélange qui lui donne un commencement de disposition à la fusibilité, & je serois assez porté à croire que la terre siliceuse très-pure seroit absolument infusible au degré de feu produit par mon appareil.

Dans les nombreuses expériences que nous fîmes en 1772, sur le cristal de roche exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, il s'éclata, décrépita, s'étonna, mais nous ne pûmes obtenir aucune apparence de ramollissement, ni d'aucune autre altération; le foyer du grand verre étoit, dans cette expérience, comme dans toutes celles qui seront citées dans ce Mémoire, raccourci & rétréci par l'addition d'une seconde lentille.

Quartz blanc.

UN morceau de quartz blanc demi-transparent, a été exposé sur un charbon ardent à un courant d'air vital tiré, comme le précédent, du mercure précipité rouge. L'expérience a commencé à 9^h 44' 5" : le quartz a donné des signes non équivoques de ramollissement à 9^h 45' 0" ; mais quoiqu'on ait continué à lui faire éprouver le même degré de chaleur pendant plus d'une demi-minute, on n'a pu parvenir à le fondre : l'ayant laissé refroidir, & l'ayant examiné à la loupe, il étoit cassé en plusieurs fragmens; on s'apercevoit que la surface avoit fondu en une espèce d'émail blanc très-poli, très-luisant, & qui étoit rempli de petites bulles; l'intérieur ne présentait pas de marques bien sensibles d'altération.

Ce même quartz exposé à un courant d'air vital tiré du nitre, a commencé à bouillonner au bout d'une minute & demie, & s'est couvert d'un émail blanc; on a fini au bout de deux minutes sans l'avoir fondu.

Il résulte de cette expérience, que l'action du feu animé par l'air vital, est un peu plus sensible sur le quartz que sur le cristal de roche, puisqu'il prend un commencement de fusion à sa surface.

L'expérience suivante semble encore confirmer cette différence entre le cristal de roche & le quartz, en supposant toutefois qu'on puisse compter à un certain point sur la pureté du quartz porphyrisé : au reste, comme le quartz contient plus de terre argileuse que le cristal de roche, & que c'est cet excès de terre qui en diminue la transparence, il n'est pas étonnant qu'étant moins pur il soit plus fusible.

Le quartz exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'éprouve pas plus d'altération que le cristal de roche.

Quartz blanc porphyrisé.

EXPOSÉ au feu à $6^h 10' 5''$, il a commencé à prendre une consistance pâteuse à $6^h 11' 5''$: l'ayant touché avec un instrument de fer à $12' 10''$, il a cédé sans être cependant parfaitement fondu ; on l'a retiré peu de temps après : le morceau refroidi formoit une masse demi-vitreuse, demi-transparente sans couleur, luisante à sa surface, & contenant beaucoup de petites bulles dans son intérieur.

Le quartz avoit été porphyrisé sous des meules de grès, & m'avoit été donné par M. Macquer.

Grès très-dur & très-fin de Sceaux-lès-Chartreux.

CE grès étoit luisant dans les cassures, & d'un grain presque aussi fin que du quartz ; exposé au feu à $10^h 23' 45''$, les angles se sont émoussés à $10^h 24' 20''$; il a commencé à bouillonner en quelques endroits à $24' 25''$, & a donné des signes non équivoques de ramollissement à $24' 40''$; on a fini à $24' 50''$: le morceau, en refroidissant, avoit une couleur phosphorique verdâtre ; refroidi, il étoit très-dur, sa surface étoit vitreuse, & on y remarquoit de petites bulles, mais l'intérieur n'avoit rien de vitreux ; dans cet état il ressembloit parfaitement à un morceau de quartz très-blanc & d'un grain très-fin.

On voit que cette espèce de grès est à peu-près du même degré de pureté que le quartz, & qu'il se comporte comme lui à un très-grand degré de chaleur.

Le

Le même grès exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'a donné aucun indice de ramollissement, ni d'altération.

Sablon blanc, ou Quartz aréneux d'Étampes, porphyrisé.

ON l'a exposé avec précaution au courant d'air pour empêcher la dispersion des molécules : il a commencé à ressentir l'impression du grand feu à 57' 0" ; bientôt il a paru s'agglutiner, sur-tout vers les bords, & a fondu complètement à 58' 30" : toute la matière s'est rassemblée ensuite en une masse ronde qui a bouillonné dans des endroits ; mais la quantité de matière s'est trouvée trop considérable pour qu'elle ait pu fondre complètement jusqu'au centre.

On a fini à 7^h 0' 30" ; le morceau refroidi & cassé, présentait une couche extérieure blanche vitreuse, opaque, & qui avoit parfaitement fondu : quant à l'intérieur, il étoit d'un blanc opaque, & avoit toute l'apparence d'un morceau de porcelaine ; les parties en étoient bien liées, sans qu'elles eussent cependant éprouvé de fusion complète. Ce sablon n'avoit été donné par M. Macquer, mais j'ignore quelles précautions on avoit prises pour éviter tout mélange de matières étrangères pendant la porphyrisation.

Quartz gris du Trou-du-Diable près le Valdajeon dans les Vosges.

EXPOSÉ au feu à 10^h 10' 0" , il a bouillonné à 10' 20" en quelques endroits ; il s'est ramolli à 10' 25" , & s'est fondu à peu-près complètement à 10' 40" ; la fusion étoit un peu pâteuse ; on a fini à 11' 0" . La matière refroidie & vue à la loupe , consistoit en une masse vitreuse étonnée dans toute sa substance , & très-cassante ; elle étoit d'un blanc vitreux avec quelques taches noires dans des endroits, il y avoit des bouillons dans l'intérieur.

Ce quartz est opaque, d'une pâte fine ; il se casse en morceaux qui ont leur surface plane, à la différence des fîlex &

des pierres de ce genre qui se cassent le plus communément en morceaux dont les surfaces sont convexes ou concaves.

Le résultat de cette expérience annonce évidemment que le quartz qui en fait l'objet, est une pierre mélangée; il n'en a point encore été fait d'analyse chimique.

Quartz phosphorique des environs d'Alençon.

CE quartz, au premier coup-d'œil, a quelque rapport avec le grès, mais il a une apparence plus grasse dans ses fractures; on pourroit encore le confondre avec certaines pierres à plâtre, quoiqu'il n'ait cependant aucune propriété chimique commune avec elles; c'est le *petuntse* de M. Guettard: il a la propriété de devenir très-phosphorique quand on le fait chauffer à un degré de chaleur un peu supérieur à l'eau bouillante.

Exposé au feu à 10^h 4' 30", il s'est ramolli à 4' 45"; il s'est trouvé complètement fondu à 4' 50", la fusion étoit cependant un peu pâteuse; il s'est rassemblé en un globule presque rond à 5' 25"; on a fini à 5' 30". Cette matière demeure encore long-temps rouge après avoir été retirée du feu; cassée & vue à la loupe après qu'elle a été refroidie, elle s'est trouvée absolument vitreuse, tant à l'extérieur que dans l'intérieur, elle étoit seulement étonnée, fendillée & fêlée, comme il arriveroit à un corps vitreux qu'on auroit fait rougir & tremper dans l'eau.

Il est évident par le résultat de cette expérience, que l'espèce de quartz ou de grès qui en fait l'objet, est une pierre mélangée; sa qualité phosphorique mériteroit qu'il en fût fait un examen particulier.

Cette même substance exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y fond avec assez de facilité, & forme un verre gris-verdâtre demi-transparent.

Agate d'un blanc laiteux.

EXPOSÉE au courant d'air vital sur un charbon, elle s'y est ramollie en moins d'une minute, & on a obtenu un verre demi-transparent rempli de bulles.

Les agates, la calcédoine, les cailloux, la pierre à fusil étant un mélange de terre siliceuse & de terre argileuse, il n'est pas étonnant qu'elles soient toutes plus ou moins fusibles, & qu'elles se convertissent en une espèce de verre à un très-grand degré de chaleur.

Les différentes espèces d'agates que nous avons exposées en 1772, au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'ont point éprouvé de fusion; quelques-unes se sont gonflées, se sont divisées par feuillets, & sont devenues friables & pulvérulentes: en même-temps il s'en élevoit une fumée sensible qui paroissoit n'être que de l'eau en vapeurs; toutes se sont décolorées.

Agate noire.

MISE au feu à $11^h 9' 35''$, elle a fondu par places, sur-tout à la surface; elle a perdu sa couleur & est devenue comme un émail blanc; elle a été retirée du feu à $11^h 10' 35''$.

Le morceau refroidi s'est trouvé rempli de petites bulles, tant intérieurement qu'extérieurement; sa surface sur-tout avoit pris une apparence tout-à-fait vitreuse; quelques parties, principalement dans l'intérieur, n'avoient point éprouvé une fusion complète, & conservoient encore la couleur noire.

Calcédoine.

MISE au feu à $11^h 19' 40''$, elle a augmenté de volume, & s'est ramollie à $20' 40''$; il s'y est ensuite formé beaucoup de gros bouillons ou trous: ayant donné un grand coup de feu, elle a fondu à peu-près complètement à $22' 0''$; le résultat de l'expérience, refroidi & vu à la loupe, consistoit en un verre très-blanc demi-transparent, rempli de bulles & de cavités de différentes grandeurs. On peut regarder cette pierre comme absolument fusible.

On fait par les expériences chimiques, que la calcédoine est un mélange de terre siliceuse & de terre argileuse.

La calcédoine, au foyer du grand verre ardent de Tschirn-

hausen, se divise & se décolore, mais sans aucun indice de fusion.

Cornaline.

ELLE a été exposée au feu à $11^h 7'$; elle a commencé à paroître blanche à $7' 35''$; elle répandoit alors une lumière verte & phosphorique; on a fini à $9' 30''$.

Le morceau refroidi étoit presque sans couleur; il avoit une surface vitreuse & luisante, & étoit arrondi par les angles; l'intérieur ne peut mieux se comparer qu'à du cristal de roche étonné au feu, il étoit rempli de petites bulles très-fines, qui annoncent que la matière avoit été ramollie, quoiqu'il n'y eût pas eu, à proprement parler, de fusion: la couleur avoit entièrement disparu.

La cornaline, par l'analyse chimique, fournit les mêmes principes que les autres agates & la calcédoine; la terre siliceuse en forme la base, & cette terre est mêlée à un peu d'argile; à l'égard de la substance colorante, on en ignore absolument la nature.

Cette substance n'a point été éprouvée au foyer du grand verre ardent.

Silex ou Pierre à fusil.

ON a employé la pierre à briquet brune & noirâtre qui se trouve dans les craies; elle est assez connue pour ne point exiger de description: on sait qu'elle ne diffère de l'agate que par le défaut de transparence, & parce qu'elle n'est pas d'une pâte aussi fine: du reste tous les cailloux donnent, comme l'agate, par l'analyse, environ un quart de leur poids d'argile, une très-petite portion de terre calcaire; le surplus est de la terre quartzeuse.

Mise au feu à $9^h 54' 35''$, elle a rougi à $54' 45''$, en produisant une lumière phosphorique; à $54' 55''$, ses angles se sont arrondis; à $55' 30''$ elle a bouillonné à la surface; à $55' 55''$ elle a pris une demi-fusion pâteuse comme le quartz; à $56' 30''$ elle est devenue molle, sans entrer

en fusion complète. L'expérience n'a pas été portée plus loin. Le résultat ayant été cassé, & examiné à la loupe, la surface extérieure étoit luisante, elle avoit un beau poli vitreux & étoit remplie de bulles assez grosses. L'intérieur n'avoit pas éprouvé une fusion aussi complète & il n'avoit pas le brillant vitreux; il étoit devenu cependant parfaitement blanc & étoit rempli de petites bulles qui n'étoient pas dans la pierre à fusil avant son exposition au feu; ces deux circonstances annoncent au moins un ramollissement très-considérable.

La disposition à la fusion est ordinairement d'autant plus grande dans les cailloux, qu'ils sont plus colorés & mélangés d'une plus grande quantité de terre argileuse.

Cette même pierre à fusil exposée au foyer du grand verre ardent, y a blanchi; elle a répandu de la fumée, mais elle n'a éprouvé ni ramollissement, ni fusion.

Silex blanchâtre opaque des environs de Villers-Cotterets.

MIS au feu à 10^h 1' 7", les angles se sont émoussés à 1' 3 5"; il a ensuite bouillonné à la surface, s'est gonflé & s'est ramolli à 2' 10" sans se fondre complètement, mais en jetant une lumière phosphorique: vu à la loupe après avoir été refroidi, la surface extérieure étoit absolument vitreuse & luisante, remplie de bouillons; l'intérieur étoit d'un blanc plus mat; on y apercevoit des bouillons presque par-tout; on n'oseroit cependant pas assurer que la fusion ait été jusqu'au centre: toute la substance étoit de la plus grande blancheur.

Caillou d'Égypte.

IL a été exposé au feu à 10^h 27' 22", bientôt il s'est gonflé, & s'est préparé à la fusion; mais le charbon s'étant cassé à 27' 50", on n'a pas poussé l'expérience plus loin. Les endroits qui ont été le plus échauffés, se sont convertis en une substance blanche, vitreuse, remplie de bouillons.

Prase.

LA Prase est une espèce d'agate d'un beau vert, demi-

transparente. M. Bergman prétend que la terre filiceuse qui en forme la base y est unie à un peu de magnésie, à un peu de terre calcaire & de terre argileuse. M. Achard a reconnu que 100 parties de cette pierre contiennent 95 parties de terre filiceuse, 1,7 de terre calcaire, 1,2 de magnésie, 0,4 de fer & 0,6 de cuivre.

Cette substance a été exposée sur un charbon allumé au courant d'air vital, à 10^h 57' 40", & elle en a été retirée à 59' 55"; pendant cette épreuve elle avoit perdu sa couleur, & ses angles s'étoient arrondis. Refroidie & vue à la loupe, elle étoit brillante, & très-émailée à sa surface, blanche; on y remarquoit de petites bulles assez nombreuses: l'intérieur ressembloit parfaitement, pour le grain, à celui d'une porcelaine très-fine, avec cependant quelque chose de plus vitreux.

Cette substance n'a pas été éprouvée au grand verre ardent.

Jade blanchâtre.

MIS au feu à 11^h 16' 20", il s'est fondu à 16' 40", en bouillonnant; on a fini à 17' 15". Le morceau vu à la loupe, présentait à sa surface un verre opaque, jaunâtre & caverneux; l'intérieur étoit blanc, & avoit un coup-d'œil lamelleux, à peu-près comme de la craie de Briançon: le tout étoit fort dur, & la partie fondue étoit inattaquable à la lime.

Cette expérience annonce que le jade est une substance composée; la terre filiceuse en fait cependant la base principale, d'après les expériences de M. d'Arcet.

Le jade exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y fond en un verre demi-transparent qui contient de gros bouillons; lorsque le jade est coloré, on obtient un verre d'un brun-noir transparent.

Jaspe gris, veiné de rouge.

LE jaspe, d'après les expériences de M. d'Arcet & d'après celles de M. Bayen, est un composé de terre filiceuse unie à une argile martiale,

Le morceau mis en expérience a été exposé au feu à $2^h 27' 0''$, & en a été retiré à $29' 35''$; il a blanchi, s'est déformé, s'est gonflé, est devenu poreux & a formé un résultat semi-vitreux, d'un blanc grisâtre.

On a été curieux de reconnoître si la fusion seroit plus complète en employant un plus grand courant d'air vital, & en conséquence le même morceau de jaspe a été exposé de nouveau au feu pendant deux minutes, en employant un plus gros ajutoir; mais il n'a pas été plus ramolli que la première fois, peut-être même l'a-t-il été moins. Refroidi & vu à la loupe, sa surface étoit absolument vitreuse & couverte de petits bouillons ou bulles; l'intérieur avoit une apparence quartzeuse. Il paroît que dans toutes ces pierres, la matière colorante s'évapore, & qu'elles deviennent de moins en moins fusibles, à mesure qu'elles en sont mieux dépouillées.

Jaspe vert, sanguin.

Mis au feu à $9^h 47' 35''$, il a donné des signes de ramollissement à $47' 50''$; il s'est gonflé sensiblement à $48' 0''$, & a fondu à $48' 10''$, en prenant une blancheur phosphorique; la fusion n'a pas été cependant assez complète pour que la matière pût se réunir en globules. On a fini à $48' 35''$; le morceau étoit devenu d'un blanc grisâtre, & avoit pris un coup-d'œil vitreux jusque dans son intérieur; il étoit rempli de bouillons qui annonçoient que la fusion avoit pénétré jusqu'au centre; la surface extérieure étoit très-lisse, elle avoit le poli du verre, & l'apparence encore plus vitreuse que l'intérieur.

Un échantillon du même morceau, essayé avec l'air tiré du nitre, a bouillonné, s'est déformé, mais la fusion n'a pas été complète, quoique le feu ait duré deux minutes; d'où l'on croit être en droit de conclure que l'air vital tiré du mercure précipité rouge, donne plus d'activité au feu, que celui tiré du nitre.

Cette propriété qu'a le jaspe, d'être très-réfractaire, quoique

très-coloré, semble annoncer que la terre siliceuse, dans cette pierre, est plus pure & moins mélangée de terre argileuse qu'on ne le croit communément. C'est à l'analyse chimique, par la voie humide, à donner des idées justes de sa composition.

Jaspe fleuri.

IL a été exposé au feu pendant 1' 45", pendant cet intervalle il s'est ramolli par places, il a bouillonné & est devenu d'une consistance pâteuse sans se fondre.

L'expérience s'est faite avec de l'air vital tiré du nitre,

Espèce de Jaspe des environs de Plombières.

CE jaspe est gris & rouge; quoique dur, il n'est pas susceptible d'un très-beau poli.

Il a été exposé à 5^h 50' 0", au courant d'air vital tiré du précipité rouge; à 5^h 50' 25" il s'est ramolli & a répandu une lumière phosphorique; il s'est gonflé à 51' 5", sans fondre complètement, cependant il bouillonnait bien sensiblement à sa surface à 51' 25"; on a fini à 51' 55". Le résultat refroidi étoit devenu parfaitement blanc, tant au dehors que dans l'intérieur; la surface avoit le poli & le luisant du verre, elle étoit parsemée de bulles; l'intérieur n'avoit pas tout-à-fait le même brillant, mais il avoit l'aspect vitreux, & étoit rempli de bouillons qui n'existoient pas dans la pierre avant son exposition au feu, ce qui est une preuve de ramollissement.

Un fragment de ce même morceau de jaspe des environs de Plombières, exposé, le 1.^{er} Juillet, sur un charbon ardent animé par de l'air vital tiré du nitre pendant une minute & demie, a bouillonné, s'est ramolli & rassemblé en globule rond; la fusion étoit pâteuse: l'expérience a fini parce que le charbon s'est troué.

Le même jaspe exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y a perdu sa couleur, mais il n'a donné aucun indice d'altération, ni de fusion.

Feld-spath

*Feld-spath ou Spath éincelant opaque de la montagne
de Tarare près de Lyon.*

LE morceau sur lequel on a opéré étoit très-régulièrement cristallisé, en sorte qu'il ne peut y avoir aucun doute sur sa qualité & sur sa pureté. On sait que les Chimistes regardent le feld-spath comme un mélange de terre siliceuse, d'argile & d'un peu de terre magnésienne. Suivant l'analyse de cette substance, qui a été publiée par M. Kirwan, 100 parties de feld-spath en contiennent 67 de terre siliceuse, 14 de terre argileuse, 11 de terre pesante & 8 de magnésie.

Exposé graduellement au plus fort degré de feu que puisse produire l'appareil, il s'est ramolli, s'est arrondi & a formé un globule pâteux & mal fondu : c'étoit une espèce d'émail ou de substance vitreuse, opaque & laiteuse. Il a paru que plus on continuoit long-temps l'opération, plus la fusion devenoit pâteuse ; en sorte que cette matière paroîtroit devenir de plus en plus réfractaire à mesure qu'elle éprouve plus long-temps l'action du feu. Cette circonstance dépend probablement de ce qu'elle contient plusieurs substances qui se communiquent réciproquement un peu de fusibilité, mais à mesure que la plus volatile se dissipe, la portion qui reste est plus réfractaire.

Cette substance n'a point été essayée au verre ardent.

Conséquences des expériences sur les Pierres quartzéuses.

IL résulte des expériences dont on vient de rendre compte sur les pierres quartzéuses ou siliceuses exposées au feu animé par l'air vital ; premièrement, que le cristal de roche n'est point susceptible d'une véritable fusion, au moins par aucun des degrés de feu que nous ayons pu employer jusqu'ici.

Secondement, que le commencement de ramollissement qu'éprouve cette substance, tient vraisemblablement à la petite portion de terre argileuse qui entre dans sa composition.

Troisièmement, que le quartz, les agates, les cailloux,
Mém. 1783.

D d d d

& en général toutes les pierres quartzeuses & siliceuses, même celles qui sont absolument sans couleur, éprouvent non-seulement un ramollissement sensible, mais encore une sorte de fusion, en raison de ce que la terre argileuse enure pour une portion plus considérable dans leur composition, ainsi que l'analyse chimique le démontre.

Quatrièmement, que toutes les pierres quartzeuses ou siliceuses colorées, sont plus ou moins fusibles, suivant la quantité de matière colorante qu'elles contiennent, mais que dans toutes, cette matière colorante est volatile; & qu'à mesure qu'elle quitte la terre quartzeuse, cette dernière diminue de fusibilité.

Cinquièmement, que le sablon ne doit pas être regardé comme une substance absolument homogène & pure, qu'il tient plus du quartz que du cristal de roche, & qu'il est même plus fusible que le premier.

Sixièmement, que toutes les expériences faites sur les terres & pierres de cette classe, prouvent évidemment que le feu produit par mon appareil est beaucoup plus fort que celui qu'on obtient au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, même lorsqu'il est armé d'une seconde loupe qui en raccourcit & qui en rétrécit le foyer.

DEUXIÈME CLASSE.

Terres & pierres argileuses, & leurs composés salins : le caractère de ces pierres & terres est de ne point faire effervescence avec les acides, ni feu avec l'acier, à moins qu'elles n'aient été poussées au feu.

Terre d'alun.

ON a humecté de la terre d'alun avec de l'eau pure; mais quelques précautions que l'on ait prises, dès qu'elle étoit sèche, elle étoit emportée par le courant d'air: on est

cependant parvenu, avec de grandes précautions, à en conserver une petite portion dans le creux du charbon; elle y a fondu, sans cependant prendre la figure ronde. Le morceau refroidi étoit d'un vert sale hépatique; il étoit ramifié comme un bois de cerf; il étoit dur & rayoit très-bien le verre.

Cette même terre exposée, en 1772, au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'a donné aucun indice de ramollissement, de fusion ni d'altération. On s'est persuadé que la couleur blanche de cette terre, en réfléchissant les rayons solaires, devoit diminuer l'action du foyer: en conséquence on a essayé d'y mêler du noir de fumée, & il en a résulté une poudre grise qui ne s'est pas fondue davantage; le charbon a brûlé & la terre est restée blanche.

On a essayé de substituer du noir d'ivoire au noir de fumée, & alors il y a eu fusion, parce que le noir d'ivoire contient une sélénite phosphorique qui a servi de fondant.

Alun vitriolique.

ON a exposé de l'alun, déjà préalablement calciné à un feu doux, au courant d'air vital; il s'est opéré dans le premier instant une fusion aqueuse; la matière a bouillonné, elle s'est desséchée, elle s'est rapprochée sur elle-même & a diminué beaucoup de volume; enfin il n'est plus resté qu'une matière grise opaque, demi-vitreuse, en très-petite quantité proportionnellement à celle de l'alun qui avoit été employé; elle étoit en petites ramifications comme des bois de cerf. L'alun se décompose dans cette opération; l'acide forme du soufre; une partie de la terre ou base de l'alun est entraînée & volatilisée, une petite portion reste dans un état de demi-fusion.

La petite ramification refroidie étoit une substance vitreuse, opaque, d'un blanc grisâtre, & inattaquable par la lime.

Alun nitreux.

ON a exposé, sur un charbon au courant d'air vital, le sel résultant de la combinaison de l'acide nitreux & de la terre de l'alun; il s'est opéré dès le premier instant une fusion

aqueuse : lorsque la matière a été à peu-près desséchée, il n'y a point eu de détonation proprement dite, mais elle brûloit dans les endroits où elle étoit en contact avec le charbon, avec une espèce de flamme phosphorique. En continuant de pousser au feu, la matière a pris de la retraite, & il n'est plus resté qu'une ramification grise, opaque, semi-vitreuse.

L'expérience a duré 4 à 5 minutes : le résultat refroidi s'est trouvé être une substance blanche un peu grisâtre, absolument opaque, assez bien fondue, très-dure, inattaquable à la lime, & rayant le verre.

Argile blanche très-douce au toucher, ou espèce de Kaolin de Béthoux.

CETTE terre échauffée trop brusquement, décrépite & se dissipe en éclats : elle a été exposée au feu pendant deux minutes ; d'abord elle n'a fondu que vers les angles, & même avec beaucoup de difficulté, insensiblement la fusion est devenue complète, mais très-pâteuse.

Il est resté un globule de verre transparent, blanc, un peu jaunâtre, rempli de bulles dans son intérieur ; il étoit dur, rayoit le verre, & la lime ne l'entamoit qu'avec quelque difficulté.

Toutes les substances argileuses, même celles qui sont sans couleur, fondent au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, & donnent des verres plus ou moins colorés, plus ou moins transparens ; ce qui prouve que les argiles en général ne sont point des substances pures, & qu'elles sont toutes un mélange de substances de différentes natures.

Argiles mêlées de terre siliceuse ou calcaire.

TOUTES les argiles exposées au feu animé par l'air vital, fondent avec assez de facilité lorsqu'elles contiennent de la terre siliceuse ; il en résulte une fusion pâteuse, & des verres demi-transparens parsemés de bulles, & plus ou moins durs.

Le mélange de terre calcaire rend également les argiles

plus fusibles, les verres qu'on obtient sont en général plus transparents.

Enfin l'addition du fer rend toutes ces matières beaucoup plus faciles à fondre, & on en obtient des verres colorés, foncés en couleur à peu-près comme le verre de bouteilles.

*Conséquences sur la terre de l'alun, & sur les terres
& pierres argileuses.*

IL résulte de ces expériences, que la terre d'alun, qui est l'argile dans son plus grand état de pureté, est susceptible de prendre une fusion pâteuse, & de se transformer par l'action du feu, en un genre de pierre très-dure, qui coupe le verre comme les pierres précieuses, & qui se laisse difficilement entamer par la lime: on verra dans la suite, que l'addition d'une matière étrangère quelconque augmente encore cette fusibilité: on peut donc établir comme un principe, que toutes les pierres argileuses sont vitrifiables par elles-mêmes & sans addition, que les plus pures sont les plus réfractaires, & qu'elles sont d'autant moins fusibles qu'elles sont plus mêlées de substances étrangères.

TROISIÈME CLASSE.

*Terres & pierres calcaires, avec les composés salino-
terreux qui résultent de leur combinaison
avec différens acides.*

Chaux de marbre blanc.

ELLE a été exposée au feu à 39' 0", elle a commencé à répandre une lumière bleue, ensuite elle a paru s'agglutiner, & ses angles se sont hérissés: on l'a laissée environ trois minutes sans qu'elle se soit fondue.

Refroidie & examinée au bout de quelques jours, elle étoit plus croquante sous la dent que n'est ordinairement la

582 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
chaux ; elle étoit cependant encore friable , & avoit le goût
alkalin.

La chaux de marbre exposée au foyer du grand verre
ardent de Tschirnhausen, n'éprouve aucune espèce d'altération.

*Chaux vive faite avec de la pierre calcaire dure des
environs de Melun , aussi pure que la chaux
de marbre blanc.*

L'EXPÉRIENCE ne s'est faite qu'avec beaucoup de difficulté,
parce que le courant d'air emportoit la chaux qui étoit en
poudre ; on est cependant parvenu à 5^h 13' 10", à en
exposer une petite portion à l'ardeur du feu. On a fini à
5^h 15' 15" : la chaux n'étoit point fondue, mais elle avoit
diminué de volume ; ses particules s'étoient aglutinées, avoient
pris une demi-fusion ; elle avoit l'apparence d'un quartz poreux,
& une assez grande dureté : ayant laissé cette même matière
exposée quelques jours à l'air, elle s'y est effleurie, comme
il arrive à la chaux vive ; ce qui prouve qu'il n'y avoit eu,
ni fusion, ni altération sensible de cette substance.

Cette même chaux exposée au foyer du grand verre ardent
de Tschirnhausen, ne donne aucun indice d'altération.

Spath calcaire de Sainte-Marie-Mines.

Ce spath dont j'ai donné l'analyse chimique dans mes
Opuscules physiques & chimiques, est composé de chaux
très-pure combinée avec de l'eau & avec de l'air fixe ; il
a été exposé au courant d'air lentement & avec précaution,
dans la crainte de le dissiper, parce qu'il étoit en poudre ;
la matière a paru fondre sur les bords dans le premier
instant, & les grains se sont aglutinés, mais elle n'avoit
point éprouvé de fusion complète ; l'ayant laissée exposée à
l'air pendant quelques jours, elle s'y est effleurie & avoit le
goût alkalin de la chaux éteinte.

Ce spath exposé au foyer du grand verre ardent de
Tschirnhausen, s'y calcine, il perd son eau de cristallisation,

& se réduit en chaux vive, mais il n'éprouve aucune autre espèce d'altération.

Autre espèce de Spath calcaire.

IL a décrépité au moment qu'il a été exposé à la chaleur, parce qu'il n'avoit pas été réduit en poudre; cependant étant parvenu à en conserver quelques fragmens au courant d'air vital, ils y ont souffert un degré de feu très-violent pendant près de 2' 30", sans se fondre; ils étoient devenus noirâtres: exposés à l'air, ils se sont effleuris & éteints, comme il arrive à toute chaux vive.

Craie.

ELLE a été exposée au feu à 25' 20", elle a commencé par se gonfler & à se gercer; puis elle a paru diminuer de volume, mais il n'y a point eu de fusion; on a fini à 27' 30". Les morceaux refroidis, vus à travers la lumière, avoient une demi-transparence comme de la porcelaine, ils étoient assez durs & ne paroissoient pas disposés à s'effleurir comme la chaux; même après plusieurs jours d'exposition à l'air; ce qui semble annoncer qu'il se trouve dans la craie, du moins dans celle sur laquelle j'ai opéré, assez de matière étrangère à la terre calcaire pour former avec elle une demi-fusion & une espèce de pâte de porcelaine.

La craie exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, se calcine & se réduit en chaux vive sans éprouver aucune autre altération.

Sélénite formée par l'union de l'acide vitriolique & de la terre des os.

EXPOSÉE au feu, elle a fondu en 15", & a paru diminuer & s'évaporer; ensuite elle a perdu peu-à-peu sa fluidité, & il n'est plus resté qu'un résidu agglutiné qui a refusé constamment de se fondre; ce résidu étant demeuré quelques jours exposé à l'air, s'y est effleuré, comme il arrive à la

584 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
chaux vive, & il en est résulté une chaux éteinte parfaitement blanche.

Cette sélénite étoit dans l'état d'un sel triple; elle contenoit, indépendamment de l'acide vitriolique & de la terre calcaire, une portion d'acide phosphorique; les deux acides ont été décomposés, & ont formé, l'un du soufre, l'autre du phosphore, qui se sont dissipés, & il n'est resté que de la terre calcaire dans l'état de chaux.

Cette sélénite n'a point été éprouvée au foyer du verre ardent.

Gypse de Montmartre très-pur, qui avoit été préalablement calciné.

IL a été exposé au feu à 18' 10"; il a bouillonné & s'est fondu à 18' 30"; la fusion n'étoit pas absolument complète; on a fini à 20' 30". Vers la fin la fusion paroissoit devenir de moins en moins facile; il y a apparence que si on eût continué assez long-temps l'expérience pour dissiper tout l'acide vitriolique, la matière seroit devenue absolument infusible, & qu'il ne seroit resté que de la chaux vive. Les morceaux refroidis formoient une espèce de frite qui se réduisoit assez aisément en poudre, mais dont les particules cependant avoient une dureté assez considérable.

Le gypse calciné exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, n'éprouve aucune altération; on a essayé d'y mêler du noir de fumée, mais il ne s'est pas fondu davantage, & n'a paru même avoir aucune disposition à se fondre.

Spath fluor phosphorique, en cristaux cubiques jaunâtres, des Vosges.

LA terre calcaire ou plutôt la chaux, dans ce spath, est neutralisée par l'acide spathique, & c'est ce qui m'a déterminé à le ranger dans la classe de la terre calcaire & de ses composés.

Exposé

Exposé au feu à $10^h 54' 55''$, il s'est fondu à $55' 0''$, en un globule parfaitement rond, & qui étoit clair & transparent comme de l'eau; mais à mesure qu'on a continué plus long-temps l'expérience, il a paru de plus en plus difficile de le tenir en fusion parfaite; on a fini à $56' 40''$. Le globule, en refroidissant, de transparent qu'il étoit, est devenu opaque; il n'avoit plus le brillant vitreux du spath, mais il ressembloit à un sel fondu; ses parties avoient peu de liaison, & il se réduisoit aisément en poudre.

Ce résultat fournit un caractère fort simple pour distinguer le spath fluor ou spath vitreux, d'avec le spath pesant: ce dernier en effet brûle & détone, tandis que le spath cubique au contraire fond paisiblement à la manière des sels.

Le spath fluor a d'ailleurs d'autres caractères qui ne permettent pas de le confondre avec aucun autre; 1.^o celui de répandre une lumière phosphorique assez éclatante à une chaleur médiocre; 2.^o de donner par sa combinaison avec trois parties d'acide vitriolique, un gaz particulier, connu sous le nom de *gaz pathique*.

Ce spath exposé sur un support de grès au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, ne s'est point fondu; mais l'ayant placé dans le creux d'un gros charbon, & l'ayant exposé, dans cet état, à l'action du foyer, il a fondu avec facilité, & a formé un globule très-fluide, très-bien arrondi, qui est devenu d'un blanc d'émail en refroidissant.

Même Spath fluor phosphorique, d'un blanc tirant sur l'améthiste tendre.

IL a été exposé au feu à $10^h 34' 35''$; il a fondu en $15''$, en un globule rond qui circuloit avec une grande vivacité dans le creux du charbon: la fusion n'étoit point pâteuse comme celle des pierres, mais fluide comme l'eau, & analogue à celle des substances salines: le globule refroidi étoit opaque, très-friable, & se réduisoit avec une grande facilité en une poussière d'un blanc opaque.

Mém. 1783.

E e e e

Ce spath exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, s'y est comporté comme le précédent.

Même Spath fluor phosphorique , couleur d'améthiste.

EXPOSÉ au feu à $10^h 37' 50''$, il a fondu à $38' 10''$, au moment où il commençoit à rougir; il a formé un globule rond très-fluide, qui n'avoit point la consistance pâteuse des substances pierreuses & vitreuses en fusion, mais qui avoit une fluidité saline: ce globule refroidi étoit opaque, grisâtre à l'extérieur, blanc dans l'intérieur; on y apercevoit encore quelque chose de lamelleux; il se réduisoit aisément en poudre.

Ce spath exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen s'y est comporté comme les deux précédens.

Espèce de Spath des Vosges , qui a en apparence beaucoup de rapport avec le spath pesant.

CE spath est gris, opaque, lamelleux, d'une pesanteur spécifique très-grande.

Il a été exposé au feu à $10^h 45' 55''$, & on a fini à $46' 55''$; il s'est fondu complètement en un globule rond, veiné de gris & de blanc à la surface; ce globule cassé avoit dans l'intérieur le coup-d'œil spathique avec beaucoup de gros bouillons.

Le même spath exposé au feu à $11^h 51' 0''$, s'est également fondu à $11^h 51' 40''$, en un globule rond qui a bouillonné; le charbon s'est cassé à $52' 20''$, & l'expérience a cessé.

Il seroit très-facile, d'après les caractères extérieurs, de confondre ce spath avec le vrai spath pesant, dont la base est la terre pesante; cependant on voit qu'exposés à un feu violent, ils donnent des résultats bien différens, puisque le spath pesant a la propriété de détoner au feu, & que celui-ci y fond au contraire très-paisiblement.

On a cru devoir ranger provisoirement ce spath avec les terres calcaires & leurs composés, parce qu'on a lieu de croire que sa pesanteur tient à la nature de l'acide qui entre dans

sa composition, & non à celle de la base : c'est une substance au surplus qui mérite d'être analysée avec soin, ce ne sera qu'alors qu'on pourra, avec quelque certitude, lui assigner la véritable place.

Ce même spath exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, a fondu en une espèce d'émail blanc opaque.

Conséquences sur la terre calcaire.

IL résulte de ces expériences, que la terre calcaire pure, ou plus exactement la chaux, est absolument infusible par le plus grand degré de feu qu'on ait pu lui faire éprouver jusqu'à présent ; que la plupart des acides qui y sont combinés lui donnent de la fusibilité, mais qu'elle la perd à mesure qu'ils se dissipent, pour reprendre le caractère de la chaux vive.

QUATRIÈME CLASSE.

Terre pesante, & les composés salino-terreux qui résultent de sa combinaison avec les acides : le caractère des substances de cette Classe, est de brûler avec une sorte de détonation quand on les expose au feu animé par l'air vital.

Terre pesante.

ON a exposé, avec les précautions convenables, de la terre pesante au courant d'air vital ; en quelques secondes elle s'est fondue, elle s'est étendue & appliquée sur le charbon, après quoi elle a commencé à brûler & à détoner jusqu'à ce que presque tout fût dissipé.

La petite portion de résidu qu'on a rassemblée n'étoit encore que de la terre pesante qui, exposée à l'air, s'y est effleurie, & qui avoit le goût de la chaux éteinte, mais moins de causticité : il y a apparence que le goût hépatique qu'on a eu dans d'autres expériences, tenoit à ce qu'on avoit employé

de la terre pesante, qui contenoit encore de l'acide vitriolique & peut-être du soufre.

On a répété plusieurs fois cette expérience, & même avec plusieurs terres pesantes diversement préparées; elles ont toujours donné le même résultat, c'est-à-dire, qu'elles ont brûlé avec flamme & une sorte de détonation.

Spath pesant, ou Barosélénite de Sainte-Marie-aux-Mines.

Ce spath est du plus beau blanc; il est opaque, sa structure est lamelleuse.

Exposé au feu à 11^h 5' 5", il s'est fondu à 5' 50", & a commencé à brûler avec une espèce de détonation, comme celle d'un nitre à base terreuse: l'expérience finie, il restoit sur le charbon un enduit blanc âcre & amer, avec un goût de foie de soufre: l'ayant examiné avec plus d'attention, on a reconnu que c'étoit un foie de soufre à base de terre pesante.

Cette expérience a été recommencée plusieurs fois, & a toujours donné le même résultat.

Ce spath exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, sur un support de grès, s'est calciné sans se fondre; l'ayant exposé au même foyer dans le creux d'un charbon, il y a éprouvé une sorte de combustion, il a répandu des vapeurs sulfureuses, & il est resté une espèce de chaux qui conservoit encore un goût très-décidé de foie de soufre.

Conséquences sur la Terre pesante.

IL résulte de ces expériences, que la terre pesante, quand elle est pure, est infusible comme la terre calcaire ordinaire, ce qui établit encore un nouveau degré de ressemblance entre ces deux terres; mais en même temps l'espèce d'inflammation qu'elle éprouve lorsqu'on l'expose à l'action de l'air vital, est un caractère commun avec les substances métalliques, & on ne peut guère douter que cette terre ne soit une chaux métallique, comme M. Bergman l'a déjà soupçonné.

Terre magnésienne.

Magnésie du Sel d'Epsom.

CETTE terre a été exposée au feu pendant 3' 30"; comme elle étoit très-poreuse, elle a pris de la retraite & a diminué beaucoup de volume; le morceau qui étoit, dans le commencement, de la grosseur d'une noisette, s'est réduit à la grosseur d'un pois, mais la violence du feu n'y a occasionné aucune autre altération: ayant laissé refroidir, on a reconnu que la matière n'avoit pas été fondue, elle s'étoit seulement rapprochée sur elle-même & avoit pris plus de consistance; elle se réduisoit encore cependant aisément en poudre, mais les molécules étoient croquantes sous la dent.

Cette substance exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, s'est calcinée sans donner aucun autre indice d'altération.

Terre précipitée de l'eau du lac de Gomore.

CETTE terre est un composé de terre magnésienne & d'un peu de terre calcaire; elle a été exposée au feu à 3' 20", elle a répandu de la fumée, elle a diminué de volume, mais elle n'a donné aucune apparence de fusion: on a fini à 34' 15".

Conséquences sur la Terre magnésienne.

IL résulte de ces expériences, que la terre magnésienne est infusible comme la terre calcaire & la terre pesante.

SIXIÈME CLASSE.

Terres & Pierres résultantes de la combinaison des terres simples.

QUOIQ'IL ne se rencontre, à proprement parler, dans le règne minéral, aucune substance rigoureusement pure,

que la terre siliceuse, même dans le cristal de roche, soit le plus souvent mélangée d'un peu d'argile & de terre calcaire; & qu'on en puisse dire autant de presque toutes les autres substances simples; on ne peut cependant se dispenser, dans un système de Minéralogie, de ranger les matières suivant leur caractère prédominant, & c'est à quoi l'on s'est attaché dans les classes précédentes. Il n'en est pas de même des substances qui forment cette sixième classe; le mélange ou plutôt la combinaison y est dans des proportions telles que le composé prend un caractère qui lui est propre, & jouit de propriétés que n'avoit point en particulier chacune des substances qui entrent dans la combinaison.

Ces mélanges au surplus sont ou dans un état de combinaison chimique, c'est-à-dire dans une proportion constante qui constitue un degré exact de saturation, & alors les substances qui en résultent sont susceptibles de cristalliser régulièrement; ou bien elles ne sont, pour ainsi dire, que mécaniquement mélangées, & alors elles n'affectent aucune figure régulière, & ne sont point susceptibles de cristalliser: cette distinction a obligé de séparer les substances non simples en deux classes; savoir, *substances composées* & *substances mélangées*.

PREMIÈRE DIVISION.

Pierres précieuses.

J'AI donné dans un Mémoire particulier, imprimé dans le *Volume de 1782*, le détail des expériences que j'ai faites sur les pierres précieuses. Ces pierres, d'après les expériences de M.^{rs} Bergman & Achard, sont composées de terre siliceuse, de terre argileuse, d'un peu de terre calcaire & d'un peu de fer. D'après ce résultat de l'analyse, on auroit pu ranger ces pierres indifféremment, ou dans la classe de la terre siliceuse, ou dans celle de la terre argileuse; mais comme elles ont des caractères qui leur sont propres & qui ne permettent pas de les confondre avec aucune autre substance, il a paru plus naturel d'en faire une division à part dans la classe des terres & pierres com-

posées; on en peut dire autant des schorls, de la tourmaline, de la zéolithe, &c. qui forment la seconde division de cette classe.

DEUXIÈME DIVISION.

Tourmalines, Schorls, Zéolithe, Lapis-Lazuli.

Tourmaline de Ceylan.

DE la tourmaline très-pure en aiguilles régulières, a été exposée, à 5^h 0' 20", à une chaleur très-moderée, puis à la grande activité du feu, à 5^h 0' 40": elle a fondu à 0' 45", s'est gonflée & a bouillonné; on a fini à 5^h 1' 20": on a obtenu de cette expérience un globule rond, très-dur, qu'on n'a pas pu casser: il se laisse cependant attaquer, mais difficilement par la lime; c'est un verre noir, dont on ne peut mieux donner une idée, qu'en le comparant à de gros verre de bouteille, foncé en couleur.

M. Bergman, dans son examen de la tourmaline, nous a appris que cette substance étoit composée, comme il suit:

Terre argileuse	39	} Parties.
Terre siliceuse	37	
Terre calcaire	15	
Fer	9	
TOTAL	100.	

La tourmaline a la propriété de devenir électrique par la chaleur seule, sans frottement: ces pierres étoient encore peu connues en 1772; elles n'ont point été essayées au verre ardent.

Schorl noir.

ON s'est servi de schorl très-pur en aiguilles; il a été exposé au feu à 4' 0", il a commencé à fondre à 4' 10", il a pris une fusion pâteuse, & cependant il s'est arrondi. Le globule refroidi, étoit un verre noir, luisant dans ses fractures, comme des fragmens de poix noire; il rayoit le verre & se laissoit attaquer difficilement par la lime.

La composition chimique du schorl, ne diffère de celle de la tourmaline qu'en ce qu'il contient une petite portion de terre magnésienne.

Cette substance exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y fond facilement en un verre noir qui file quand on le tire avec une baguette de fer ou de verre.

Schorl vert.

CE schorl étoit en belles aiguilles & très-pur; il a été exposé à un feu modéré à 10' 20", & au grand feu à 11' 0"; il s'est fondu & s'est gonflé, puis il s'est réuni en un globule rond qui tournoyoit; on a fini à 12' 0". La matière refroidie étoit entièrement vitreuse, c'étoit un globule rond, semblable à de gros verre de bouteille foncé.

Zéolithe.

LA zéolithe, d'après les expériences de M. Pelletier, est composée, comme il suit :

Terre siliceuse.....	50	} Partics.
Terre argileuse.....	20	
Terre calcaire.....	8	
Eau.....	22	
TOTAL.....	100	

Cette substance se boursoffle & fond avec beaucoup de facilité au feu animé par l'air vital; elle n'a point été essayée au verre ardent en 1772.

TROISIÈME DIVISION.

Stéatite, Amiante, Talc, &c.

Craie de Briançon porphyrisée.

LA pierre à laquelle on a donné très-improprement le nom de *Craie de Briançon*, est une espèce de stéatite mêlée avec du talc; on en obtient par l'analyse chimique, environ
les

les trois quarts ou les quatre cinquièmes de terre siliceuse, & un cinquième de magnésie mêlée avec un peu d'argile.

Elle a été exposée au feu à $35' 20''$, & s'est fondue à $35' 40''$; la fusion étoit pâteuse; elle s'est cependant rassemblée en un globule rond qui circuloit; elle a paru diminuer de volume & devenir moins fusible à mesure qu'elle étoit exposée plus long-temps au feu: on a fini à $39' 0''$; le globule refroidi & cassé, étoit d'un blanc sale, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur; il avoit l'apparence d'une mauvaise porcelaine, dont le grain étoit grossier.

Cette substance n'a pas été essayée au verre ardent, mais en général les stéatites s'y fondent avec assez de facilité.

Amiante.

D'APRÈS les expériences de M. Bergman, l'amiante est composée ainsi qu'il suit :

Terre siliceuse.....	640	} Parties.
Magnésie.....	186	
Terre calcaire.....	69	
Terre pesante.....	60	
Argile.....	33	
Fer.....	12	
TOTAL.....	1000	

Cette substance exposée au feu à $4^h 54' 0''$, a fondu à $4^h 54' 25''$; mais comme le morceau étoit gros on ne pouvoit en tenir en fusion qu'une petite portion; on est parvenu cependant à mettre la matière en globule: l'expérience a fini à $56' 30''$.

Le globule restant n'étoit pas entièrement vitreux; c'étoit une espèce de lave noirâtre, d'un grain très-fin, qui ressembloit à du basalte, mais qui ne paroissoit pas avoir autant de pesanteur spécifique; on y voyoit quelques bulles rondes dans l'intérieur: cette substance étoit assez dure pour rayer le verre, mais elle se laissoit entamer par la lime; elle n'étoit nullement attirable à l'aimant.

L'amiante exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, se fond à l'instant même où elle y est présentée, & donne un verre d'un jaune-brun.

L'amiante dure ou asbeste se fond au verre ardent avec la même facilité, & donne un verre noirâtre.

Talcs, Pierres talqueuses, Serpentes, Stéatites.

TOUTES ces substances exposées au courant d'air vital sur un charbon allumé, s'y fondent avec beaucoup de facilité; la fusion n'est pas fluide, mais pâteuse; les verres qu'on obtient sont communément bruns, noirâtres, enfumés, quelquefois verdâtres, & ressembient assez bien à du verre de bouteille.

Ces mêmes substances fondent au verre ardent avec la même facilité, & donnent des verres jaunes foncés, bruns & noirâtres.

Basalte d'Islande.

L'ÉCHANTILLON, sur lequel on a opéré, étoit d'un gris noirâtre, d'un grain très-fin, & parsemé de petits points ou facettes brillantes: exposé au feu à 53' 35", il s'est ramolli à 53' 50", & s'est formé en un globule rond à 54' 45"; le morceau refroidi & cassé, avoit dans son intérieur l'apparence d'un morceau de verre de bouteille foncé; on y remarquoit des bulles assez grosses.

Un morceau du même échantillon, exposé, en 1772, au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, a fondu sur le champ en un verre noir de consistance pâteuse.

Suivant M. Bergman, le basalte est composé de cinquante-fix parties de terre siliceuse, de quinze parties d'argile, de quatre de terre calcaire, & de vingt-cinq de chaux de fer.

Autre espèce de Basalte.

EXPOSÉ au feu à 10^h 16' 50", il s'est fondu au moment où il a commencé à rougir: à 17' 10", il formoit un globule rond; on a fini à 17' 30". Le résultat refroidi consistoit en un verre d'un brun-noir, assez semblable à du verre de bouteille très-foncé; il étoit presque sans bouillons à

la surface, mais il en étoit rempli dans l'intérieur; ces bouillons étoient assez gros & très-ronds.

Espèce de Basalte, dont sont en partie composées les Montagnes des environs de Giromagny dans les Vosges.

- EXPOSÉ au feu à 10^h 19' 30", il a commencé à fondre en bouillonnant: à 19' 45", plusieurs morceaux se sont réunis en globules ronds qui ont bouillonné; on a fini à 20' 30". La matière refroidie étoit vitreuse jusque dans son intérieur, & couleur de verre de bouteille, sans bouillons à la surface, mais on en remarquoit de très-gros dans l'intérieur.

Un fragment du même échantillon, exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, s'est fondu sur le champ en un verre noirâtre.

Conséquences sur les pierres composées.

LES conséquences que présentent les expériences faites sur cette classe de pierres, sont en général, que toute pierre composée est fusible: ce principe ne reçoit d'exception qu'à l'égard des pierres composées des trois terres calcaires, c'est-à-dire, de la terre calcaire ordinaire, de la terre magnésienne, & de la terre pesante: une pierre, ou en général un composé de ces trois terres ou de deux de ces trois terres, ne seroit point fusible; mais pour peu qu'à ces trois terres ou à l'une d'elles, vienne s'en ajouter une autre, telle que la siliceuse ou l'argileuse, même en assez petite quantité, la fusion s'opère avec facilité, ainsi qu'on le verra par les expériences ci-après. Les matières volcaniques étant en général très-composées, elles sont toutes très-fusibles.

SEPTIÈME CLASSE.

Terres & Pierres formées de substances mécaniquement & grossièrement mélangées.

Schistes & Ardoises.

TOUTES les pierres de cette classe fondent avec une grande

facilité quand on les expose au feu animé par l'air vital. Il résulte de leur fusion des substances vitreuses dans un état pâteux, & qui, refroidies, ressembloit à du gros verre de bouteille plus ou moins foncé en couleur.

Ces pierres exposées au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, donnent absolument le même résultat.

Granites, grès micacés propres à faire des meules.

TOUTES ces pierres fondent lorsqu'on les expose sur un charbon ardent au courant d'air vital, & donnent des verres plus ou moins colorés; elles fondent également au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, quoiqu'avec un peu plus de difficulté : le grès à faire des meules, ou mollasse grise des Vosges, donne, au verre ardent, un verre noir comme celui qu'on obtient de l'ardoise.

Porphyre rouge.

ON a exposé au feu à $11^h 4' 8''$, un morceau de porphyre rouge; il a commencé à se ramollir à $5' 30''$, & bientôt après il a fondu complètement en un globule rond caverneux : ce verre refroidi étoit noir & opaque, il avoit un peu de transparence vers les bords, & il avoit la couleur de gros verre de bouteille; sa surface, vue à la loupe, avoit le poli du verre, on y remarquoit des taches blanches en quelques endroits & de petites bulles.

Porphyre vert.

EXPOSÉ au feu à $11^h 23' 40''$, il étoit fondu complètement à $24' 5''$; il s'est formé en un globule rond qui bouillonné; on a fini à $24' 40''$.

Le globule cassé s'est trouvé être un verre, blanc par places & demi-transparent, noir & opaque dans d'autres, & à peu près semblable à du verre de bouteille.

EXPÉRIENCES sur la combinaison artificielle des Terres simples:

ON a exposé au feu, avec beaucoup de précautions,

partie égale de terre d'alun & de quartz porphyrisé : le mélange s'est ramolli presque aussitôt & a bouillonné; la matière s'est réunie en une fusion pâteuse qui s'est arrondie de plus en plus, & enfin a formé un globule vitreux, à peu-près comme il arrive aux pierres précieuses : le résultat refroidi étoit un verre blanc, demi-transparent, rempli de fentes & de bulles, qui étoit fort dur, qui rayoit le verre, mais qui se laissoit entamer par la lime.

Terre d'alun.....	4	} Parties.
Quartz porphyrisé.....	4	
Terre calcaire aérée.....	1	

La fusion a été très-pâteuse; on a obtenu un globule de verre blanc transparent, mais étonné & fendillé dans toutes ses parties, comme du cristal de roche qu'on auroit fait rougir & qu'on auroit éteint dans de l'eau.

Terre d'alun.....	} Parties égales.
Sablon porphyrisé.....	
Terre calcaire aérée.....	

Le mélange a fondu avec facilité & s'est réuni en un globule vitreux, de consistance pâteuse : refroidi, il étoit demi-transparent; il se laissoit entamer par la lime : examiné dans son intérieur, il étoit rempli de petites bulles rondes.

Terre d'alun.....	2	} Parties.
Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines.....	5	

Pour empêcher que la matière pulvérulente ne fût emportée par le courant d'air, on l'a imbibée avec de la cire, & alors on est parvenu à la fondre très-facilement : l'expérience ayant été répétée deux fois, on a obtenu deux globules ronds très-durs, opaques, couleur de marron clair : les ayant cassés, ils ont présenté une fracture un peu grasse, comme on l'observe dans un assez grand nombre de substances quartzeuses colorées.

Terre d'alun.....	2	} parties.
Sablon porphyrisé.....	2	
Terre calcaire.....	1	

On a obtenu une fusion pâteuse, un peu plus décidée cependant que celle que prennent les pierres précieuses; le globule refroidi, étoit absolument vitreux, blanc, transparent, mais fendillé dans toutes les parties comme du cristal de roche qui auroit été chauffé & rougi, & qui auroit été jeté dans de l'eau.

Mélange de parties égales de Chaux de marbre & de Terre d'alun.

CETTE poudre, qui étoit très-légère, a été exposée au feu à 57' 35", une partie a été emportée par le courant d'air, mais une petite portion s'est fondue en 10"; elle s'est bientôt parfaitement arrondie. Le petit globule refroidi, étoit transparent & couleur d'aigue-marine, il avoit le coup-d'œil des pierres précieuses, mais il n'en avoit pas la dureté, car il rayoit difficilement le verre.

Mélanges de parties égales de Quartz porphyrisé & de Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines.

COMME ces matières étoient réduites en poudre très-fine, elles étoient aisément emportées par le courant d'air; mais au moment où on parvenoit à leur faire éprouver l'action du feu, elles fondoient très-facilement, & se rassembloient en globules qui bouillontoient. La matière paroissoit cependant devenir moins fusible à mesure qu'elle étoit exposée plus long-temps au feu: les globules refroidis, étoient parfaitement blancs, ils avoient le luisant de l'émail en dehors, & ils ressembloient dans leur intérieur à une porcelaine vitreuse: on y remarquoit peu de bouillons. Il y a quelque apparence que l'une des deux terres s'évapore par la violence du feu, & que c'est par cette raison que la fusibilité diminue.

*Mélange d'à peu-près parties égales de Terre pesante ,
& de Terre d'alun.*

CE mélange a paru se fondre au moment où il a été exposé au courant d'air vital, mais ensuite il est devenu moins fusible: il y a apparence que la terre pesante s'évapore & se dissipe, & que la terre de l'alun reste seule. On a interrompu l'expérience avant que la terre pesante pût être entièrement évaporée.

Le résidu étoit une substance bleuâtre, un peu frittée, qui conservée, s'est effleurie: la terre pesante a présenté les phénomènes de la chaux vive, & le morceau, qui étoit assez bien lié, s'est réduit en grande partie en poudre; d'où il semble résulter que ces deux terres ne contractent point d'union.

*Mélange d'à peu - près parties égales de Terre pesante
& de Spath calcaire de Sainte-Marie-aux-Mines.*

Le mélange paroît s'agglutiner & même se fondre au premier instant; mais bientôt on s'aperçoit que les deux terres conservent leur caractère: la terre pesante brûle ou décrépite, & la terre calcaire reste seule infusible: les parties qui ont paru s'agglutiner, exposées à l'air, s'y effleurissent & se réduisent en chaux éteinte.

*Mélange de parties égales de Terre pesante & de Quartz
porphyrisé.*

CE mélange exposé au courant d'air déphlogistiqué, avec les précautions convenables, se ramollit & s'agglutine presque sur le champ; il bouillonne, il se boursoufle, & se réunit ensuite en un globule qui occupe beaucoup moins de volume. Le globule refroidi étoit blanc, opaque, absolument vitreux, rempli de bulles, il se cassoit aisément & rayoit à peine le verre.

Magnésie du sel d'Epsom & Quartz porphyrisé.

ON a exposé parties égales de ces deux matières au feu,

dans le creux d'un charbon, où on l'avoit tassé; on a fait ensuite tomber le courant d'air tout autour de la matière, pour qu'elle s'aglutinât avant de se dissiper. On est parvenu ainsi à la foudre, principalement sur les bords, & ensuite jusqu'au centre. La fusion étoit difficile & pâteuse, il en a résulté un émail blanc, très-luisant à l'extérieur, vitreux & opaque dans son intérieur, qui étoit très-dur & qui rayoit le verre.

Magnésie & Quartz exposés sur le charbon en plus petite quantité.

IL en a résulté un émail blanc semblable au précédent, mais plus vitreux & mieux fondu.

Conséquences générales sur les Terres simples & sur leurs combinaisons.

IL résulte des expériences qu'on vient de rapporter, que parmi les terres simples, trois, savoir la terre calcaire, la terre magnésienne & la terre pesante, sont absolument infusibles.

Secondement, que le cristal de roche n'est susceptible que d'un ramollissement très-léger & à peine sensible, & qu'on pourroit même attribuer à la petite portion d'argile qui lui est intimement combinée.

Troisièmement, que le quartz & toutes les pierres quartzieuses & siliceuses diffèrent du cristal de roche, en ce qu'elles sont toutes susceptibles de prendre par l'action d'un feu très-violent, un degré de ramollissement très-sensible, ce qui tient à la portion d'argile qui y est mélangée.

Quatrièmement, que la terre argileuse, même dans son plus grand état de pureté, est susceptible de se fondre seule & sans addition.

Cinquièmement, que les trois terres calcaires, savoir la terre calcaire ordinaire, la terre magnésienne & la terre pesante, mêlées ensemble dans toutes proportions, ne se communiquent

communiquent point réciproquement de fusibilité ; mais qu'elles forment chacune une espèce de chaux vive particulière, qui s'effleurit à l'air, & qui s'éteint avec chaleur par l'addition de l'eau.

Sixièmement, que le mélange des deux autres terres, soit entr'elles, soit avec l'une des trois terres calcaires, forme des composés qui se vitrifient, qui donnent des verres plus ou moins transparens ; & qu'une très-petite quantité de terre calcaire suffit pour communiquer à la terre quartzeuse ou à celle de l'alun, une très-grande fusibilité.

SECON D ORDRE.

Substances salines.

Borax.

ON a exposé à 5^h 6' 10", au courant d'air vital, du borax qui avoit déjà été calciné ; il a fondu sur le champ, s'est boursofflé, s'est tourmenté, puis il s'est réuni en un globule que la violence du feu entretenoit rouge, mais qui étoit fluide comme de l'eau : à 8' 10", on s'est aperçu qu'il diminuoit considérablement de volume, qu'il bouillonna & se volatilisait, & en effet à 9' 40", il étoit entièrement évaporé.

Tartre vitriolé.

ON a exposé à 5^h 24' 0", du tartre vitriolé en poudre à l'action du feu ; à 24' 25" il étoit fondu ; il a paru comme brûler & fuser en répandant une odeur de soufre, & s'est dissipé en entier.

Dans cette expérience, le tartre vitriolé se convertit en soufre par le contact du charbon, une portion de soufre brûle avec flamme & se dissipe, & l'alkali s'évapore.

Ce sel exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, fond avec quelque difficulté, & donne une substance demi-vitrifiée, blanchâtre & demi transparente.

Mém. 1783.

G g g g

Sel de Glauber.

CE sel fond à l'instant même où il sent l'impression de la chaleur ; mais à cette première fusion , purement aqueuse , en succède ensuite une réelle ; alors le sel s'étend sur le charbon , & ce n'est plus qu'avec peine qu'on peut le faire brûler ; la flamme du charbon est très-jaune , il se répand une odeur de soufre ; sur la fin il y a une espèce de combustion ou de détonation , moins sensible cependant qu'avec la terre pesante ; enfin la totalité de la matière se dissipe & dispa- roît.

Ce sel fondu au grand verre ardent de Tschirnhausen , sur un morceau de grès , a pénétré en partie le support , & l'a recouvert d'une incrustation saline blanche , sans que la fusion se soit communiquée au support.

Alkali fixe végétal caustique.

ON a exposé au feu , de l'alkali fixe végétal caustique qui ne faisoit presque aucune effervescence avec les acides ; il s'est fondu sur le champ en bouillonnant , & s'est étendu sur le charbon en contractant avec lui une forte adhérence ; en même temps il a répandu une vapeur ou fumée très-considérable , & il s'est entièrement évaporé ; l'expérience a duré 1' 5".

Ayant répété l'expérience , afin de conserver une petite portion de cet alkali avant qu'il fût entièrement évaporé , on a observé que le sel ne souffroit aucune altération par ce degré de feu violent , & qu'il étoit aussi caustique & aussi déliquescent qu'au commencement de l'expérience.

Alkali fixe végétal saturé d'air fixe.

CE sel décrépite , & on a été obligé de l'exposer au feu avec beaucoup de précautions ; mais quand l'eau interposée entre les cristaux , a été une fois évaporée , il a fondu & bouillonné , puis il s'est étendu sur le charbon qu'il paroïsoit pénétrer & qu'il empêche absolument de brûler : en promenant le courant d'air vital autour des places que l'alkali avoit

ainsi pénétré, on est parvenu à l'évaporer en totalité en une fumée blanche épaisse.

Alkali minéral saturé d'air fixe.

ON a exposé au feu de l'alkali minéral effleuri ; il a fondu aisément , a commencé à diminuer de volume , & s'est enfin entièrement évaporé : mais une circonstance remarquable , c'est qu'il paroïssoit y avoir , pendant l'évaporation , une espèce de combustion ou de détonation analogue à celle qu'on éprouve avec la terre pesante , à l'exception qu'elle est beaucoup moins forte. L'alkali de la soude , & les substances alkalinés en général seroient-elles des espèces de chaux métalliques ?

Sel marin décrépité.

EXPOSÉ au courant d'air vital , à 11' 30", il a fondu à 11' 35" ; il a répandu une fumée épaisse ; à 11' 50" il s'est étendu sur le charbon , & l'a pénétré au point de l'empêcher de brûler : il y a apparence qu'en continuant l'expérience , on parviendroit à l'évaporer en entier ; mais il reste de l'incertitude , au moyen de ce qu'il est très-difficile de faire brûler le charbon.

On a répété cette expérience , dans la vue de déterminer si le sel marin se décomposoit & s'alkalisoit : on a commencé à 5^h 13' 25", & on a fini à 5^h 19' 30". Les circonstances ont été les mêmes que dans l'expérience précédente ; la fumée étoit épaisse , mais sans odeur d'acide marin , & ce qui est resté de ce sel n'étoit nullement décomposé.

Tartre phosphorique.

ON a exposé au courant d'air vital une combinaison d'acide phosphorique & d'alkali fixe : l'expérience a commencé à 2' 35" ; il a fondu sur le champ en bouillonnant , & se boursoufflant presque comme de l'alun : à cette première fusion , qui n'étoit occasionnée que par l'eau de cristallisation ,

G g g ij

en a succédé une d'un autre genre, & la matière s'est mise en un globule clair, & fluide comme de l'eau: on a fini à 4' 0"; le globule refroidi & conservé quelque temps, s'est humecté & fendillé. Le sel phosphorique avoit perdu tout son excès d'acide, & il avoit très-peu de goût.

Il s'est dégagé pendant cette expérience une légère odeur de phosphore, & il y a quelqu'apparence que si l'on eût poussé plus loin cette expérience, l'acide phosphorique se seroit dissipé peu à-peu en se convertissant en phosphore, & que l'alkali se seroit volatilisé à son tour.

Conséquences sur les Substances salines.

IL résulte des expériences qu'on vient de rapporter :

1.^o Que le tartre phosphorique est le plus fixe de tous les sels, ce qui le rend très-propre à être employé comme fondant dans les expériences faites, soit à la flamme du chalumeau ordinaire, soit au feu de charbon animé par l'air vital.

2.^o Que le sel marin se volatilise en entier à un degré de feu violent, sans se décomposer.

3.^o Qu'il en est de même de l'alkali fixe végétal, de l'alkali fixe minéral & du borax; que ces trois sels se dissipent en quelques instans & avec beaucoup de facilité.

4.^o Que tous les sels vitrioliques métalliques ou autres, se décomposent par le contact du charbon; que leur acide se convertit en soufre qui se dissipe, & que la base reste à nu & jouit de toutes ses propriétés.

TROISIEME ORDRE.

Soufre & Bitumes.

LES substances qui composent cet ordre de minéraux, exposées à l'action du feu animé par l'air vital, ne présentent d'autre phénomène que celui d'une combustion très-rapide & très-prompte. Ce seroit grossir inutilement ce Mémoire que d'entrer dans le détail des expériences.

QUATRIEME ORDRE.

*Substances métalliques.**Platine brute.*

LA platine brute exposée au courant d'air vital, fond en 15 ou 20 secondes, quand la quantité n'excède pas cinq à six grains; la fusion est même très-complète, & le métal se met en globules très-ronds: mais quand la quantité est d'un gros & au-delà, la fusion est difficile, on a de la peine à entretenir le morceau en fusion dans toutes ses parties, & on ne peut pas le réunir en un globule rond. La meilleure proportion qu'on puisse employer, est celle de 12 à 15 grains; alors on obtient des globules bien fondus & bien ronds.

La platine exposée au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, s'y aglutine à la longue; mais dans les nombreuses expériences auxquelles nous l'avons soumise en 1772 & 1773, il ne nous a pas été possible de la fondre.

Platine séparée de son sable magnétique.

LA platine qui a été dépouillée par l'aimant du sable magnétique qu'elle contient, présente à peu-près les mêmes phénomènes que la platine brute; elle fond quand elle est exposée au courant d'air vital, & forme des globules ronds.

Or de départ.

EXPOSÉ au feu, il a fondu en 10 secondes: il ne s'en est pas élevé de fumée bien sensible; cependant une cuiller d'argent placée à quelques pouces de distance au-dessus du globule pendant la fusion, a été sensiblement dorée. On n'a point observé la moindre apparence de flamme.

M. Macquer a rendu compte, dans un très-grand détail, des expériences qui ont été faites sur l'or exposé au foyer du grand verre ardent; il en résulte qu'il s'y volatilise à la longue.

Platine forgée.

ON a exposé sur un charbon de la platine forgée, apportée

par M. le Comte de Milly ; l'expérience a commencé à 0' 25" : la platine a commencé à fondre à 1' 20", & s'est mise en globule à 1' 35" ; elle a ensuite bouillonné à la surface, & il s'y est formé une scorie vitreuse. Il paroîtroit que la platine forgée est un peu plus fusible que la platine brute : on n'a point observé la moindre apparence de flamme dans toutes les expériences sur la platine.

Argent de coupelle.

EXPOSÉ au feu, il a fondu en 10 secondes ; il a répandu une fumée considérable, mais sans flamme. Une pomme de canne d'or, exposée à la vapeur blanche, n'a point été sensiblement argentée ; mais comme on opéroit la nuit, on ne peut pas compter à un certain point sur cette observation. Quoique l'argent fût fort pur, il s'est formé à la partie supérieure du globule, une petite croûte vitreuse jaunâtre, provenant sans doute de la calcination & de la vitrification de quelques portions de métal allié à l'argent.

On a répété cette même expérience, en se servant d'un grand ajutoir, & en l'exposant ainsi à un courant d'air vial très-considérable, pour examiner si l'argent répandoit de la flamme comme la plupart des autres métaux ; il a fondu en peu de temps, & il s'est formé à la surface supérieure une très-petite couche de chaux jaunâtre, mais il n'y a point eu de flamme.

L'argent exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, y est dans un état d'évaporation lente, mais continuelle.

Argent au titre de Paris.

IL fond en quelques instans, & se couvre d'une pellicule vitreuse qui est sans doute dûe à la calcination & à la vitrification des métaux dont il est allié ; c'est une manière commode & expéditive de coupeler l'or & l'argent.

Cuivre rouge.

EXPOSÉ au feu, il a fondu en 15 secondes ; il a bouillonné & a commencé à répandre une flamme verte & de

différentes autres couleurs, qui subsistoit même quand on avoit retiré le charbon du courant d'air vital; en peu de temps le cuivre s'est volatilisé en entier.

Ce métal exposé au foyer du grand verre ardent, sur un support de grès, se réduit en chaux.

Vitriol de cuivre.

ON a exposé à 54' 45", au courant d'air vital, du vitriol de cuivre calciné; la flamme qui s'élevoit du charbon, s'est colorée de vert & de jaune: la matière a commencé à se fondre à 55' 10", & après avoir bouillonné long-temps, il est resté un culot de cuivre; l'expérience a fini à 56' 30".

Le cuivre restant étoit attaquant à la lime; il n'étoit pas cependant exactement dans son état métallique, il étoit plus cassant, & avoit quelque rapport en apparence avec de la mine d'argent rouge.

Étain.

EXPOSÉ au feu, il s'est fondu presque sur le champ; il a bouillonné, puis il est devenu rouge; il s'en est élevé ensuite une fumée blanche semblable aux fleurs de zinc ou *nihil album*; elle étoit accompagnée d'une flamme blanche: insensiblement le métal s'est réduit entièrement en chaux; jusque-là il a continué à bouillonner avec une grande force.

Ce métal exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, fond en un globule blanc & brillant comme de l'argent; il s'en élève une fumée blanche assez abondante, claire & lumineuse, & qui pourroit bien être une flamme: l'ayant retiré du foyer au bout de 12 minutes, il est resté une matière fondue non vitreuse, opaque, couleur de chamois, très-dure, mais cassante; recouverte en partie par une chaux très-blanche, qui, vue à la loupe, étoit composée d'aiguilles fines transparentes comme du verre.

Si on tient très-long-temps de l'étain au verre ardent, il se dissipe en entier.

Plomb.

Exposé au feu, il a fondu presque sur le champ : bientôt après il est devenu rouge & a bouillonné fortement, en même-temps il s'en élevoit une fumée rouffâtre avec flamme.

On a répété la même expérience pour en mieux saisir toutes les circonstances, & on a été lentement dans le commencement : d'abord le plomb a commencé par se calciner à sa surface; ensuite la chaux qui s'étoit formée s'est fondue & a commencé à entrer en évaporation; dans les instans où l'on donnoit un grand degré de feu, la matière qui étoit en partie dans l'état de métal & en partie dans l'état de chaux, brûloit avec une flamme blanche.

Il ne s'est trouvé aucune note sur la manière dont le plomb se comporte au verre ardent : quant au *minium* il s'y convertit en une belle litharge très-brillante, sans qu'il y ait aucune parcelle de plomb réduit.

Fer.

Le fer exposé sur un charbon au courant d'air vital, fond avec assez de facilité; mais au moment où il est dans un état de fusion parfaite, il commence à brûler avec fracas, & à jeter de toutes parts & à une grande distance, des étincelles brillantes comme une gerbe d'artifice de composition chinoise : cette combustion dure jusqu'à ce que la totalité du fer se soit dissipée. Si on réunit sur une feuille de papier les molécules de fer qui se sont ainsi éclaboussées de toutes parts en brûlant, on aperçoit qu'elles sont la plupart en petites boules creuses, qui se réduisent facilement en poudre, & qui ne sont autre chose que de l'éthiops martial.

Le fer exposé au verre ardent, présente des phénomènes à peu-près semblables : voyez Mémoire de M. Homberg, année 1706, page 158.

Colcothar.

Exposé au feu à 57' 35"; il s'en détachoit de temps en temps de petites étoiles d'artifice; il a fondu assez bien à

à 58' 30"; il a bouillonné & a formé un globule rond très-blanc; à 59' 0" il continuoit de s'en détacher des étoiles ou étincelles; on a fini à 59' 50".

Le morceau, refroidi, étoit un culot de fer cassant, poreux, presque dans l'état d'éthiops martial, mais qui souffroit encore un peu la lime; il étoit parfaitement attirable par l'aimant.

Espèce de Mine de fer micacée, d'un filon qui se trouve au pied du pic de la montagne du Bon-homme dans les Vosges.

CETTE mine est noire, brillante, elle salit les doigts comme de la manganèse; on douteroit, au premier coup-d'œil, si c'est une mine de fer, & on pourroit la confondre avec de la molybdène, mais elle en diffère, en ce qu'elle est attirable à l'aimant.

Comme cette substance est légère, on l'a exposée au feu avec précaution, pour empêcher qu'elle ne se dissipât: on a commencé à 32' 20", & elle s'est fondue à 32' 50", en un grand nombre de petits boulets très-ronds, dont quelques-uns paroissent se dissiper, les autres se sont réunis peu-à-peu à 35' 25", en un seul globule dont la fusion n'étoit pas bien décidée; ce qui annonce que cette substance est très-réfractaire. Il s'est détaché pendant le cours de l'opération, quelques petites étoiles d'artifice, semblables à celles que produit le fer en brûlant; mais à cela près, le métal fondu n'avoit point les caractères du fer; pendant le refroidissement il s'en est élevé de la fumée blanche semblable à du pompholix.

Le résidu examiné étoit une masse brune ressemblante à de la poix, mais avec moins de brillant dans les fractures; elle étoit cassante & très-attirable à l'aimant.

Il y a apparence que cette mine contient du fer & de la manganèse.

Sable magnétique de la platine.

EXPOSÉ au feu avec précaution, pour l'empêcher d'être emporté par le courant d'air, il s'est aglutiné en 10", & s'est fondu complètement en 45", il ne s'est pas cependant mis

en globules exactement ronds; il a été retiré du feu au bout d'une minute 45 secondes.

Ayant laissé refroidir le morceau, il étoit grenu dans l'intérieur, il avoit une apparence demi-métallique à peu-près comme certaines espèces de blende; il étoit très-cassant sans être cependant très-dur: on voit par cette expérience, que ce sable magnétique n'est pas du fer pur, mais que probablement il est allié.

Sable magnétique de Bar.

ON a été curieux de mettre en comparaison avec le sable magnétique de la platine, celui de Bar en Alsace: en 25 secondes les globules se sont aglutinés, & 25 secondes après, c'est-à-dire, après 50 secondes en tout, il étoit assez bien fondu: on a continué de l'exposer au courant d'air vital pendant 1' 15" en tout, après quoi, l'ayant laissé refroidir, le globule étoit noir à l'extérieur, avec quelques apparences métalliques; il paroissoit n'avoir qu'une pesanteur spécifique médiocre: cassé, son intérieur étoit brillant, ou plutôt luisant comme de la résine; il ressembloit à une espèce de blende.

Cette matière a beaucoup de rapport, quant aux effets, avec la précédente, mais elle est un peu plus fusible.

Régule de Manganèse.

IL est difficile d'obtenir du régule de manganèse pur, & qui ne contienne pas une portion plus ou moins grande de fer, ou même de l'arsenic: les phénomènes que présente cette substance métallique lorsqu'on l'expose au feu animé par l'air vital, ne sont pas en conséquence toujours constans: si elle contient de l'arsenic, il se décèle par l'odeur d'ail; si elle est alliée de beaucoup de fer, elle fond & brûle en répandant des étincelles: enfin, si le régule de manganèse est pur, ou à peu-près pur, il brûle dans le premier instant, il se calcine & redevient chaux noire de manganèse; dans cet état, il ne brûle plus, & il se dissipe lentement & peu-à-peu par l'extrême violence du feu.

L'exposition du régule de manganèse au feu animé par l'air vital, n'est point, comme on auroit pu le penser, un moyen d'en séparer le fer; car ayant opéré sur un régule très-sensiblement attirable à l'aimant, il ne l'étoit pas moins après avoir été refroidi; il paroissoit même l'être devenu un peu davantage.

Mercuré précipité per se.

Dès que cette substance a été exposée au feu, elle s'est évaporée, & s'est volatilisée en entier, sans présenter aucun phénomène particulier.

Zinc.

EXPOSÉ au feu, il a fondu presque sur le champ, & a commencé à brûler presque aussitôt, & même avant d'être rouge: la flamme étoit de couleur rouge dans son milieu & bleue vers la pointe; en même-temps, le métal s'est réduit en chaux, & il s'en est élevé des fleurs qui se sont répandues dans l'air du laboratoire: lorsque tout le métal a été calciné, il n'est plus resté qu'une chaux blanche qui, exposée à la grande ardeur du feu, ne s'est point fondue, mais qui a continué à s'évaporer avec une flamme bleue: il est probable que cette flamme étoit occasionnée par une nouvelle combustion d'une portion de métal qui se revivifioit par le contact du charbon.

Ce demi-métal ayant été exposé au foyer du grand verre ardent de Tschirnhausen, sur un grès, s'est fondu très-facilement, & s'est recouvert d'une chaux blanche; il en sortoit une fumée épaisse, accompagnée de flocons blancs de laine philosophique; la matière se gonffoit dans des endroits, & il s'y faisoit comme des éruptions subites de volcan: la chaux blanche qui s'étoit formée, présentait des herborisations composées de petites aiguilles blanches, transparentes comme le plus beau cristal.

Vitriol de Zinc.

ON a exposé à $7^h 2' 30''$, au courant d'air vital, du
H h h h ij

vitriol de zinc calciné; il a répandu de la fumée, il s'est fondu avec peine & imparfaitement; les parties ont pris difficilement de la liaison: il y a eu pendant l'opération une flamme jaune & bleue: on a fini à 5' 25"; alors il ne restoit plus que de la chaux de zinc sur le charbon.

Espèce de Blende écailleuse grise, qui a le facies metallica.

CETTE blende est une mine de zinc, mêlée, à ce qu'il paroît, avec une autre substance métallique.

Exposée au feu à 52' 0", elle a brûlé avec flamme bleue & vapeurs blanches, comme le zinc lui-même; il s'est répandu en même temps une odeur d'arsenic & de soufre; à 53' 15" il y avoit bien une espèce de fusion, mais elle étoit pâteuse: on a fini à 54' 30".

Le morceau refroidi, étoit une substance métallique, d'un grain fin, cassante, & qui paroissoit être composée principalement de zinc.

Blende.

CETTE espèce de blende est évidemment une mine de zinc; exposée au feu, elle décrépite d'abord, puis elle brûle comme le zinc, avec flamme bleue & fumée blanche de pompholix: il s'en élève une légère odeur d'arsenic, jusqu'à évaporation complète, & il reste en conséquence une petite portion de chaux de zinc sur le charbon.

Blende de Sainte-Marie-aux-Mines.

CETTE blende n'a pas le *facies metallica*; elle est de couleur rousse écailleuse.

Quoique cette substance, à l'extérieur, ait beaucoup de rapport avec la mine de zinc qui porte le même nom, elle en diffère essentiellement par sa nature; exposée au feu, à 40' 30", elle s'est ramollie à 41' 25", sans brûler & sans répandre de fumée; elle a fondu assez bien à 41' 25", mais comme elle est très-réfractaire, la fusion n'a été complète qu'à 42' 30"; on a fini à 42' 50"; on n'a point remarqué d'odeur pendant le cours de l'opération.

Blende lamelleuse jaune phosphorique de Derbyshire.

CETTE blende doit être réduite en poudre avant d'être exposée au courant d'air vital, autrement elle décrépite & se dissipe en éclats.

En conduisant l'expérience avec les précautions convenables, on a d'abord l'odeur de soufre, qui se continue pendant presque toute l'opération; en même temps la matière brûle sans se fondre, avec une flamme verte & bleue, & en laissant échapper une fumée blanche cotoïneuse qui paroît être de la chaux de zinc : en continuant assez long-temps l'expérience, presque toute la matière se dissipe.

Cette blende est donc principalement composée de soufre & de zinc.

Antimoine cru.

EXPOSÉ au feu, il se fond à l'instant, répand une flamme blanche, & se dissipe en une fumée blanche.

Régule d'Antimoine.

EXPOSÉ au feu, il s'est fondu en 10 secondes, & a commencé à répandre une fumée blanche, ensuite il a rougi & a commencé à brûler avec une flamme blanche.

Régule d'Arseñic du Commerce.

EXPOSÉ au courant d'air vital sur un charbon allumé, il a brûlé avec une flamme d'un blanc-bleu, & s'est dissipé entièrement avec l'odeur qui lui est propre.

Pyrite ferrugineuse & arsenicale des environs de Sainte-Marie-aux-Mines dans les Vosges.

ON trouve dans les décombres de mines anciennement exploitées à Sainte-Marie-aux-Mines, une substance métallique cassante, d'un jaune d'or pâle, faisant beaucoup de feu avec le briquet, & que les ouvriers nomment *Kis* : cette matière exposée au feu animé par l'air vital, a brûlé avec une flamme verte, en répandant une fumée blanche & une odeur

d'arsenic insupportable; il est resté un petit culot métallique encroûté d'une matière grisâtre, & qui s'est brisé très-aisément; il étoit blanc comme de l'argent dans son intérieur, & il présentait une cavité qui étoit remplie de petits cristaux métalliques; ce culot étoit très-attirable à l'aimant. On voit que le kis de Sainte-Marie-aux-Mines est une vraie pyrite arsenicale ferrugineuse, mais il seroit possible qu'il y entrât du cuivre ou du zinc, & la couleur verte de la flamme sembleroit l'annoncer.

Si cette substance étoit très-abondante & qu'on la trouvât en filon, elle mériteroit d'être analysée avec plus de soin pour bien connoître la nature des substances métalliques qui la composent.

Conséquences sur les substances métalliques.

Il résulte des expériences ci-dessus,

1.^o Que toutes les substances métalliques, à l'exception de la platine, sont volatiles au degré de feu que produit l'action de l'air vital; mais que la fixité de l'or & de l'argent est incomparablement plus grande que celle des autres métaux.

2.^o Que toutes les substances métalliques peuvent se diviser en deux classes, dont les unes, telles que la platine, l'or, l'argent & le mercure, sont incombustibles; les autres au contraire brûlent avec une flamme très-marquée.

3.^o Que la combustion du fer est sur-tout remarquable; qu'elle se fait avec un bouillonnement rapide qui lance au loin des étincelles exactement comme les étincelles d'artifice.

4.^o Que le courant d'air vital est un moyen très-commode pour coupler en très-peu de temps l'or & l'argent, puisque les métaux imparfaits brûlent & se dissipent à ce feu, tandis que les métaux parfaits y résistent beaucoup davantage; mais que ce moyen très-expéditif ne peut donner des résultats rigoureusement exacts, parce qu'une petite portion de l'or & de l'argent se dissipe pendant l'opération.



M É M O I R E

Sur une nouvelle Machine à électriser , qu'on peut regarder comme une véritable Pompe à feu électrique : cette machine étant construite de manière que son effet consiste uniquement à tirer le fluide électrique des corps , & à les électriser par-là négativement , ou par raréfaction.

Par M. L E R O Y.

J'AI déjà exposé tant de fois à l'Académie, la théorie des deux *électricités positive & négative*, ou par *condensation* & par *raréfaction* ; j'ai fait voir en tant d'occasions, avec quel succès elles rendent compte des principaux phénomènes électriques, que je crois qu'il seroit absolument superflu de revenir sur cette matière : je me contenterai seulement de faire remarquer à la Compagnie, qu'il y a déjà près de trente ans que j'ai dit & fait voir que si l'on avoit commencé par faire de l'*électricité positive*, ou de celle que donnent les machines ordinaires, c'étoit par un pur effet du hasard, & qu'on auroit pu également produire d'abord de l'*électricité négative*, si, tout restant d'ailleurs de même, on avoit isolé le couffin, au lieu d'isoler le conducteur ; ou qu'on eût, comme *Otto Guericke*, fait de l'électricité en frottant des globes de soufre : j'ajoutai à cette observation, que ce qu'on avoit prétendu en avançant que les phénomènes de l'*électricité négative* ne tenoient qu'à une électricité plus foible, étoit non-seulement sans aucun fondement, mais encore absolument contraire aux phénomènes. En effet, je fis voir alors, ainsi que je l'ai souvent montré depuis, que cette électricité étoit tout aussi forte que l'autre, c'est-à-dire, que les étincelles

des corps électrisés *négativement*, sont tout aussi vives & partent d'une aussi grande distance que celles des corps électrisés *positivement*. Cependant, comme les machines avec lesquelles j'avois fait ces expériences, n'avoient pas été disposées pour faire de l'*électricité négative* uniquement, j'ai pensé depuis, qu'il seroit utile & intéressant d'en construire une de façon qu'elle ne produisît que de cette espèce d'électricité, comme les machines ordinaires ne donnent que de l'*électricité positive*; j'ai cru que par-là on pourroit en rendre les effets plus considérables, & en faire plusieurs applications utiles qu'on ne connoissoit pas encore, sur-tout par rapport à l'électricité médicale. Cela me paroïsoit d'autant plus nécessaire, que toutes les machines, ou du moins celles qui étoient venues à ma connoissance, & avec lesquelles on avoit prétendu faire de l'*électricité négative* pour électriser des malades, étoient, il faut le dire, trop mal construites, pour en donner qui eût quelque degré de force, & qui fût propre par-là à nous faire connoître ce qu'on pouvoit attendre de cette électricité appliquée au corps humain. Une autre raison importante me déterminoit encore en faveur de la machine que je méditois, c'est qu'il ne devoit y avoir, par la nature de son effet, aucune électricité de perdue pour le conducteur; au lieu que dans les machines ordinaires il y en a toujours, parce que ce conducteur ne reçoit pas toute celle que le corps frotté enlève aux coussins; mais ceci demande une explication.

Lorsqu'on électrise à la manière ordinaire, soit avec un globe, comme on le faisoit autrefois, soit avec un cylindre, comme les Anglois le font aujourd'hui, soit enfin avec un plateau, comme nous le pratiquons actuellement, il faut, quand cette opération se fait avec le globe ou le cylindre, qu'ils aient fait l'un & l'autre une demi-révolution, ou à peu près, pour que la partie du verre frottée par le coussin ou par la personne qui en fait la fonction, arrive au conducteur & lui communique l'électricité dont elle est chargée: or, si ce globe ou ce cylindre est d'un certain diamètre, ou se meut avec trop de lenteur, il arrivera, pour peu que l'air

ne

ne soit pas bien sec, que la partie frottée de leur circonférence perdra une certaine quantité de son fluide électrique, avant qu'elle soit parvenue au conducteur, & par conséquent que ce sera autant de moins qu'il en recevra; cela est si évident qu'il est presque inutile de s'arrêter à le prouver: cependant je ne puis m'empêcher d'ajouter, pour montrer la certitude de cet effet, que dès que l'air est un peu humide, on ne peut faire avec ma machine (*a*) aux *électricités positive & négative*, l'extinction de ces deux *électricités* l'une par l'autre; car le plateau ayant perdu, avant d'arriver au conducteur de *l'électricité positive*, par cette humidité de l'air, une partie du fluide électrique qu'il avoit pompé de celui de *l'électricité négative* (au moyen des coussins), il se trouve par-là, que ce plateau ne pouvant en communiquer autant au premier, qu'il en a enlevé au second, l'équilibre ne peut être rétabli entre ces deux conducteurs; & par conséquent qu'on ne peut produire l'extinction des deux *électricités* dont je viens de parler: c'est ce que je ferai voir à l'Académie dans un moment, sur cette machine, si le temps est favorable; j'y ai fait faire une petite addition (*b*) par laquelle on prévient facilement cet effet qui empêche la démonstration de ce phénomène. Au reste, dans toutes les machines ordinaires, à globe &

(*a*) Cette machine à électriser que j'ai imaginée en 1771, & dont je lus la description à la rentrée de Pâques de l'année 1772, est décrite dans le volume de nos Mémoires de cette année; l'ancienneté de cette date fait que je ne puis m'empêcher d'observer ici qu'il vient de paroître une machine de M. Nairne, habile Artiste de Londres, propre à produire de même les deux *électricités*, & qui est construite en général de la même manière; elle n'en diffère réellement qu'en ce qu'elle a un cylindre, au lieu du plateau qui est dans la mienne: il me paroît en conséquence qu'on a eu tort de donner à cette machine le nom de

machine à électriser de M. Nairne, puisque, comme on vient de le voir, cette machine est toute semblable à celle que j'ai imaginée, fait exécuter, & rendue publique plus de dix ans auparavant.

(*b*) Cette addition consistoit dans un fil de laiton qui s'attachoit sur le conducteur de *l'électricité positive*, & qui, s'avancant circulairement du côté des coussins, alloit prendre l'électricité du plateau, avant qu'il eût fait sa demi-révolution, & lorsqu'il avoit seulement décrit un arc où je n'avois pas à craindre qu'il eût déjà perdu une partie du fluide électrique dont il s'étoit chargé dans le frottement des coussins,

à cylindre , avec lesquelles on fait de l'électricité positive , l'inconvénient dont je viens de parler est sans remède ; & plus ces globes & ces cylindres sont grands , plus cet inconvénient augmente. Et si les grandes machines ou celles qui ont de grands globes ou de grands cylindres , n'ont pas toujours des effets qui répondent à leurs dimensions , c'est en grande partie par cette raison ; car s'ils ne se meuvent pas fort vite , ce qui est le cas de tous ceux qu'on tourne à la main , les parties frottées perdent de leur électricité d'une manière assez sensible avant d'arriver aux conducteurs : il y a plus , c'est que souvent il est impossible de remédier à ce défaut , parce que dans plusieurs cas ou pour certaines espèces de verre , quand on les fait tourner avec trop de vitesse , leur électricité diminue , parce qu'ils s'échauffent trop. En vain , croiroit-on remédier à l'inconvénient dont il est question , en faisant approcher davantage le conducteur du coussin , parce que dans ce cas il perdrait de son électricité par sa trop grande proximité de ce coussin , ainsi que je l'ai prouvé dans mon Mémoire de 1753. Dans les machines à plateau , disposées à la manière ordinaire , une partie de cet inconvénient n'existe pas , parce que dans ces machines la partie frottée du plateau ne fait qu'un quart de révolution avant d'arriver au conducteur ; mais aussi on retrouve ici ce qui arrive aux conducteurs , des globes ou des cylindres , qu'on approche trop près des coussins , il y a de l'électricité qui se perd par leur voisinage (c). Or , la machine à plateau que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie , & qui est sous ses yeux , est , par sa construction , entièrement exempte de cet inconvénient des machines à globe , à cylindre , &c. car au premier instant où le frottement commence , à ce premier instant l'électricité

(c) Je dois observer cependant , relativement à ce que je viens de dire , que la méthode qui s'est introduite , de mettre un taffetas ciré qui part du coussin & s'étend à une certaine distance sur le plateau ou

sur le cylindre , prévient une partie de la perte du fluide électrique dont je viens de parler ; mais cet inconvénient n'en est pas moins un inhérent à cette manière de produire l'électricité positive avec le verre.

commence aussi, ou se manifeste dans le conducteur, c'est-à-dire, que quelque petit que soit l'arc qu'on fait parcourir au plateau, il suffit pour que les coussins & le conducteur qui communique bien exactement avec eux, soient électrisés : par-là il est évident que l'humidité de l'air ne peut se faire sentir dans cette machine qu'autant que cette humidité peut avoir action sur le verre pour le rendre moins susceptible d'électricité, ou sur le conducteur pour la lui dérober plus promptement ; or, en cela elle n'éprouve rien qui lui soit particulier, & que n'éprouvent toutes les autres. Mais il faut en venir à la description de cette machine que j'ai imaginée il y a déjà plusieurs années, mais qui n'a été faite que l'année passée pour le Cabinet de Physique du Roi à Passy.

Elle est composée d'une roue de près de cinq pieds de diamètre qui fait tourner une poulie de six pouces de rayon ou à-peu-près, qui est montée sur le même arbre que le plateau, & qui en est assez éloignée pour ne lui dérober que le moins d'électricité possible ; ce plateau a trois pieds de diamètre, il est porté, ou plutôt son arbre est soutenu par des colonnes de verre auxquelles sont accolées deux autres colonnes en arc-boutans, afin de leur donner plus de force pour résister aux ébranlemens causés par la rotation du plateau. Les coussins destinés à le frotter, sont placés à l'extrémité de son diamètre horizontal, & à l'opposite de la roue qui le fait tourner ; ces coussins sont portés par une forte colonne de verre afin qu'ils soient bien isolés ; ils sont mobiles autour de leur centre, si cela se peut dire, afin qu'on puisse les changer de position par rapport au sens dans lequel le plateau tourne, & par-là redonner une nouvelle force à l'électricité, quand la machine a été en action un certain temps, ainsi que je l'ai suffisamment expliqué, dans mon Mémoire de 1772. L'instant où la partie frottée du plateau sort de dessous les coussins, étant l'instant le plus critique, si cela se peut dire, ou le plus essentiel pour qu'elle soit électrisée avec le plus d'avantage, ou qu'elle en sorte le plus chargée qu'il est possible d'électricité, & l'action du

plateau tendant toujours à les faire bâiller, il y a au bord supérieur de chaque coussin deux vis, pour qu'en les serrant on les fasse bien appuyer dans cette partie sur ce plateau. De l'autre côté des coussins, & sur le même diamètre, on voit une pièce en forme de griffe qui s'avance horizontalement en embrassant les deux faces du plateau, mais sans les toucher; cette pièce porte des fils de laiton, on en verra l'usage dans un moment; elle est soutenue par une colonne de verre, qui n'est là uniquement que pour le cas où on voudroit faire de l'*électricité positive*; mais comme la machine ne peut donner la plus grande *électricité négative*, qu'en faisant cesser cet isolement, il y a une chaîne de cuivre qu'on attache à la griffe, pour transmettre incessamment au plancher toute l'électricité qu'apporte le plateau; afin de rendre même cet effet plus assuré, la chaîne est chargée en-bas d'un petit poids; il est presque inutile d'ajouter que pour empêcher que cette machine ne perde de l'électricité, la corde qui la fait mouvoir est de soie, & que tout ce qui est en verre est recouvert de cire d'Espagne.

J'ai fait tourner le plateau au moyen d'une roue, parce que j'ai constamment remarqué que quand on les fait tourner à la main, non-seulement on ne leur communique pas assez de vitesse, mais encore qu'on ne peut jamais les faire mouvoir aussi également ou uniformément, que quand on les fait tourner par une grande roue: je me suis servi d'un plateau, mais c'est parce que je n'ai pu avoir de cylindre bien fait, d'un diamètre assez considérable, car je l'aurois certainement préféré, non pas parce que les Anglois se servent de cylindre aujourd'hui, mais parce que cette forme est sans contredit la meilleure de toutes; on en sentira la raison dans un moment. Toutes les expériences nous ont appris que pour tirer d'un certain verre donné, le *maximum* d'électricité qu'il peut fournir, il faut qu'il tourne ou qu'il soit frotté avec une certaine vitesse: or, il est évident que dans les globes & dans les plateaux, s'il y a une partie qui se meuve avec la vitesse nécessaire pour qu'elle donne le plus d'électricité possible, il

n'y aura que celle-là , par la forme de ces globes & de ces plateaux , qui jouira de cet avantage ; au lieu que dans les cylindres , si une fois vous avez trouvé la vitesse propre aux verres dont ils sont formés , vous êtes sûr que cette vitesse conviendra à toutes les parties qui seront frottées , puisqu'elles seront toutes à la même distance de l'axe ; mais en voilà assez sur la construction de cette machine , il faut maintenant en expliquer l'effet : on le concevra sans peine.

La roue faisant tourner le plateau au moyen de la poulie , les coussins qui le frottent l'électrifient ; mais ils ne peuvent le faire qu'en lui fournissant une partie du fluide électrique qu'ils contiennent , ils en perdent donc à chaque instant ; or , puisqu'ils en perdent , ils en ont donc moins qu'ils n'en avoient auparavant , ou celle qui leur reste est donc plus raréfiée , ils seront donc électrisés par *raréfaction* ou *négativement* ; mais les parties du plateau revenant après une révolution , rapporteroient aux coussins l'électricité dont elles avoient été chargées précédemment , excepté celle qu'elles pourroient avoir perdue en traversant l'air , comme je l'ai observé plus haut ; or , en rendant par-là aux coussins à peu-près ce qu'elles leur avoient enlevé , ils se retrouveroient presque comme s'ils n'avoient pas été électrisés. La griffe dont j'ai parlé , sert à prévenir cet effet , parce que communiquant avec le plancher , au moyen de la chaîne & du petit poids , &c. elle enlève incessamment aux parties du plateau qui arrivent à elle en tournant , le fluide électrique dont elles étoient chargées ; par-là elles reviennent aux coussins , toujours dépouillées de celui qu'elles leur avoient enlevé , & par-là sont propres à leur en enlever de nouveau , & de cette manière les coussins étant fortement électrisés *négativement* ou par *raréfaction* , sont par-là dans le cas de tirer ou de pomper le fluide électrique du conducteur ou de tous les corps qui en approchent ; ainsi cette machine est par-là , comme je l'ai avancé , une véritable pompe à feu électrique ; & il résulte évidemment de sa construction , qu'au premier instant où on fait mouvoir le plateau , à ce premier instant , ainsi que je l'ai dit , les coussins deviennent électriques ;

d'où il suit que le conducteur avec lequel ils communiquent, est électrisé de même sur le champ & sans qu'il y ait la moindre électricité de perdue, comme cela arrive nécessairement dans les machines ordinaires : or, il est important d'observer que ceci prouve non-seulement ce que j'ai avancé, en disant que l'*électricité négative* n'est pas plus foible que l'*électricité positive*, mais encore qu'elle doit être plus forte par la manière dont on l'obtient avec le verre, puisque dans l'opération qui la produit, il n'y en a pas de perdue.

L'Académie va voir quel est le degré de force de cette machine, j'en ai obtenu souvent, quand le temps étoit favorable, des étincelles de plus de six pouces de long, quoique le centre du plateau & ses environs ne soient pas garnis de cire d'Espagne, pour empêcher le fluide électrique de se porter de l'arbre vers les coussins, & que je n'aie pas encore employé plusieurs autres petits moyens propres à en augmenter les effets.

Je pourrois ajouter beaucoup de choses sur cette nouvelle machine, & sur la nécessité d'adopter généralement cette disposition pour faire de l'électricité, parce qu'il n'y en a & ne peut jamais y en avoir de perdue : mais je crois en avoir assez dit pour faire sentir les avantages de sa construction, & l'utilité dont elle peut être, 1.^o pour électriser des malades négativement, ce qui n'a pas encore été fait, ainsi que je l'ai observé, avec une électricité assez forte ; 2.^o pour faire mieux connoître les phénomènes des corps qui n'acquièrent l'électricité que par la diminution du fluide électrique, qu'ils contenoient,

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Il faut regarder cette Planche comme divisée en deux parties.

Celle d'en bas qui représente toute la machine vue en perspective.

Et celle d'en haut qui fait voir en détail les différentes parties dont elle est composée.

Partie d'en bas, *Figure 1.*

PP est le plateau de verre.

CC sont les coussins avec leur ressort.

CD est le conducteur.

GG la griffe qui sert à enlever constamment au plateau le fluide électrique qu'il a pompé des coussins ; elle est armée de légers fils de laiton qui reposent ou flottent sur ce plateau, pour le toucher dans un grand nombre de points.

ch est la chaîne métallique qui y est attachée pour faire cesser l'isolement produit par la colonne ou le support de verre *f*.

S, S, S, S, S, S sont les supports de verre.

RR, grande roue qui, au moyen de la corde, fait tourner le plateau.

MM, manivelles servant à faire tourner la roue & placées sur son arbre, non à l'opposé l'une de l'autre, comme cela se pratique souvent, mais de manière qu'elles forment entr'elles un angle droit.

rr, poulie sur laquelle passe la corde, & qui est montée sur le même arbre que le plateau ; elle est censée vue à travers ce plateau.

LL, levier ou mécanique qui sert à tenir la corde toujours tendue au même degré : cet effet s'opère au moyen du poids *pp*, qui, entraînant le levier en en bas, fait que le large rouleau qu'il porte, appuie de même constamment sur la corde qui passe au-dessous, & par-là la tend toujours de la même façon ; si elle se relâche en augmentant le poids, on reproduit encore la même tension.

Partie d'en haut, *Figure 2 & suivantes.*

Le dessin des différentes parties de cette machine est si détaillé, qu'il suffira de les indiquer par les numéros des figures, sans en dire davantage.

Les figures 2, 3 & 4 représentent tout ce qui appartient aux coussins *CC*.

On voit dans la première de ces figures les trous *TTT*, dans lesquels entrent les vis qui servent à faire appuyer ces coussins contre le plateau.

Dans la troisième, on voit ces vis en place.

Et dans la quatrième, on voit le ressort *rr* sans les vis, qui sont représentées au-dessous.

La figure 5 représente la manière dont l'arbre du plateau est contenu dans les palliers.

Dans la figure 6, on voit comment la griffe est montée sur son support, le ressort des coussins est monté de même sur le sien.

On voit dans la même figure l'extrémité en crochet de la chaîne qu'on y pend pour faire cesser l'isolement de la griffe.

Enfin, on a représenté dans les figures 7 & 8, tout ce qui appartient à la mécanique, qui sert à tenir la corde toujours tendue au même degré.



Fig. 7.

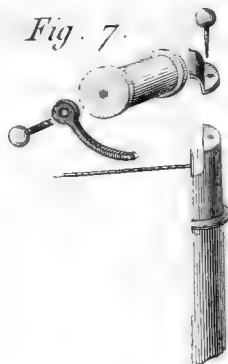


Fig. 5.

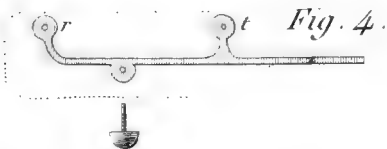


Fig. 4.

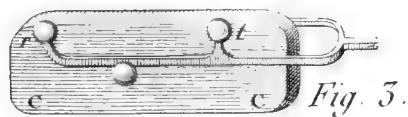


Fig. 3.

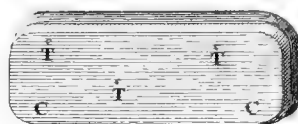


Fig. 2.

Fig. 1.

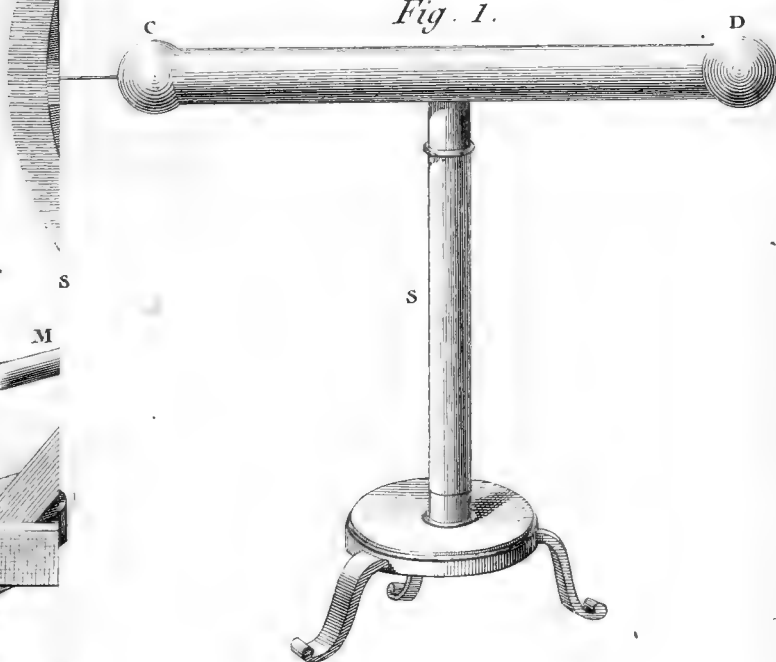
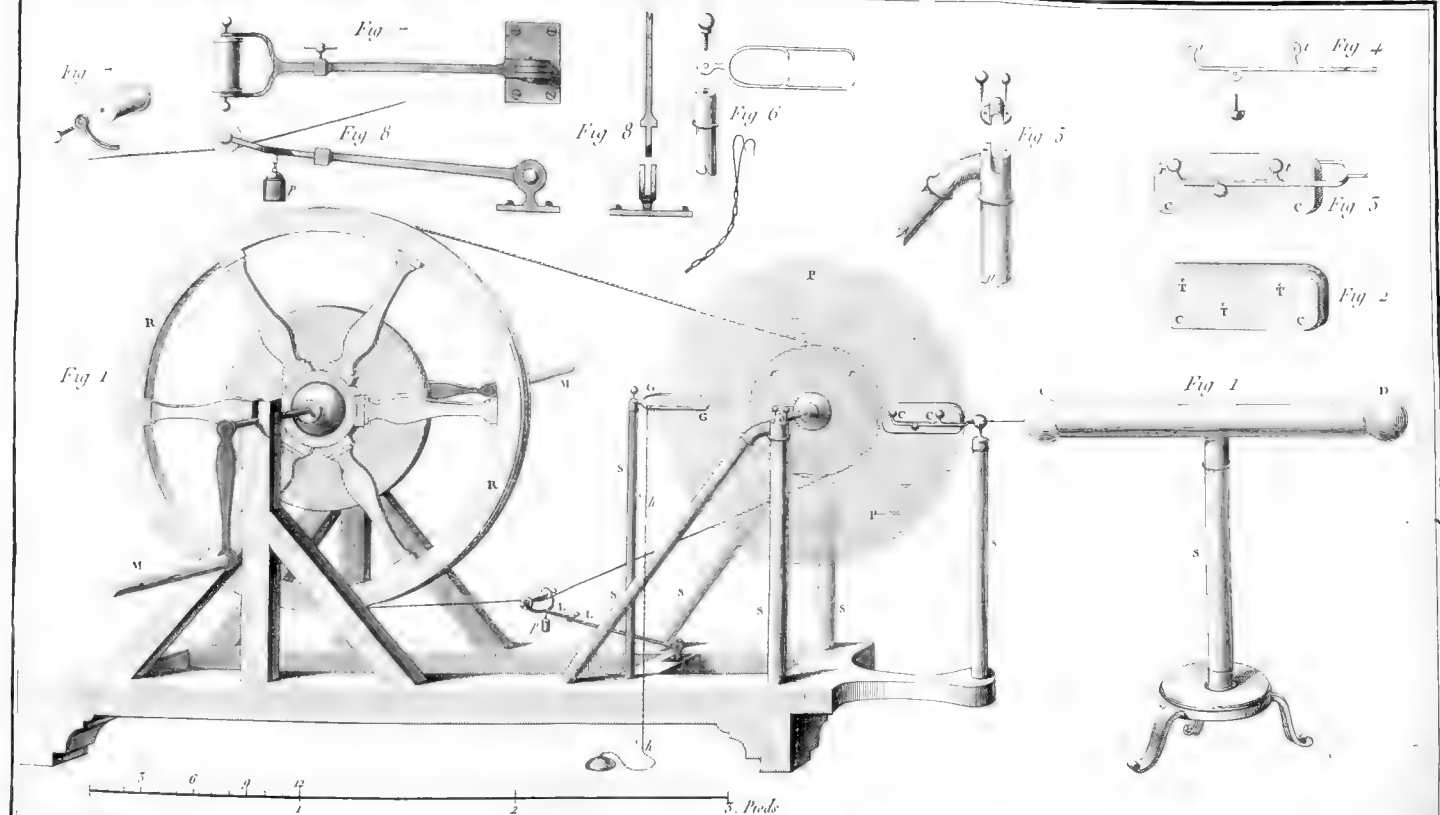


Fig. 1.



OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE,
DU 18 MARS 1783.

Faite au cabinet de Physique du Roi, à Passy.

Par M.^{rs} le Duc DE LA ROCHEFOUCAULD,
 l'Abbé ROCHON & MÉCHAIN.

Temps vrai.

Immerfious,

- | | |
|-----------------------|--|
| 7 ^h 41' 2" | Commencement de l'éclipse. |
| 7. 42. 55. | <i>Grimaldus</i> entre dans l'ombre. |
| 7. 44. 20. | <i>Idem</i> couvert. |
| 7. 51. 44. | <i>Mare humorum</i> entre dans l'ombre. |
| 7. 53. 46. | <i>Aristarchus</i> entre. |
| 7. 54. 10. | <i>Idem</i> à moitié. |
| 7. 54. 56. | <i>Idem</i> couvert |
| 7. 54. 36. | <i>Keplerus</i> à moitié. |
| 7. 56. 36. | <i>Schikardus</i> à moitié. |
| 8. 1. 56. | <i>Copernicus</i> entre. |
| 8. 3. 25. | <i>Idem</i> à moitié. |
| 8. 4. 41. | <i>Idem</i> tout dans l'ombre. |
| 8. 2. 47. | <i>Reinoldus</i> à moitié. |
| 8. 7. 54. | <i>Tycho</i> entre. |
| 8. 9. 7. | <i>Tycho</i> à moitié, & commencement d' <i>Ératosthènes</i> . |
| 8. 10. 7. | <i>Tycho</i> tout dans l'ombre. |
| 8. 10. 0. | <i>Mare nubium</i> toute entière. |
| 8. 13. 56. | <i>Plato</i> entre. |
| 8. 14. 40. | <i>Idem</i> à moitié. |
| 8. 15. 26. | <i>Idem</i> tout dans l'ombre. |
| 8. 17. 42. | <i>Manilius</i> entre. |
| 8. 18. 17. | <i>Idem</i> à moitié. |
| 8. 18. 51. | <i>Idem</i> couvert. |
- Mém. 1783.

Kkkk

Temps vrai.

Immersion.

- 8^h 18' 17" *Mare serenitatis* entre dans l'ombre.
 8. 21. 27. *Mare tranquillitatis* & *Menelaüs* entrent.
 8. 25. 8. *Plinius* à moitié.
 8. 27. 18. *Possidonius* à moitié.
 8. 28. 28. *Idem* tout couvert.
 8. 32. 28. *Mare fecunditatis* entre.
 8. 34. 0. *Proclus* à moitié.
 8. 35. 38. *Mare Crisum* entre dans l'ombre.
 8. 37. 13. *Idem* à moitié.
 8. 39. 7. *Idem* toute dans l'ombre.
 8. 41. 10. Immersion totale.

Émerfions.

10. 21. 43. On foupçonne que le bord de la Lune commence à fortir.
 10. 22. 34. Le bord de la Lune paroît très-clair.
 10. 25. 39. *Grimaldus* commence à fortir.
 10. 26. 26. *Idem* à moitié.
 10. 26. 49. *Idem* tout entier.
 10. 32. 12. *Mare humorum* commence à fortir.
 10. 35. 24. *Idem* & *Aristarchus* à moitié.
 10. 37. 15. *Keplerus* commence à fortir.
 10. 37. 40. *Idem* à moitié.
 10. 38. 15. *Idem* tout entier.
 10. 38. 45. *Mare humorum* quitte l'ombre.
 10. 44. 9. *Tycho* commence.
 10. 44. 53. *Idem* à moitié.
 10. 45. 46. *Idem* tout entier.
 10. 47. 18. *Copernicus* à moitié.
 10. 48. 6. *Idem* tout entier.
 10. 51. 35. *Plato* commence à fortir.
 10. 52. 35. *Idem* à moitié.
 10. 53. 15. *Idem* tout entier.
 10. 59. 5. *Mare serenitatis* commence.
 11. 1. 5. *Manilius* commence.
 11. 1. 44. *Idem* à moitié.

Temps vrai.

Émersions.

- 11^h 2' 2" *Manilius* tout entier.
 11. 4. 32. *Menelaüs*.
 11. 11. 6. *Mare serenitatis* en entier.
 11. 14. 58. *Proclus* à moitié.
 11. 18. 26. *Mare crisum* commence à sortir.
 11. 20. 28. *Idem* à moitié.
 11. 21. 36. *Idem* en entier.
 11. 22. 30. On estime la fin de l'Éclipse.
 11. 24. 10. L'éclipse est entièrement finie.

Il faut ajouter 14" aux temps marqués ci-dessus, pour les réduire au Méridien de l'Observatoire royal de Paris.

M. le Duc de la Rochefoucauld se servoit d'un télescope à réflexion; M. l'abbé Rochon d'une lunette achromatique de deux pieds & demi de foyer; & moi j'observois avec une lunette achromatique, dont l'objectif, composé de trois verres, & qui a 7 pieds de foyer, a été travaillé par M. l'abbé Rochon; l'oculaire adapté à cette lunette, n'amplifioit les objets que trente fois environ, & donnoit un champ de deux degrés.

Observation de la même Éclipse, faite à Toulouse par M. Darquier.

- 7^h 37' 40" Commencement.
 8. 38. 25. Immersion totale.
 10. 20. 40. Commencement de l'émerison.
 11. 20. 30. Fin.

M. Carouge a fait les observations suivantes chez moi, à Paris, 7" de temps à l'orient de l'Observatoire royal; il s'est servi d'un télescope d'un pied, qui appartient à M. le Président de Saron.

- 7^h 41' 10" Commencement.
 8. 41. 15. Immersion totale.
 10. 23. 22. Commencement de l'émerison.
 11. 22. 59. Fin.



O B S E R V A T I O N
DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE,
DU 10 SEPTEMBRE 1783.

*Comparée aux correspondantes faites à Bagdad,
à Yorck & à Laon.*

Par M. M É C H A I N.

<i>Temps vrai.</i>	<i>Immersion.</i>
9 ^h 36' 0"	La pénombre est sensible à la vue simple & par la lunette.
9. 55. 53.	Commencement de l'Éclipse.
9. 58. 33.	<i>Grimaldus</i> touche l'ombre & <i>Gallileus</i> est à moitié.
9. 59. 28.	<i>Grimaldus</i> tout couvert.
10. 2. 3.	<i>Aristarchus</i> entre dans l'ombre.
10. 2. 38.	<i>Idem</i> tout entré.
10. 4. 33.	<i>Keplerus</i> à moitié.
10. 7. 33.	<i>Mare humorum</i> entre.
10. 11. 18.	<i>Copernicus</i> entre.
10. 12. 5.	<i>Idem</i> à moitié.
10. 12. 57.	<i>Idem</i> tout entré.
10. 13. 16.	<i>Reinoldus</i> à moitié.
10. 13. 33.	<i>Mare humorum</i> en entier.
10. 15. 43.	<i>Bullialdus</i> à moitié.
10. 18. 37.	<i>Plato</i> touche.
10. 19. 2.	<i>Timocharis</i> entre.
10. 19. 18.	<i>Plato</i> à moitié.
10. 19. 52.	<i>Idem</i> & <i>Timocharis</i> en entier.
10. 21. 51.	<i>Archimedes</i> .
10. 22. 47.	<i>Mare imbrium</i> toute dans l'ombre.
10. 23. 13.	<i>Mare nubium</i> toute dans l'ombre.
10. 24. 14.	<i>Mare serenitatis</i> entre.
10. 25. 34.	<i>Tycho</i> & <i>Manilius</i> entrent.

Temps vrai.

Immersion.

- 10^h 26' 29" *Tycho* à moitié & *Manilius* en entier.
 10. 27. 19. *Tycho* tout entier.
 10. 28. 9. *Eudoxus* & *Aristoteles* à moitié.
 10. 29. 19. *Menelaüs* à moitié.
 10. 30. 9. *Mare tranquillitatis* entre.
 10. 30. 56. *Plinius* à moitié.
 10. 33. 19. *Possidonius* touche l'ombre.
 10. 34. 8. *Idem* à moitié.
 10. 34. 59. *Idem* tout entré.
 10. 35. 34. *Mare serenitatis* en entier.
 10. 37. 17. *Hermes* entre.
 10. 38. 24. *Idem* tout dans l'ombre.
 10. 39. 5. *Promontorium acutum*.
 10. 42. 28. *Proclus* à moitié.
 10. 43. 56. *Mare crisium* entre.
 10. 46. 34. *Idem* à moitié.
 10. 49. 11. *Idem* en entier.
 10. 50. 8. *Mare fecunditatis* entièrement dans l'ombre.
 10. 52. 56. *Langrenus*.
 10. 55. 15. Immersion totale.

Émerfions.

12. 35. 5. Le premier bord de la Lune fort de l'ombre.
 12. 36. 48. *Grimaldus* à moitié.
 12. 37. 25. *Idem* tout entier.
 12. 39. 16. *Gallileus* à moitié.
 12. 42. 50. *Aristarchus* commence à sortir.
 12. 43. 26. *Idem* tout entier, & *Mare humorum* commence.
 12. 45. 35. *Keplerus* à moitié.
 12. 46. 26. *Mare humorum* un peu plus de moitié.
 12. 49. 26. *Idem* sortie un peu plus tôt.
 12. 52. 21. *Copernicus* commence à sortir.
 12. 53. 21. *Idem* à moitié.
 12. 54. 28. *Idem* entièrement sorti.
 12. 56. 8. *Plato* commence.
 12. 57. 9. *Idem* en entier.

*Temps vrai.**Émerfions.*

- 12^h 57' 11" *Tycho* commence à fortir de l'ombre.
 12. 58. 46. *Tycho* en entier.
 13. 4. 6. *Mare serenitatis* commence à fortir.
 13. 7. 10. *Manilius* à moitié.
 13. 7. 46. *Idem* en entier.
 13. 10. 33. *Menelaüs* à moitié.
 13. 11. 15. *Dionysius*.
 13. 14. 21. *Plinius* tout entier.
 13. 16. 6. *Mare serenitatis* totalement sortie.
 13. 24. 6. *Proclus*.
 13. 24. 36. *Mare crifum* commence à fortir.
 13. 27. 6. *Idem* à moitié.
 13. 29. 36. *Idem* en entier.
 13. 31. 14. *Mare fecunditatis* totalement sortie.
 13. 34. 36. Fin de l'éclipse, estimée.
 13. 34. 56. Fin certaine.

J'ai fait ces observations sous un méridien qui est 6 à 7" de temps plus oriental que celui de l'Observatoire royal de Paris : je me suis servi d'une lunette achromatique dont l'objectif, composé de trois verres, a trois pieds & demi de foyer ; j'y avois appliqué un oculaire qui n'amplifioit les objets que quarante fois.

Observation de la même Éclipse à Bagdad, par M. l'abbé de Beauchamp, Grand-Vicaire de Babylone.

- 12^h 44' 04" Commencement de l'Éclipse.
 13. 42. 46. Immersion totale.
 15. 23. 56. Commencement de l'émerfion.
 16. 23. 11. Fin de l'Éclipse.

En comparant ces quatre phases aux correspondantes ci-dessus, on trouve par un milieu la différence des méridiens de 2^h 48' 13", ou 2^h 48' 20" en rapportant au méridien de l'Observatoire royal de Paris.

A York, par M. Pigott.

Temps vrai.

Immersions.

- 9^h 45' 32" *Gallileus* à moitié dans l'ombre.
 9. 57. 20. *Copernicus* entre dans l'ombre.
 9. 58. 55. *Idem* à moitié.
 10. 5. 7. *Plato* entre.
 10. 6. 18. *Idem* en entier.
 10. 11. 32. *Manilius* entre.
 10. 11. 57. *Tycho* entre.
 10. 13. 32. *Idem* couvert.
 10. 15. 41. *Menelaüs* à moitié.
 10. 17. 25. *Dionysus* entre.
 10. 24. 55. *Promontorium acutum* à moitié.
 10. 26. 17. *Fracastorius* entre.
 10. 27. 44. *Idem* couvert.
 10. 29. 0. *Proclus* à moitié.
 10. 30. 18. *Mare crisum* entre dans l'ombre.
 10. 35. 55. *Langrenus* entre.
 10. 37. 0. *Idem* couvert.

Émersions.

12. 21. 14. Commencement de l'émerſion, douteux.
 12. 21. 44. *Idem* plus certain.
 12. 23. 30. *Grimaldus* commence à fortir.
 12. 23. 59. *Idem* forti.
 12. 28. 59. *Aristarchus* à moitié.
 12. 39. 3. *Eratosthenes* à moitié.

L'air devient un peu brumeux.

12. 43. 6. *Tycho* commence à fortir.
 12. 44. 49. *Idem* forti.
 13. 21. 0. Fin de l'éclipse; douteuse.

En comparant neuf immerſions & ſix émerſions aux
 correſpondantes que j'ai obſervées, je trouve la différence
 des Méridiens, entre Yorck & l'Obſervatoire royal de Paris,
 de 13' 34" de temps.

630 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 A Laon par M.^{rs} Cotte, Correspondant de l'Académie;
 Tournant & de Cambronne.

Commencement des immersions des Taches.		Émerfions totales des Taches.		Commencement de l'éclipse & de l'émerfion.
10 ^h	0' 0"	12 ^h	41' 0"	
10.	5.	0.	12. 41. 35.	<i>Grimaldus.</i>
.....			12. 48. 49.	<i>Aristarchus.</i>
10.	9.	56.	12. 51. 44.	<i>Keplerus.</i>
10.	16.	52.	12. 59. 46.	<i>Copernicus.</i>
10.	31.	30.....	<i>Tycho.</i>
.....			13. 13. 26.	<i>Manilius.</i>
10.	46.	16.	13. 18. 26.	<i>Cleomedes.</i>
10.	48.	34.....	<i>Mare crisum.</i>
.....			13. 34. 46.	<i>Langrenus.</i>
11.	0.	23.	13. 40. 0.	Immersion totale & fin de l'éclipse.

Le commencement & la fin avec six immersions & six émerfions comparées aux correspondantes à Paris, donnent la différence des Méridiens, entre Laon & l'Observatoire royal de Paris, de 5' 29" de temps; cette différence est de 5' 10" par les triangles de la France.



OCCULTATIONS

D E

QUELQUES ÉTOILES DES PLÉIADES,

OBSERVÉES À PARIS LE 9 FÉVRIER 1783,

*Et comparées aux correspondantes observées à Bude,
à Drontheim & à Bagdad.*

Par M. M É C H A I N.

LE temps a été très-défavorable à Paris, la Lune n'a paru que par intervalles, de sorte que je n'ai pu observer aucune des immersions, je n'ai vu que les trois émerfions suivantes.

Temps vrai.

6^h 50' 45" Émerfion de *Mérove* de dessous le bord éclairé de la Lune. *Bonne observation.*

8. 22. 52. Émerfion d'*Atlas*, douteuse à 4 ou 5".

8. 38. 1. Émerfion de *Pleyone*, assez bonne observation.

J'observois à l'hôtel de Noailles, sous une latitude de 48^d 51' 59", & 2" $\frac{1}{2}$ de temps à l'occident de l'Observatoire royal.

M. Messier a vu l'immersion de *Mérove* à 5^h 32' 59" $\frac{1}{2}$, temps vrai à l'hôtel de Clugni, ou 5^h 32' 56" $\frac{1}{2}$, Méridien de l'hôtel de Noailles; je me suis servi de cette immersion, & de l'émerfion de la même étoile que j'ai observée, pour déterminer la conjonction vraie de la Lune avec *Mérove*, & l'erreur des Tables. Voici les principaux élémens de la Lune qui m'ont été communiqués par M. Cagnoli, il les a calculés sur les Tables de Mayer, qui sont insérées dans la deuxième édition de l'*Astronomie de M. de la Lande*.

Mém. 1783.

LIII

à 5 ^h 47' 23",0	à 8 ^h 52' 41",0	Temps moyen.
— 14. 40,0	— 14. 40,1	Équation du temps.
1 ^r 26 ^d 27. 50,0	1 ^r 27 ^d 59. 45,5	Long. vraie ☾ par les tables.
29. 45,9	29. 44,3	Mouv. horaire en longit.
4. 23. 57,9	4. 28. 16,9	Latitude vraie ☾, boréale.
1. 25,3	1. 21,4	Mouv. horaire en latitude.
54. 23,1	54. 21,0	Paral. horif. ☾ à Paris.
29. 42,0	29. 40,9	Diamètre horizontal ☾.

La longitude apparente de *Mérove*, selon le Catalogue de Mayer, étoit pour cette époque de 1^r 26^d 40' 24",2 ; & la latitude apparente de 3^d 56' 4",4, en ayant égard à la diminution de l'obliquité de l'écliptique, depuis 1756 jusqu'en 1783, à raison de 33" $\frac{1}{2}$ en un siècle.

D'après ces élémens, & en supposant l'aplatissement de la Terre de $\frac{1}{230}$, l'inflexion des rayons de 3" $\frac{1}{2}$, je trouve que la conjonction vraie de la Lune avec *Mérove* a eu lieu à 5^h 58' 58" $\frac{1}{2}$, temps vrai du Méridien de l'hôtel de Noailles, ou 5^h 59' 0", Méridien de l'Observatoire royal; la Lune ayant une latitude vraie, corrigée de 4^d 23' 50",8, les Tables de Mayer donnent la latitude trop grande pour cet instant de 25",7, & la longitude trop avancée de 28 secondes.

A Bude, par M. l'Abbé Weiff.

Temps vrai.

7^h 16' 53",5. Immersion de *Mérove*.

8. 19. 17,8. Émergence de *Mérove*.

8. 0. 22,0. Immersion d'*Alcyone*.

9. 16. 5,0. Émergence d'*Alcyone*.

Longitude apparente d'*Alcyone* 1^r 26^d 57' 54",2; latitude apparente 4^d 1' 44",4.

La latitude de l'Observatoire de Bude est de 47^d 29' 44", & sa longitude environ 1^h 6' $\frac{1}{2}$ de temps à l'orient de Paris.

Par l'immersion & l'émergence de *Mérove*, je trouve que la conjonction

vraie ☾ avec cette Étoile, est arrivée à $7^h \ 5' \ 32''$, temps vrai à Bude;
Mais on l'a déterminée ci-dessus à. . $5. \ 59. \ 0.$, à l'Obs. de Paris.

Donc, différ. des Mér. de Paris & Bude $1. \ 6. \ 32.$

Cette longitude paroît devoir approcher d'autant plus de la véritable, que l'erreur des Tables de la Lune en latitude, qui est de $25''{,}7$, par l'observation de Paris, se trouve de $26''{,}0$ par celle de Bude; & que plusieurs immersions & émerfions du premier satellite de Jupiter, observées ces années dernières à Bude, comparées aux correspondantes que j'ai observées à Paris, donnent $1^h \ 6' \ 35''$.

L'immersion & l'émerfion d'*Alcyone*, donnent la conjonction vraie de la Lune avec cette Étoile à $7^h \ 41' \ 6'' \frac{1}{2}$, temps vrai à Bude, ou $6^h \ 34' \ 34'' \frac{1}{2}$ à Paris, & l'erreur des Tables en latitude de $23''{,}6$.

A Drontheim par M.^{rs} Rick & Wibe, Officiers Danois, chargés par le Gouvernement de faire des observations astronomiques, pour rectifier les Cartes des côtes du Danemarck & de la Norvège.

à $7^h \ 14' \ 31''$ Temps vrai, immersion d'*Alcyone*.

8. $17. \ 45.$ Émerfion douteuse d'*Alcyone*.

Ces Messieurs ont déterminé la latitude du lieu où cette occultation a été observée, de $63^d \ 25' \ 47''$; le Pere Hell & M. Bugge l'ont observée de $63^d \ 26' \ 8''$, au Temple de Sainte-Marie, qui est 15 secondes plus Nord.

L'immersion & l'émerfion d'*Alcyone*, combinées ensemble, donnent la conjonction vraie ☾ avec cette Étoile à $7^h \ 6' \ 46''$ t. vr. Drontheim. Elle a été déterminée ci-dessus à. . . $7. \ 41. \ 6. \ \frac{1}{2}$ à Bude.

Ainsi Drontheim seroit à l'occ. de Bude $34. \ 20. \ \frac{1}{2}$,

Ou à l'Orient de Paris de. $32. \ 12.$

Mais comme l'émerfion est marquée douteuse à Drontheim, ce qui paroît d'ailleurs, puisque l'erreur des Tables en latitude, qui a été trouvée de $23''{,}6$, soustractive par l'observation

de Bude, est de $1''{,}5$ additive par celle de Drontheim; il vaut mieux chercher le temps de la conjonction dans ce dernier lieu, par la seule immersion qui s'est faite sous le bord obscur de la Lune, & en corrigeant la latitude de la Lune, selon l'observation de Bude: on trouve alors la conjonction vraie à Drontheim, à $7^h\ 6' 6''$, & la différence des Méridiens avec Paris, de $3\ 1' 32''$ de temps, ou en degrés, $7^d\ 53'$.

A Bagdad, par M. l'Abbé de Beauchamp, Correspondant de l'Académie.

M. de Beauchamp qui est muni de tous les instrumens nécessaires pour faire de très-bonnes observations relatives à la Géographie, & qui a toutes les connoissances & le zèle qu'on peut désirer, a déterminé la latitude de Bagdad, de $33^d\ 21' 46''$; il a fait dans ce même lieu un assez grand nombre d'observations propres à en fixer la longitude, nous avons déjà rapporté celle de l'éclipse de Lune du 10 Septembre 1783, dont nous avons conclu la différence des Méridiens entre Bagdad & Paris, de $2^h\ 48' 20''$; voici plusieurs occultations des Pléiades que M. de Beauchamp a observées le 9 Février de la même année, je ne rapporterai que celles qui m'ont paru les plus exactes & que j'ai calculées.

à $8^h\ 54' 13''$ Temps vrai, immersion de *Celeno*.

9. 36. 15. Immersion de *Maïa*.

10. 48. 0. Émerfion de *Maïa*.

10. 51. 41. Immersion d'*Alcyone*.

11. 12. 48. Émerfion de *Maïa*.

Selon le Catalogue de Mayer, on a, pour le 9 Février 1783, la longitude apparente de *Celeno*, de $1^f\ 26^d\ 24' 32''{,}2$; la latitude apparente de $4^d\ 20' 36''{,}4$; celles de *Maïa*, de $1^f\ 26^d\ 39' 12''{,}2$, & $4^d\ 22' 6''{,}4$.

L'immersion & l'émerfion d'*Alcyone* combinées ensemble, donnent la conjonction vraie de la Lune avec cette Étoile

à Bagdad, à $9^h 21' 52''$, & la différence des Méridiens avec Bude, de $1^h 40' 45'' \frac{1}{2}$, ou avec Paris de $2^h 47' 18''$, & l'erreur des tables en latitude, de 17 secondes $\frac{1}{2}$, au-lieu de 23 secondes $\frac{1}{2}$, que j'ai trouvées par l'observation de Bude. Cette différence de l'erreur des Tables en latitude, annonce qu'une des deux observations de Bagdad est incertaine; mais comme les émerfions se faisoient de dessous le bord éclairé de la Lune, on doit supposer que les immersions qui se faisoient sous le bord obscur, ont été observées plus exactement; & d'ailleurs il arrive souvent de manquer l'instant précis d'une émerfion, lorsqu'on ne fait pas, à très-peu-près, à quel point du disque de la Lune l'étoile doit sortir. J'ai donc préféré l'immersion, & ayant corrigé la latitude de la Lune selon l'observation de Bude, j'ai trouvé par la seule immersion à Bagdad,

La conjonction vraie à..... $9^h 22' 44''$.

Et la différence des Méridiens avec Paris, de... $2. 48. 10$.

En opérant de même pour l'immersion de *Celena*, & comparant la longitude de la Lune qui en résulte, à celle conclue par l'immersion & l'émerfion de *Méropé*, à Paris, je trouve

La différence des Méridiens de..... $2^h 47' 46''$.

L'immersion de *Maïa* calculée de même, donne... $2. 48. 9$.

M. de Beauchamp a encore observé en 1783, un assez grand nombre d'éclipses des satellites de Jupiter, voici celles du premier,

Avril	14 à	$16^h 33' 14''$	Immersion du premier.
	30	$14. 51. 15$	Immersion.
Mai	23	$15. 0. 31$	Immersion.
Juin	15	$15. 5. 59$	Immersion.
	24	$11. 26. 20$	Immersion.
	29	$13. 18. 52$	Immersion.
Août	11	$8. 32. 30$	Émerfion du premier.
	18	$10. 29. 7$	Émerfion.
	25	$12. 26. 24$	Émerfion.
	27	$6. 55. 7$	Émerfion.
Septembre	3	$8. 53. 1$	Émerfion.

J'ai observé à Paris l'immersion du 15 Juin, à $12^h 17' 47''$, temps vrai, méridien de l'Observatoire royal; l'émergence du 18 Août, à $7^h 40' 44''$; celle du 25 Août, à $9^h 37' 47''$: ces observations comparées à celles de Bagdad, donnent, par un milieu, la différence des méridiens de $2^h 48' 24''$. En corrigeant les Tables par les observations faites à Paris dans les temps les plus voisins de celles de Bagdad, qui n'ont point eu de correspondantes directes, je trouve, par un milieu, entre les résultats des six immersions & des cinq émergences, la différence des méridiens entre Bagdad & Paris, de $2^h 48' 17$ à $18''$.

Les trois immersions des Pléiades rapportées ci-dessus, donnent par un milieu $2^h 48' 2''$

On a trouvé par l'éclipse de Lune 2. 48. 20.

Le milieu de toutes ces déterminations sera donc . . . 2. 48. 13.

Pour la différence des méridiens de Bagdad & de

Paris, ou en degrés $42^d 3. 20.$

Cette longitude doit être très-près de la vraie, elle est suffisamment exacte pour la Géographie; la petite incertitude qui peut encore y rester, sera bientôt levée par les observations que M. de Beauchamp continue de faire à Bagdad. Il a déterminé la déclinaison de l'aiguille aimantée en 1783, de $9^d 30'$ nord-ouest,



*OBSERVATIONS
DES ÉCLIPSES DU SOLEIL,
DES 14 JUIN 1779 ET 17 OCTOBRE 1781,
Faites à Paris; avec la comparaison de celle de 1779
aux Correspondantes à Vienne, à Prague
& à Kongsvinger en Norwège.*

Par M. MÉCHAIN.

J'OBSERVAI l'Éclipse du 14 Juin 1779, conjointement avec M. le Duc d'Ayen, & dans son Cabinet de Physique à l'hôtel de Noailles, sous la latitude de $48^{\text{d}} 51' 59''$, & $1'' \frac{1}{2}$ de temps à l'occident de l'Observatoire royal.

M. le Duc d'Ayen se servoit d'une lunette achromatique, dont l'objectif, composé de trois verres & de trois pieds & demi de foyer, a été travaillé par M. de Létang; & moi je faisois usage d'une semblable lunette, qui a été faite par le sieur Carrochez.

Le ciel fut couvert jusqu'à $8^{\text{h}} 20'$ environ, que le Soleil parut éclipé à travers les nuages, mais si peu de temps que je ne pus point mesurer la quantité de l'Éclipse ou la distance des cornes: huit à dix minutes avant la fin, le Soleil parut plus clairement, & au temps même de cette dernière phase, il étoit parfaitement net.

M. le Duc d'Ayen détermina la fin à.. $8^{\text{h}} 44' 5'' \frac{1}{2}$, temps vrai au matin;
je l'observai à..... $8. 44. 6'' \frac{1}{2}$,

nous vîmes très-distinctement des inégalités au bord de la Lune.

Mon observation réduite au méridien de l'Observatoire royal, donne $8^{\text{h}} 44' 8''$; mais comme le milieu entre quatre observations est $8^{\text{h}} 44' 11''$, j'adopterai cette quantité pour le temps vrai de la fin de l'Éclipse à l'Observatoire.

à Prague, M. l'abbé Zéno observa le commencement à $8^h 36' 7''$, la fin à $9^h 35' 10''$; la latitude est de $50^d 5' 47''$.

à Vienne, M. Sambach observa le commencement à $8^h 51' 56''$, la fin à $9^h 31' 21''$; latitude $48^d 12' 36''$.

Au château de Kongsvinger en Norwege, M.^{rs} Rick & Wibe observèrent la fin à $9^h 59' 45''$, & la latitude $60^d 12' 11''$.

Pour calculer ces observations, j'ai fait usage des Tables du Soleil de la Caille & de celles de la Lune de Mayer, qu'on trouve dans la seconde édition de l'Astronomie de M. de la Lande: j'ai diminué le diamètre du Soleil de 6 secondes, le demi-diamètre de la Lune de 3 secondes & demie pour l'inflexion des rayons, & j'ai supposé l'aplatissement de la Terre d'un deux-cents-trentième.

Les observations de Prague m'ont donné l'erreur des Tables de la Lune, en latitude, de $14''$, 3 en excès; par les observations de Vienne, l'erreur est de $18''$, 2 dans le même sens: en corrigeant la latitude de cette dernière quantité, les observations de Vienne, comparées à celle de Paris, donnent la différence des méridiens de $56' 26'' \frac{1}{2}$. Je me suis assuré par plusieurs autres éclipses de Soleil & par des occultations d'Étoiles, que Vienne n'est que $56' 6''$ à l'orient de Paris, je soupçonne que le commencement de l'Éclipse du 14. Juin 1779 a été vu un peu trop tard à Vienne. Si l'on augmente l'erreur des Tables en latitude de $0''$, 8 seulement, on trouve $56' 6''$ entre Paris & Vienne par la fin de l'Éclipse observée dans ces deux lieux; & comme je crois cette détermination très-exacte, j'ai comparé la fin à Paris aux autres observations, en diminuant la latitude de la Lune de $19''$, 0; ce qui m'a donné les différences des méridiens comme il suit;

Prague. {	Commencement	$48' 45''$ <i>oriental</i> ,
	Fin	$47. 56.$ <i>oriental</i> .
Château de Kongsvinger, par la fin $38' 31''$ <i>oriental</i> ,		

Mon principal objet ayant été de déterminer la longitude de Kongsvinger, je dois remarquer qu'une variation de 4 à 5 secondes sur la latitude de la Lune, ne produit pas plus de

de 5 à 6 secondes de temps sur la différence des méridiens entre ce lieu & Paris.

Enfin, en adoptant la correction de la latitude de la Lune, de 19 secondes soustractives, on a la conjonction vraie à Paris, le 13 Juin, à $21^h 11' 18'' \frac{1}{2}$ temps vrai, dans $2^f 23^d 2' 30''$, latitude vraie de la Lune, $1^d 4' 0'' \frac{1}{2}$, erreur des Tables de la Lune en longitude, 12 secondes & demie additive.

Eclipse du Soleil, le 17 Octobre 1781.

Je fis les observations suivantes chez moi, vieille rue du Temple, sous la latitude de $48^d 51' 46''$, & 6 secondes & demie de temps à l'orient de l'Observatoire royal. L'objectif de la lunette dont je me servois, est composé de trois verres, il a trois pouces & demi d'ouverture & trois pieds & demi de foyer : les distances des cornes & les parties du Soleil non éclipsées ont été mesurées avec un très-bon micromètre à fil ; la fin a été observée avec un grossissement de cent vingt fois.

Le ciel avoit été très-serein pendant toute la nuit, & j'avois observé à 4 heures du matin la Comète qui paroïssoit alors ; mais au commencement du jour il survint un brouillard fort épais, que le Soleil ne perça que vers 7 heures un quart, il y avoit alors près de 20 minutes que l'Eclipse étoit commencée ; j'observai les distances des cornes & les parties éclairées du Soleil.

Distances des Cornes.

Avant le milieu de L'ÉCLIPSE.		Après le milieu de L'ÉCLIPSE.	
<i>Temps vrai.</i>		<i>Temps vrai.</i>	
7 ^h 16' 36"	19' 48",4	7 ^h 58' 26"	24' 11",7
7. 18. 0	20. 22,2	8. 2. 11	23. 49,4.
7. 19. 2	20. 41,5	8. 5. 1	23. 5,9.
7. 20. 18	21. 13,4	8. 7. 21	22. 22,2.
7. 21. 58	21. 58,1	8. 9. 14	21. 58,1.
7. 23. 46	22. 22,2	8. 11. 44	21. 13,4.
7. 25. 24	23. 5,9	8. 14. 58	19. 48,4.
7. 28. 32	23. 49,4	8. 17. 5	18. 53,1.
7. 31. 21	24. 22,3	8. 18. 18	18. 14,3.
7. 34. 39	24. 48,5	8. 19. 50	17. 25,9.
7. 40. 18	25. 26,3		

Parties du Soleil non éclipsées vers le temps de la plus grande phase.

7 ^h 43' 43"	19' 51",2.
7. 44. 36	19. 37,6.
7. 46. 3	19. 38,6.
7. 47. 53	19. 38,6.
7. 52. 7	19. 51,2.
7. 54. 20	20. 3,8.

Fin de l'Éclipse, très-exacte, à 8^h 33' 1".

M É M O I R E

SUR LA COMÈTE DE 1783.

Par M. M É C H A I N.

J'AI découvert cette Comète le 26 Novembre, vers neuf heures du soir, elle étoit placée sur une des pattes de derrière du Bélier, & près de l'étoile de cette constellation qui est désignée par le $n.^o$ 31 dans le catalogue de Flamstéed : la Comète étoit très-foible, entourée d'une nébulosité assez diffuse, on n'y distinguoit point de noyau, si ce n'est que le centre étoit un peu plus lumineux que le reste, & l'on ne voyoit aucune apparence de queue : le diamètre de toute la nébulosité ne surpassoit point une minute & demie ; enfin il étoit impossible de l'apercevoir à la vue simple.

J'ai commencé par comparer la nouvelle Comète à plusieurs petites Étoiles qui en étoient très-voisines, mais j'ai abandonné ces premières observations, ayant remarqué que je déterminerois plus exactement la position de la Comète par les étoiles, $n.^os$ 31 & 38 du Bélier ; voici ces observations ; les ascensions droites ont été déterminées par la différence des passages de la Comète & des Étoiles aux trois fils horaires d'un micromètre ; & les déclinaisons, par les différences avec les Étoiles mesurées avec le fil curseur du même micromètre.

Le 26 Novembre à $10^h 6' 48''$ de temps moyen, la Comète étoit plus occidentale que l'Étoile, $n.^o$ 31 du Bélier, de $1^d 24' 48''$, & plus boréale de $31' 53''{,}7$; donc ascension droite apparente, $34^d 48' 34''{,}4$, & déclinaison boréale, $12^d 2' 3''{,}3$.

Le même jour, au même instant, la Comète étoit à l'occident du $n.^o$ 38 du Bélier, de $3^d 29' 34''{,}5$, & plus

M m m m ij

boréale de $30^{\circ} 48''$; ainsi son ascension droite étoit de $34^{\text{d}} 48' 47''$, 7, & sa déclinaison de $12^{\text{d}} 2' 31''$, 4: je crois cette observation préférable à la première; dans cette observation & dans les suivantes on a appliqué l'aberration & la nutation aux positions moyennes des Étoiles.

Le 26 Novembre à $14^{\text{h}} 2' 30''$, temps moyen, la Comète étoit à l'occident de l'étoile *f* du Taureau, de $15^{\text{d}} 3' 43''$, & plus nord de $3' 57''$; d'où j'ai conclu l'ascension droite de $34^{\text{d}} 41' 0''$, 6, & la déclinaison de $12^{\text{d}} 15' 9''$; ainsi je fus assuré dès la première nuit, du mouvement de la Comète & de sa direction.

Le 27 à $11^{\text{h}} 57' 20''$, temps moyen, la Comète étoit plus orientale que la 104^{e} étoile des Poissons, de $12^{\text{d}} 0' 20''$, 5, & plus nord de $9' 43''$; donc ascension droite, $33^{\text{d}} 56' 2''$, 5; déclinaison boréale, $13^{\text{d}} 20' 51''$, 5.

Le 28 à $9^{\text{h}} 59' 29''$, différence d'ascension droite avec la 19^{e} du Bélier $+ 2^{\text{d}} 52' 32''$, & en déclinaison $+ 11' 18''$; ainsi l'ascension droite de la Comète étoit de $33^{\text{d}} 12' 23''$, 5, sa déclinaison boréale, $14^{\text{d}} 27' 3''$, 3.

Le 29 à $8^{\text{h}} 47' 49''$, temps moyen, la Comète précédoit θ du Taureau, en ascension droite, de $31^{\text{d}} 35' 40''$, 6, & elle passoit plus au nord de $3' 31''$; donc son ascension droite apparente étoit de $32^{\text{d}} 28' 28''$, 3, & sa déclinaison $15^{\text{d}} 31' 46''$.

Le même jour à $12^{\text{h}} 22' 52''$, temps moyen, la Comète étoit plus orientale que la 4^{e} du Bélier, de $8^{\text{d}} 14' 5''$, 8, & plus sud de $9' 13''$, 9; ainsi son ascension droite étoit de $32^{\text{d}} 21' 45''$, 2, & sa déclinaison boréale de $15^{\text{d}} 43' 10''$, 7.

Le 1.^{er} Décembre à $12^{\text{h}} 7' 37''$, temps moyen, différence en ascension droite avec γ du Bélier $+ 5^{\text{d}} 27' 28''$, 6, & en déclinaison $- 16' 59''$; ce qui donne l'ascension droite de la Comète, de $30^{\text{d}} 53' 23''$, & la déclinaison $17^{\text{d}} 56' 55''$, 3.

Le 2 Décembre à $7^h 37' 57''$, temps moyen, la Comète précédoit 1.0 du Bélier, de $1^d 13' 4''$, & elle étoit moins boréale de $3' 54''.5$; d'où j'ai conclu l'ascension droite de $30^d 18' 41''.7$, & la déclinaison de $18^d 50' 9''.2$: le mouvement de la Comète se ralentissoit de jour en jour, & elle devenoit fort difficile à voir lorsque j'éclairais les fils du micromètre.

Le mauvais temps & ensuite la grande lumière de la Lune qui fut pleine le 8 Décembre au soir, m'empêchèrent pendant huit jours d'observer la Comète; mais je l'ai retrouvée & observée le 11 au soir avant le lever de la Lune, elle n'étoit pas sensiblement diminuée depuis le 2, mais toujours extrêmement foible & difficile à observer.

Le 11 à $5^h 58' 49''$, temps moyen, la Comète étoit $112' 24''.2$ à l'occident de l'étoile α du grand triangle, & $74' 34''.6$ moins boréale; donc ascension droite, $24^d 59' 56''.2$, déclinaison boréale $27^d 16' 58''.4$. Le même soir à $6^h 40' 49''$, temps moyen, la Comète précédoit α du petit triangle, de $6^d 37' 45''$, & elle passoit $20' 38''$ au sud; ainsi son ascension droite apparente étoit de $24^d 59' 16''.4$, & sa déclinaison $27^d 17' 54''.4$.

Le 12 Décembre à $5^h 54' 17''$, temps moyen, différence en ascension droite avec α du grand triangle — $40' 21''.6$, & en déclinaison — $25' 47''.7$; d'où j'ai conclu l'ascension droite de la Comète, de $24^d 31' 59''$, & la déclinaison $28^d 5' 45''.3$.

Le 13 à $6^h 20' 46''$, temps moyen, la Comète étoit plus occidentale que l'étoile α du grand triangle, de $1^d 7' 3''.5$, & plus boréale de $22' 16''.5$; donc son ascension droite étoit de $24^d 5' 17''$, & la déclinaison $28^d 53' 49''.5$.

Le 14 à $6^h 28' 15''$, temps moyen, différence en ascension droite avec δ d'Andromède + $16^d 42' 14''$, & en déclinaison — $1' 56''$; j'en ai déduit l'ascension

droite de la Comète, de $23^{\text{d}} 39' 24'',5$, & la déclinaison $29^{\text{d}} 38' 57''3$.

Le 18 à $6^{\text{h}} 51' 13''$, temps moyen, différence en ascension droite avec π d'Andromède $+ 15^{\text{d}} 50' 20'',7$, en déclinaison $- 3' 44'',6$; ce qui donne l'ascension droite de la Comète, de $22^{\text{d}} 11' 19'',6$, & la déclinaison de $32^{\text{d}} 28' 10''$.

Le 19 à $10^{\text{h}} 19' 48''$, temps moyen, la Comète précédoit δ du triangle de $9^{\text{d}} 8' 3'',6$, & elle étoit exactement sur le même parallèle; ainsi son ascension droite étoit alors de $21^{\text{d}} 51' 4'',\frac{1}{2}$, & sa déclinaison $33^{\text{d}} 13' 45'',\frac{1}{2}$; la Comète étoit beaucoup diminuée & très-difficile à observer.

Le 21 Décembre, j'observai la Comète pour la dernière fois à $6^{\text{h}} 0' 42''$, elle étoit $6^{\text{d}} 54' 53''$ plus orientale que β d'Andromède, & $6' 57'',\frac{1}{2}$ moins boréale; d'où j'ai conclu son ascension droite apparente de $21^{\text{d}} 20' 25'',3$, & sa déclinaison boréale de $31^{\text{d}} 21' 31''$.

Les positions des Étoiles qui ne se trouvent point dans les Catalogues de la Caille, Bradley & Mayer, ont été établies d'après les observations que M. le Paute d'Agelet en a faites à son grand quart-de-cercle mural.

Observations faites à York.

Le 30 Novembre, je reçus une lettre de M. Pigott le fils, par laquelle il m'annonçoit qu'il avoit découvert cette Comète à York le 19 Novembre; voici les premières observations qu'il m'envoyoit; j'y joins celle du 24 du même mois qu'il m'a communiquée depuis. M. Pigott a suivi la Comète jusqu'au 3 Décembre; les autres observations, ainsi que celles de M. Goodricke son ami, sont consignées dans le volume des Transactions Philosophiques pour l'année 1784.

Le 19 Novembre, à $11^{\text{h}} 15'$, temps moyen, réduit à Paris, $41^{\text{d}} 0' 0''$ ascension droite de la Comète, & $3^{\text{d}} 10'$ déclinaison boréale, observation un peu douteuse.

Le 20, à $10^h 54'$, ascension droite $40^d 0' 3''$, déclinaison $4^d 32' 45''$, un peu douteuse.

Le 24, à $8^h 17'$, ascension droite $36^d 32' 57''$, déclinaison $9^d 30' 45''$.

J'ai réuni dans la Table suivante les longitudes & les latitudes de la Comète, calculées d'après mes observations, & j'y ai joint les lieux du Soleil avec les logarithmes de sa distance à la Terre.

MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN.	LONGIT. de la COMÈTE.	LATITUDE de la COMÈTE.	LONGITUDE du SOLEIL.	LOGARIT. de la distance du SOLEIL.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	
Nov. 26	10. 6. 48	36. 33. 2	1. 46. 34 A.	244. 36. 49	9,993937.
26	14. 2. 30	36. 30. 0	1. 32. 9 A.	244. 46. 57	9,993925.
27	11. 57. 20	36. 10. 10	0. 15. 40 A.	245. 42. 38	9,993858.
28	9. 59. 29	35. 52. 9	1. 0. 50 B.	246. 38. 10	9,993789.
29	8. 47. 49	35. 33. 50	2. 16. 1 B.	247. 35. 53	9,993719.
29	12. 22. 52	35. 31. 11	2. 28. 57	247. 44. 58	9,993710.
Déc. 1	12. 7. 37	34. 57. 24	5. 3. 28	249. 46. 14	9,993576.
2	7. 37. 57	34. 44. 47	6. 4. 46	250. 35. 43	9,993522.
11	5. 58. 49	33. 11. 56	15. 43. 0	259. 40. 9	9,993048.
11	6. 40. 49	33. 11. 42	15. 44. 5		
12	5. 54. 17	33. 7. 11	16. 37. 31	260. 41. 0	9,993010.
13	6. 20. 46	33. 3. 34	17. 30. 53	261. 43. 11	9,992972.
14	6. 28. 15	32. 59. 48	18. 21. 15	262. 44. 21	9,992937.
18	6. 51. 13	32. 56. 8	21. 26. 27	266. 50. 4	9,992821.
19	10. 19. 48	32. 58. 51	22. 15. 4	268. 0. 4	9,992794.
21	6. 0. 42	33. 3. 4	23. 27. 21 B.	269. 51. 18	9,992756.

J'ai déterminé les élémens de l'orbite de cette Comète, comme il suit; mais j'avertis qu'ils ne satisfont pas pleinement aux Observations, il y a des différences de 5 à 6 minutes

648 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 sur les longitudes, vers les 11 & 12 Décembre; les diffé-
 rences en latitude sont au contraire toujours très-petites.

Lieu du nœud ascendant..... 1^r 24^d 14'

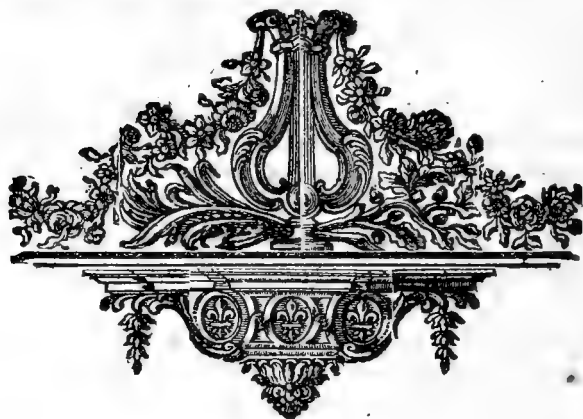
Inclinaison de l'orbite..... 0. 53. 9.

Lieu du périhélie sur l'orbite... 1. 15. 25.

Logar. de la distance périhélie... 0,194606.

Passage au périhélie, 15 Nov. à 5^h 53' $\frac{1}{2}$ temps moyen à Paris.

Sens du mouvement.... Direct.



REMARQUES

REMARQUES

*Sur la manière d'intégrer par approximation les
Équations différentielles, & les Équations
aux différences partielles.*

Par M. COUSIN.

J'AI distribué ces remarques dans plusieurs Mémoires que je me propose de publier successivement; il n'est question dans celui-ci que des Équations différentielles. On ne sait pas les intégrer exactement dans tous les cas; & les tentatives qu'on a faites jusqu'ici, ne donnent pas lieu d'espérer qu'on parvienne si-tôt à résoudre ce problème; on a suppléé à ce défaut de l'analyse, pour quelques équations différentielles, en donnant des méthodes d'un usage facile de les résoudre par des séries convergentes. Je ne fais pour le moment aucune application de celle que j'indique dans ce Mémoire, voici en quoi elle consiste. Toute équation différentielle d'un ordre supérieur au premier, peut être considérée comme une équation aux différences partielles. Lorsqu'elle est du second ordre, par exemple, l'équation aux différences partielles qui lui répond, est du premier; l'intégrale complète de celle-ci doit renfermer une fonction arbitraire d'une certaine quantité: en égalant cette quantité à une constante, & mettant une autre constante pour la fonction arbitraire, on aura les deux intégrales premières complètes de l'équation différentielle. Je représente ces intégrales par des suites ordonnées relativement aux puissances du rapport entre les différentielles des deux variables qui entrent dans la proposée; & ayant satisfait aux conditions, les coefficients, fonctions des mêmes variables, se trouvent être renfermés dans des équations aux différences partielles qu'on peut toujours intégrer complètement. Ces intégrales, & par conséquent

1783.

Mém. 1783.

Nnn

les coëfficiens, contiennent des fonctions arbitraires d'une seule variable, qui serviront à remplir les conditions relatives à chacun des problèmes qu'on pourra proposer. Il s'agit ensuite d'éliminer le rapport entre les différentielles, au moyen des deux intégrales premières; le problème qu'il faut résoudre pour cela, peut s'énoncer ainsi: ayant z égal à une fonction de u, x, z , qui devient fonction de x seul lorsque $u = 0$, trouver la valeur de z , & même d'une fonction donnée de cette quantité, en u & x , par une suite ordonnée relativement aux puissances de u . La solution de ce problème me conduit à une formule pour le retour des suites, plus générale qu'aucune de celles qui sont connues.

Dans le Mémoire qui a pour titre, *Remarques sur la théorie mathématique du mouvement des fluides*, je m'occupe de l'intégration par approximation de quelques équations aux différences partielles, dont l'inconnue renferme plus de deux variables. Cette matière est entièrement neuve, quoique les recherches sur le mouvement des fluides aient conduit à des équations de ce genre. Après avoir démontré ces équations, je fais voir qu'on peut toujours intégrer complètement celles qui sont données par la supposition que le fluide doit être continu; mais comme ces intégrales doivent encore satisfaire à d'autres équations, les fonctions arbitraires qu'elles renferment cesseront d'être aussi générales sans changer d'espèce, & c'est en quoi consiste la difficulté de cette sorte de problèmes. J'ai terminé ce Mémoire au moment où je n'aurois pu m'étendre davantage, sans entrer dans des détails de calcul qui l'auroient augmenté considérablement.

(1.) Si l'équation différentielle proposée est du second ordre, on pourra la représenter par $\frac{d^2 y}{d x^2} + \mu = 0$, μ étant une fonction quelconque de x, y & $\frac{dy}{dx}$, que je ferai $= z$. A cette équation différentielle du second ordre répond une équation aux différences partielles

$$\frac{dz}{dx} + z \frac{dz}{dy} + \mu = 0.$$

& si celle-ci est supposée avoir pour intégrale complète $B + F: K = 0$; en différenciant cette intégrale deux fois, l'une par rapport à y , l'autre par rapport à x , & en éliminant la fonction arbitraire, on trouvera une équation aux différences partielles, qui, étant comparée à la précédente, donnera pour déterminer B & K , ces deux-ci

$$\frac{dK}{dz} \left(\frac{dB}{dx} + \gamma \frac{dB}{dy} \right) - \frac{dB}{dz} \left(\frac{dK}{dx} + \gamma \frac{dK}{dy} \right) = 0,$$

$$\frac{dK}{dy} \left(\frac{dB}{dx} - \mu \frac{dB}{dz} \right) - \frac{dB}{dy} \left(\frac{dK}{dx} - \mu \frac{dK}{dz} \right) = 0,$$

Nous supposons

$$B = m\gamma + m_1 + \frac{m_2}{z} + \frac{m_3}{z^2} + \frac{m_4}{z^3} + \&c.,$$

$$K = M\gamma + M_1 + \frac{M_2}{z} + \frac{M_3}{z^2} + \frac{M_4}{z^3} + \&c.$$

Ces substitutions étant faites dans la première des équations que nous venons de trouver, il faudra qu'elle ait lieu indépendamment de z ; c'est pourquoi si l'on fait pour abréger

$$m \frac{dM}{dx} - M \frac{dm}{dx} = n, \quad m \frac{dM_1}{dx} - M \frac{dm_1}{dx} = n_1,$$

$$m \frac{dM_2}{dx} - M \frac{dm_2}{dx} - m_2 \frac{dM}{dx} + M_2 \frac{dm}{dx} = n_2,$$

$$m \frac{dM_3}{dx} - M \frac{dm_3}{dx} - m_2 \frac{dM_1}{dx} + M_2 \frac{dm_1}{dx}$$

$$- 2m_3 \frac{dM}{dx} + 2M_3 \frac{dm}{dx} = n_3,$$

$$m \frac{dM_4}{dx} - M \frac{dm_4}{dx} - m_2 \frac{dM_2}{dx} + M_2 \frac{dm_2}{dx}$$

$$- 2m_3 \frac{dM_1}{dx} + 2M_3 \frac{dm_1}{dx}$$

$$- 3m_4 \frac{dM}{dx} + 3M_4 \frac{dm}{dx} = n_4,$$

&c.

Nnnn ij

On en tirera

$$M \frac{d m}{d y} - m \frac{d M}{d y} = 0, M \frac{d m_1}{d y} - m \frac{d M_1}{d y} = n_1;$$

$$M \frac{d m_2}{d y} - m \frac{d M_2}{d y} - M_2 \frac{d m}{d y} + m_2 \frac{d M}{d y} = n_2;$$

$$M \frac{d m_3}{d y} - m \frac{d M_3}{d y} - M_2 \frac{d m_1}{d y} + m_2 \frac{d M_1}{d y} \\ + 2 m_3 \frac{d M}{d y} - 2 M_3 \frac{d m}{d y} = n_3;$$

$$M \frac{d m_4}{d y} - m \frac{d M_4}{d y} - M_2 \frac{d m_2}{d y} + m_2 \frac{d M_2}{d y} \\ + 2 m_3 \frac{d M_1}{d y} - 2 M_3 \frac{d m_1}{d y} \\ + 3 m_4 \frac{d M}{d y} - 3 M_4 \frac{d m}{d y} = n_4;$$

$$M \frac{d m_5}{d y} - m \frac{d M_5}{d y} - M_2 \frac{d m_3}{d y} + m_2 \frac{d M_3}{d y} \\ + 2 m_3 \frac{d M_2}{d y} - 2 M_3 \frac{d m_2}{d y} \\ + 3 m_4 \frac{d M_1}{d y} - 3 M_4 \frac{d m_1}{d y} \\ + 4 m_5 \frac{d M}{d y} - 4 M_5 \frac{d m}{d y} = n_5;$$

&c. De plus

$$\frac{d B}{d y} \frac{d K}{d z} - \frac{d B}{d z} \frac{d K}{d y} = n + \frac{n_1}{z} + \frac{n_2}{z} + \&c.$$

Et si nous convenons de nous servir de $m M$ pour représenter

$$\frac{d m}{d y} \frac{d M}{d x} - \frac{d m}{d x} \frac{d M}{d y},$$

& ainsi des autres quantités de même forme, nous trouverons

$$\frac{d B}{d y} \frac{d K}{d x} - \frac{d B}{d x} \frac{d K}{d y} = m M z^2 + (m_1 M + m M_1) z + m_2 M \\ + m_1 M_1 + m M_2 + (m_3 M + m_2 M_1 + m_1 M_2 + m M_3) z^{-1} \\ + (m_4 M + m_3 M_1 + m_2 M_2 + m_1 M_3 + m M_4) z^{-2} + \&c.$$

(2.) Si en développant μ , nous pouvons lui donner cette forme

$$a z^2 + 6 z + \gamma + \frac{\delta}{z} + \frac{\epsilon}{z^2} + \&c,$$

nous aurons cette autre suite d'équations

$$m M = a n,$$

$$m_1 M + m M_1 = a n_1 + 6 n,$$

$$m_2 M + m_1 M_1 + m M_2 = a n_2 + 6 n_1 + \gamma n,$$

$$m_3 M + m_2 M_1 + m_1 M_2 + m M_3 = a n_3 + 6 n_2 + \gamma n_1 + \delta n,$$

$$m_4 M + m_3 M_1 + m_2 M_2 + m_1 M_3 + m M_4 = a n_4 + 6 n_3 + \gamma n_2 + \delta n_1 + \epsilon n, \&c.$$

Or, e étant le nombre dont le logarithme est l'unité, si l'on prend $x_1, X_1, x_2, X_2, \&c$, pour représenter des fonctions de la seule variable x , on tirera de ces équations & de celles du n^o précédent,

$$m = M x_1, M = e^{\int a dy} X_1;$$

$$m_1 = x_1 M_1 + (N_1) \dots x_2 - x_1 \int M dy;$$

$$M_1 = X_2 + \int (6 M - \frac{dM}{dx}) dy;$$

$$m_2 = x_1 M_2 + (N_2) \dots \frac{1}{M} (x_3 + \int n_1 dy);$$

$$M_2 = e^{-\int a dy} \{ X_3 + \int e^{\int a dy} [\gamma M + \frac{1}{M x_1} (m_1 M_1 + \frac{dM}{dx} (a N_2 + \frac{dN_2}{dy}) - 6 n_1)] dy \};$$

$$m_3 = x_1 M_3 + (N_3) \dots \frac{1}{M^2} [x_4 + \int (n_2 + M_2 \frac{d m_1}{d x} - m_2 \frac{d M_1}{d y}) M dy],$$

$$M_3 = e^{-2f\alpha dy} \left\{ X_4 + \int e^{2f\alpha dy} \left[\delta M + \frac{\gamma}{Mx^2} \right. \right. \\ \left. \left. (m_2 M_1 + m_1 M_2 + \frac{dM}{dx} (2\alpha N_3 + \frac{dN_3}{dy}) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha N_2 \frac{dM_1}{dx} - \alpha M_2 (M_1 x^2 + \frac{dN_1}{dx}) \right. \right. \\ \left. \left. - \epsilon n_2 - \gamma n_1 \right) \right] dy \right\};$$

$$m_4 = x_1 M_4 + (N_4) \dots \frac{1}{M^3} [xs + \int M^2 (n_3 \\ + M_2 \frac{dm_2}{dy} - m_2 \frac{dM_2}{dy} + 2M_3 \frac{dm_1}{dx} \\ - 2m_3 \frac{dM_1}{dy}) dy],$$

$$M_4 = e^{-3f\alpha dy} \left\{ X_5 + \int e^{3f\alpha dy} \left[\epsilon M + \frac{\gamma}{Mx^3} \right. \right. \\ \left. \left. (m_3 M_1 + m_2 M_2 + m_1 M_3 + \frac{dM}{dx} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (3\alpha N_4 + \frac{dN_4}{dy}) + 2\alpha N_3 \frac{dM_1}{dx} - 2\alpha M_3 \right. \right. \\ \left. \left. \times (M_1 x^2 + \frac{dN_1}{dx}) + \alpha N_2 \frac{dM_2}{dx} - \alpha M_2 \right. \right. \\ \left. \left. \times (x^2 M_2 + \frac{dN_2}{dx}) - \epsilon n_3 - \gamma n_2 - \delta n_1 \right) \right] dy \right\}; \\ \&c.$$

Il n'est pas nécessaire de pousser plus loin ces séries pour découvrir l'ordre qu'elles doivent suivre. Ainsi la proposée aura pour intégrales de l'ordre immédiatement inférieur,

$$M_2 + M_1 + \frac{M_2}{x} + \frac{M_3}{x^2} + \frac{M_4}{x^3} + \&c. = a, \\ \alpha x_1 + N_1 + \frac{N_2}{x} + \frac{N_3}{x^2} + \frac{N_4}{x^3} + \&c. = b,$$

a & b étant les constantes arbitraires.

(3.) Les arbitraires x_1 , X_1 , &c. serviront à remplir les conditions relatives à chacun des problèmes qu'on pourra proposer. Si, par exemple, on demandoit les cas où l'équation

$\frac{dz}{dx} + az^2 + Cz + \gamma = 0$ a pour intégrales premières complètes $Mz + M_1 = a$, $mz + m_1 = b$, & pour intégrale finie complète $ax_1 + N_1 = b$, les formules précédentes donneroient pour conditions

$$\frac{dN_1}{dx} + x^2_1 M_1 = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} = \gamma M;$$

ou

$$x^2_2 + x^2_1 X_2 + \int \left(C - 2 \int \frac{d\alpha}{dx} dy \right) [x^2_1 - \frac{2x^2_1 X_1}{X_1} - x^2_1] M dy = 0,$$

$$X^2_2 + \int \left[\frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} + \int \frac{d\alpha}{dx} dy \cdot (C - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) \right. \\ \left. + \frac{X^2_1}{X_1} (C - 2 \int \frac{d\alpha}{dx} dy) - \frac{X^2_1}{X_1} \right] M dy = \gamma M;$$

ces conditions feroient par conséquent que

$$C - 2 \int \frac{d\alpha}{dx} dy \quad \& \quad \frac{dC}{dx} - \int \frac{d^2\alpha}{dx^2} \\ + \int \frac{d\alpha}{dx} dy (C - \int \frac{d\alpha}{dx} dy) - \frac{d\gamma}{dy} - a\gamma$$

fussent fonctions de la seule variable x . Nommons ρ & σ ces deux fonctions, nous aurons

$$\sigma + \rho \frac{X^2_1}{X_1} - \frac{X^2_1}{X_1} = 0, \quad \frac{x^2_1}{x^2_1} + \frac{2X^2_1}{X_1} = \rho;$$

$$X^2_2 = \gamma M - \int \left(\frac{d\gamma}{dy} + a\gamma \right) M dy, \quad x^2_2 + x^2_1 X_2 = 0;$$

& il ne s'agira plus que de trouver X_1 au moyen de l'équation linéaire du second ordre qui le renferme. Dans les autres cas, on pourra regarder nos deux intégrales premières comme étant des séries convergentes; pour en tirer les valeurs de z , on prendra une fonction t de x, y qui soit moindre que 1, & ayant mis pour y sa valeur en x & t , on déterminera les arbitraires x_3, X_3 , &c. de manière que m_2, M_2 , &c. soient nuls lorsqu'on fait $t = 0$: cela posé, les méthodes connues du retour des suites donneront l'intégrale finie par une suite ordonnée relativement aux puissances de t . An

moyen des mêmes méthodes, on tirera de l'équation précédente la valeur de t en fonction de x & des deux constantes arbitraires, par une suite ordonnée relativement aux puissances de quelque fonction de x qui sera moindre que 1.

(4.) Toutes les équations différentielles du troisième ordre peuvent être représentées par $\frac{1}{dx} dZ + \mu = 0$, μ étant une fonction quelconque de $x, y, \frac{dy}{dx} = z, \frac{1}{dx} dz = Z$: à cette équation différentielle répond une équation aux différences partielles du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 2z \frac{d^2 z}{dx dy} + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} Z + \mu = 0;$$

& si on peut supposer que celle-ci a pour intégrale complète $B + F:K = 0$, on aura, pour déterminer B & K , ces deux équations où $\partial B, \partial K$ désignent les différentielles de ces quantités prises en ne faisant varier que x & y :

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dZ} \left(\frac{\partial B}{dx} + Z \frac{dB}{dz} \right) - \frac{dB}{dZ} \left(\frac{\partial K}{dx} + Z \frac{dK}{dz} \right) &= 0, \\ \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} - \frac{dz}{dx} \left(\frac{dB}{dz} \frac{dK}{dy} - \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} \right) \\ &+ \frac{dz}{dy} \left(\frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} \right) \\ &= \mu \left(\frac{dK}{dZ} \frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dZ} \frac{dK}{dy} \right) \\ &+ \frac{dz}{dy} \left(\frac{dK}{dZ} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dZ} \frac{dK}{dz} \right). \end{aligned}$$

Si la proposée étoit de l'ordre n , B & K seroient donnés par les mêmes équations où Z, z seroient les rapports entre les différentielles des ordres $n - 1, n - 2$, où la caractéristique ∂ désigneroit une différentielle prise en faisant varier $x, y, \frac{dy}{dx}$ & les autres rapports jusqu'à z exclusivement, &

$\frac{dB}{dy}, \frac{dK}{dy}, \frac{dB}{dx}, \frac{dK}{dx}$ des différences partielles prises en faisant aussi varier ces mêmes rapports considérés comme fonctions de x, y . Je reviens aux équations du troisième ordre, & je suppose

suppose

$$B = mZ + m_1 + \frac{m_2}{Z} + \frac{m_3}{Z^2} + \frac{m_4}{Z^3} + \&c.$$

$$K = MZ + M_1 + \frac{M^2}{Z} + \frac{M^3}{Z^2} + \frac{M^4}{Z^3} + \&c.$$

On aura évidemment, en faisant, pour abrégé,

$$m \frac{\partial M}{\partial x} - M \frac{\partial m}{\partial x} = n, \quad m \frac{\partial M_1}{\partial x} - M \frac{\partial m_1}{\partial x} = n_1,$$

$$m \frac{\partial M_2}{\partial x} - M \frac{\partial m_2}{\partial x} - m_2 \frac{\partial M}{\partial x} + M_2 \frac{\partial m}{\partial x} = n_2,$$

$$m \frac{\partial M_3}{\partial x} - M \frac{\partial m_3}{\partial x} - m_2 \frac{\partial M_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial m_1}{\partial x} \\ - 2m_3 \frac{\partial M}{\partial x} + 2M_3 \frac{\partial m}{\partial x} = n_3,$$

$$m \frac{\partial M_4}{\partial x} - M \frac{\partial m_4}{\partial x} - m_2 \frac{\partial M_2}{\partial x} + M_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} \\ - 2m_3 \frac{\partial M_1}{\partial x} + 2M_3 \frac{\partial m_1}{\partial x} \\ - 3m_4 \frac{\partial M}{\partial x} + 3M_4 \frac{\partial m}{\partial x} = n_4,$$

&c.

On aura, dis-je, en prenant $p, q, r, f, t, \&c.$ pour représenter des fonctions de x, y seuls,

$$m = pM, \quad m_1 = pM_1 + (N_1) \dots q - \frac{\partial p}{\partial x} \int M d\tau,$$

$$m_2 = pM_2 + (N_2) \dots \frac{1}{M} (r + \int n_1 d\tau),$$

$$m_3 = pM_3 + (N_3) \dots \frac{1}{M^2} [\int + \int (n_2 \\ + M_2 \frac{dm_1}{d\tau} - m_2 \frac{dM_1}{d\tau}) M d\tau],$$

$$m_4 = pM_4 + (N_4) \dots \frac{1}{M^3} [t + \int (n_3 \\ + M^2 \frac{dm_2}{d\tau} - m_2 \frac{dM_2}{d\tau} \\ + 2M_3 \frac{dm_1}{d\tau} - 2m_3 \frac{dM_1}{d\tau}) M^2 d\tau],$$

&c.

Mém. 1783.

Oooo

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dy} \frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx} \frac{dM}{dy} &= m M, \\ \frac{dm}{dz} \frac{dM}{dy} - \frac{dm}{dy} \frac{dM}{dz} &= (m M), \\ \frac{dm}{dz} \frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx} \frac{dM}{dz} &= [m M],\end{aligned}$$

& ainsi des autres quantités semblables, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dy} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dy} &= m M Z^2 + (m_1 M + m M_1) Z \\ &+ m_2 M + m_1 M_1 + m M_2 + (m_3 M \\ &+ m_2 M_1 + m_1 M_2 + m M_3) Z^{-1} + (m_4 M \\ &+ m_3 M_1 + m_2 M_2 + m_1 M_3 + m M_4) Z^{-2} \\ &+ \&c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dz} \frac{dK}{dy} - \frac{dB}{dy} \frac{dK}{dz} &= (m M) Z^2 + [(m_1 M) \\ &+ (m M_1)] Z + (m_2 M) + (m_1 M_1) \\ &+ (m M_2) + [(m_3 M) + (m_2 M_1) \\ &+ (m_1 M_2) + (m M_3)] Z^{-1} + [(m_4 M) \\ &+ (m_3 M_1) + (m_2 M_2) + (m_1 M_3) \\ &+ (m M_4)] Z^{-2} + \&c.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dz} \frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx} \frac{dK}{dz} &= [m M] Z^2 + ([m_1 M] \\ &+ [m M_1]) Z + [m_2 M] + [m_1 M_1] \\ &+ [m M_2] + ([m_3 M] + [m_2 M_1] \\ &+ [m_1 M_2] + [m M_3]) Z^{-1} + ([m_4 M] \\ &+ [m_3 M_1] + [m_2 M_2] + [m_1 M_3] \\ &+ [m M_4]) Z^{-2} + \&c.\end{aligned}$$

De plus ;

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dZ} \frac{dB}{d\tau} - \frac{dB}{dZ} \frac{dK}{d\tau} &= n + n_1 Z^{-1} + n_2 Z^{-2} \\ &+ n_3 Z^{-3} + \&c., \\ \frac{dK}{dZ} \frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dZ} \frac{dK}{dy} &= (M \frac{dm}{dy} - m \frac{dM}{dy}) Z \\ &+ M \frac{dm_1}{dy} - m \frac{dM_1}{dy} + (M \frac{dm_2}{dy} \\ &- m \frac{dM_2}{dy} - M_2 \frac{dm}{dy} + m_2 \frac{dM}{dy}) Z^{-1} \\ &+ (M \frac{dm_3}{dy} - m \frac{dM_3}{dy} - M_2 \frac{dm_1}{dy} \\ &+ m_2 \frac{dM_1}{dy} - 2 M_3 \frac{dm}{dy} + 2 m_3 \frac{dM}{dy}) Z^{-2} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

C'est pourquoi si nous représentons cette dernière quantité par $iZ + h + h_1 Z^{-1} + h_2 Z^{-2} + h_3 Z^{-3} + \&c.$, le multiplicateur de μ sera $h + h_1 Z^{-1} + h_2 Z^{-2} + h_3 Z^{-3} + \&c. + (iZ + n + n_1 Z^{-1} + n_2 Z^{-2} + n_3 Z^{-3} + \&c.) \frac{d\tau}{dy}$.

(5.) En développant μ , si nous pouvons lui donner cette forme,

$$\alpha Z^2 + \mathcal{C}Z + \gamma + \frac{\delta}{Z} + \frac{\varepsilon}{Z^2} + \&c.,$$

nous aurons, par la comparaison des termes homologues, premièrement,

$$[mM] = \alpha n, [m_1 M] + [m M_1] = \mathcal{C}n + \alpha n_1, \&c.,$$

où par $[mM]$ on entend $\frac{\partial M}{\partial x} \frac{dm}{d\tau} - \frac{\partial m}{\partial x} \frac{dM}{d\tau}$, &

ainsi des autres quantités semblables : on tirera de ces équations, comme dans le n.^o 2,

$$M = e^{\int \alpha d\tau} P, M_1 = Q + \int (\mathcal{C}M - \frac{\partial M}{\partial x}) d\tau,$$

O o o o ij

$$M_2 = e^{-f^{\alpha d\zeta}} \{ R + \int e^{f^{\alpha d\zeta}} [\gamma M + (1 : M \frac{\partial p}{\partial x}) ([m_1 M_1] + \frac{\partial M}{\partial x} (\alpha N_2 + \frac{d N_2}{d \zeta}) - \mathcal{C}_{n1})] d\zeta \},$$

$$M_3 = e^{-2f^{\alpha d\zeta}} \{ S + \int e^{2f^{\alpha d\zeta}} [\delta M + (1 : M \frac{\partial p}{\partial x}) ([m_2 M_1] + [m_1 M_2] + \frac{\partial M}{\partial x} (2\alpha N_3 + \frac{d N_3}{d \zeta}) + \alpha N_2 \frac{d M_1}{d x} - \alpha M_2 (M_1 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial x}) - \mathcal{C}_{n2} - \gamma n_1)] d\zeta \},$$

$$M_4 = e^{-3f^{\alpha d\zeta}} \{ T + \int e^{3f^{\alpha d\zeta}} [\varepsilon M + (1 : M \frac{\partial p}{\partial x}) ([m_3 M_1] + [m_2 M_2] + [m_1 M_3] + \frac{\partial M}{\partial x} (3\alpha N_4 + \frac{d N_4}{d \zeta}) + 2\alpha N_3 \frac{d M_1}{d x} - 2\alpha M_3 (M_1 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial x}) + \alpha N_2 \frac{\partial M_2}{\partial x} - \alpha M_2 (M_2 \frac{d p}{d x} + \frac{d N_2}{d x}) - \mathcal{C}_{n3} - \gamma n_2 - \delta n_1)] d\zeta \}.$$

P, Q , &c. étant des fonctions arbitraires de x, y , ajoutées en intégrant. Secondement, on trouvera pour équations de condition,

$$(m \quad M) = -i\alpha,$$

$$(m_1 M) + (m M_1) = m M - \alpha h - i\mathcal{C},$$

$$(m_2 M) + (m_1 M_1) + (m M_2) = m_1 M + m M_1 - \mathcal{C} h - \alpha h_1 - i\gamma,$$

$$(m_3 M) + (m_2 M_1) + (m_1 M_2) + (m M_3) = m_2 M + m_1 M_1 + m M_2 - \gamma h - \mathcal{C} h_1 - \alpha h_2 - i\delta, \text{ \&c.}$$

Les arbitraires, P, Q , &c. serviront à remplir les conditions du problème; si, par exemple, on demandoit les cas

où l'équation du troisième ordre

$$\frac{1}{d x} d Z + \alpha Z^2 + \mathcal{C} Z + \gamma = 0,$$

à pour intégrales de l'ordre immédiatement inférieur

$$M Z + M_1 = a, \quad m Z + m_1 = b,$$

on trouveroit pour conditions

$$\frac{\partial M_1}{d x} = \gamma M, \quad \frac{\partial N_1}{d x} + M_1 \frac{\partial p}{d x} = 0.$$

Quant aux équations qui précèdent, elles ne donnent pas de conditions de plus, puisqu'elles se réduisent à

$$\frac{d M}{d z} = \alpha M, \quad \frac{d M_1}{d z} = \mathcal{C} M - \frac{\partial M}{d x},$$

$$\frac{d M_2}{d z} + \alpha M_2 = \gamma M + (1 : M \frac{\partial p}{d x}),$$

$$\{[m_1 M_1] + \frac{\partial M}{d x} (\alpha N_2 + \frac{d N_2}{d z}) - \mathcal{C} n_1\}; \text{ \&c.}$$

(6.) Il nous reste à faire voir comment une méthode très-connue du retour des suites peut s'appliquer ici. Nous avons à résoudre ce problème ; étant donné $z = V$, où V est une fonction de u, x, z qui devient fonction de x seul lorsqu'on fait $u = 0$, trouver la valeur de z , & même d'une fonction donnée Z de z , en u & x , par une suite ordonnée relativement aux puissances de u . En nommant S la valeur de Z qui répond à $u = 0$, & S_1, S_2, S_3 , &c.

ce que deviennent $\frac{d Z}{d u}, \frac{d^2 Z}{d u^2}, \frac{d^3 Z}{d u^3}$, &c. lorsqu'on fait $u = 0$ & $Z = S$; on aura

$$Z = S + u S_1 + \frac{u^2}{1.2} S_2 + \frac{u^3}{1.2.3} S_3 + \text{\&c.}$$

Je prendrai l'équation plus générale $z = \varphi : V$, qui

662 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 étant différenciée deux fois, en faisant varier successivement
 u & x , donne

$$\frac{d z}{d u} = \left(\frac{\partial V}{\partial z} \frac{d z}{d u} + \frac{\partial V}{\partial u} \right) \phi' : V,$$

$$\frac{d z}{d x} = \left(\frac{\partial V}{\partial z} \frac{d z}{d x} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \phi' : V;$$

& éliminant la fonction arbitraire, l'équation aux différences
 partielles

$$\frac{d z}{d u} - V' \frac{d z}{d x} = 0,$$

dans laquelle

$$V' = \frac{\partial V}{\partial u} : \frac{\partial V}{\partial x}.$$

On aura donc aussi

$$(1) \dots\dots\dots \frac{d Z}{d u} = V' \frac{d Z}{d x}.$$

Si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{\partial V'}{\partial u} - V' \frac{\partial V'}{\partial x} = V_1;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial u} - V' \frac{\partial V_1}{\partial x} = V_2;$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial u} - V' \frac{\partial V_2}{\partial x} = V_3, \text{ \&c.}$$

& que nous nous servions de la caractéristique d de manière
 que

$$d V' = \frac{\partial V'}{\partial z} d z + \frac{\partial V'}{\partial x} d x + \frac{\partial V'}{\partial u} d u,$$

& ainsi des autres, nous aurons

$$\frac{d V'}{d u} = V_1 + V' \frac{d V'}{d x},$$

$$\frac{d V_1}{d u} = V_2 + V' \frac{d V_1}{d x},$$

$$\frac{d V_2}{d u} = V_3 + V' \frac{d V_2}{d x}, \text{ \&c.}$$

Cela posé, l'équation (1) étant différenciée par rapport à u , on en tire

$$\frac{d^2 Z}{d u^2} = V^2 \frac{d^2 Z}{d x d u} + \frac{d V^2}{d u} \frac{d Z}{d x}$$

& mettant pour $\frac{d^2 Z}{d x d u}$, $\frac{d V^2}{d u}$ leurs valeurs

$$\frac{d^2 Z}{d u^2} = V^{12} \frac{d^2 Z}{d x^2} + 2 V^2 \frac{d V^2}{d x} \frac{d Z}{d x} + V_1 \frac{d Z}{d x}$$

$$\text{donc (2) } \dots \dots \dots \frac{d^2 Z}{d u^2} = \frac{d \cdot V^{12} \frac{d Z}{d x}}{d x} + V_1 \frac{d Z}{d x}$$

Je continue de différencier, & je trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^3 Z}{d u^3} &= V^{12} \frac{d^3 Z}{d x^2 d u} + 2 V^2 \frac{d V^2}{d u} \frac{d^2 Z}{d x^2} \\ &+ (2 V^2 \frac{d V^2}{d x} + V_1) \frac{d^2 Z}{d x d u} + (2 V^2 \frac{d^2 V^2}{d x d u} \\ &+ 2 \frac{d V^2}{d x} \frac{d V^2}{d u} + \frac{d V_1}{d u}) \frac{d Z}{d x}. \end{aligned}$$

On en tire, en mettant pour $\frac{d^3 Z}{d x^2 d u}$, $\frac{d^2 Z}{d x d u}$ leurs valeurs

tirées de l'équation (1), & pour $\frac{d^2 V^2}{d x d u}$, $\frac{d V^2}{d u}$, $\frac{d V_1}{d u}$

leurs valeurs tirées des équations qui suivent,

$$\begin{aligned} \frac{d^3 Z}{d u^3} &= V^{13} \frac{d^3 Z}{d x^3} + 6 V^{12} \frac{d V^2}{d x} \frac{d^2 Z}{d x^2} + 3 V^{12} \frac{d^2 V^2}{d x^2} \frac{d Z}{d x} \\ &+ 3 V^2 V_1 \frac{d^2 Z}{d x^2} + 6 V^2 \left(\frac{d V^2}{d x} \right)^2 \frac{d Z}{d x} + 3 V_1 \frac{d V^2}{d x} \frac{d Z}{d x} \\ &+ 3 V^2 \frac{d V_1}{d x} \frac{d Z}{d x} + V_2 \frac{d Z}{d x}, \end{aligned}$$

ainsi

$$(3) \dots \frac{d^3 Z}{d u^3} = \frac{d^2 \cdot V^{13} \frac{d Z}{d x}}{d x^2} + 3 \frac{d \cdot V^2 V_1 \frac{d Z}{d x}}{d x} + V_2 \frac{d Z}{d x}$$

On trouvera de la même manière

$$\begin{aligned}
 (4) \dots \frac{d^4 Z}{du^4} &= \frac{d^3 V^1 + \frac{dZ}{dx}}{dx^3} + 6 \frac{d^2 V^1 V^2 + V^1 \frac{dZ}{dx}}{dx^2} \\
 &+ 4 \frac{d V^1 V^2 \frac{dZ}{dx}}{dx} + 3 \frac{d(V^1)^2 \frac{dZ}{dx}}{dx} + V^3 \frac{dZ}{dx} \\
 (5) \dots \frac{d^5 Z}{du^5} &= \frac{d^4 V^1 + \frac{dZ}{dx}}{dx^4} + 10 \frac{d^3 V^1 V^2 + V^1 \frac{dZ}{dx}}{dx^3} \\
 &+ 10 \frac{d^2 V^1 V^2 V^3 \frac{dZ}{dx}}{dx^2} + 15 \frac{d^2 V^1 (V^1)^2 \frac{dZ}{dx}}{dx^2} \\
 &+ 5 \frac{d V^1 V^3 \frac{dZ}{dx}}{dx} + 10 \frac{d V^1 V^2 \frac{dZ}{dx}}{dx} + V^4 \frac{dZ}{dx} \\
 &\&c.
 \end{aligned}$$

C'est pourquoi si nous nommons Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , &c. ce que deviennent les valeurs de $\frac{dZ}{du}$, $\frac{d^2 Z}{du^2}$, $\frac{d^3 Z}{du^3}$, &c. données par les équations (1), (2), (3), &c. lorsqu'on fait $u = 0$ & $Z = S$, on aura

$$Z = S + u \Sigma_1 + \frac{u^2}{1.2} \Sigma_2 + \frac{u^3}{1.2.3} \Sigma_3 + \frac{u^4}{1.2.3.4} \Sigma_4 + \&c.$$

pour la valeur de Z tirée de l'équation $z = \varphi(V)$.



M É M O I R E

CONTENANT QUELQUES REMARQUES

SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE

DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

Par M. C O U S I N.

(1.) **L**E mouvement d'une molécule fluide étant décomposé selon trois directions x, y, z perpendiculaires entre elles, nous nommerons u, v, w les vitesses selon ces trois directions, t le temps, δ la densité de la molécule, p la pression qu'elle éprouve : & si dans un temps déterminé elle a formé un parallépipède rectangle, l'instant suivant, le nouveau parallépipède qu'elle formera, approchera d'autant plus d'être rectangle, que cet instant sera moindre. En le supposant infiniment petit, & représenté par dt , on pourra regarder le parallépipède comme rectangle, car il sera facile de s'assurer qu'étant calculé dans cette supposition, l'erreur ne pourra être qu'un infiniment petit du second ordre ; or, l'espace parcouru pendant le temps dt dans une certaine direction, est égal à $u dt$, si u est la vitesse dans la même direction ; il suit de-là que si la molécule fluide a pu former un parallépipède $dx dy dz$, abstraction faite de la densité, elle formera, après l'instant dt , un autre parallépipède rectangle, dont les côtés seront

$$d(x + u dt), d(y + v dt), d(z + w dt).$$

Mais pour former le parallépipède $dx dy dz$, on a fait varier successivement x, y, z ; il faudra donc effectuer chacune des différenciations indiquées, en regardant les deux autres différentielles comme nulles. On fera par conséquent

$$dx + \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \right) dt = 0,$$

$$dy + \left(\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz \right) dt = 0;$$

Mém. 1783.

P p p p

& en négligeant les dt^2 , comme cela doit être, on en tirera

$$dx = \frac{-\frac{du}{dz} dz dt}{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}) dt}, \quad dy = \frac{-\frac{dv}{dz} dz dt}{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}) dt}.$$

On mettra ces valeurs dans

$$dz + (\frac{dv}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz) dt,$$

& on aura pour un des côtés du parallépipède qu'il s'agit de trouver,

$$\frac{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}) dt}{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}) dt} dz.$$

Ce côté ne peut être nul sans que dz soit nul; dans cette

$$\text{hypothèse, la seconde équation donne } dy = \frac{-\frac{dv}{dx} dx dt}{1 + \frac{dv}{dy} dt}$$

valeur qu'il faudra substituer dans

$$dx + (\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz) dt,$$

pour avoir un second côté du parallépipède, qui sera

$$\frac{1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}) dt}{1 + \frac{dv}{dy} dt} dx.$$

On trouvera pour le troisième côté $(1 + \frac{dv}{dy} dt) dy$: ainsi le volume de la molécule fluide est égal à

$$(1 + (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}) dt) dx dy dz:$$

& parce que les densités sont réciproquement comme les volumes, on en tirera

$$\frac{d\delta}{dx} + \frac{d\delta}{dy} u + \frac{d\delta}{dz} v + \frac{d\delta}{dz} w + \delta (\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}) = 0.$$

Il est donc démontré que la considération de la continuité du fluide fournit d'abord cette équation,

$$(a) \dots \frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta u}{dx} + \frac{d\delta v}{dy} + \frac{d\delta w}{dz} = 0.$$

Nous nous servirons de la caractéristique δ pour désigner l'incrément que prend une fonction de x, y, z , lorsque ces quantités, au lieu d'augmenter de dx, dy, dz , augmentent de $u dt, v dt, w dt$, c'est-à-dire, lorsque la molécule passe d'un lieu à un autre; nous aurons

$$\frac{dp}{dx} = \delta \left(P - \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad \frac{dp}{dy} = \delta \left(Q - \frac{\partial v}{\partial t} \right), \\ \frac{dp}{dz} = \delta \left(R - \frac{\partial w}{\partial t} \right),$$

où P, Q, R sont les forces accélératrices suivant x, y, z , dans lesquelles on a décomposé toutes celles qui peuvent agir sur la molécule fluide. Nous tirerons de ces trois équations,

$$dp = \delta \left[\left(P - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx + \left(Q - \frac{\partial v}{\partial t} \right) dy + \left(R - \frac{\partial w}{\partial t} \right) dz \right].$$

Toute la théorie du mouvement des fluides est renfermée dans les équations précédentes; nous les devons à M. Euler, qui les a données pour la première fois dans les Mémoires de Berlin, année 1755.

$$(2.) \text{ Les quantités } P - \frac{\partial u}{\partial t}, Q - \frac{\partial v}{\partial t}, R - \frac{\partial w}{\partial t}$$

ne devant pas renfermer p , la dernière équation sera susceptible de devenir intégrable par la multiplication d'un facteur, si on a les conditions suivantes:

$$\frac{d\delta \left(P - \frac{\partial u}{\partial t} \right)}{dy} = \frac{d\delta \left(Q - \frac{\partial v}{\partial t} \right)}{dx}, \quad \frac{d\delta \left(P - \frac{\partial u}{\partial t} \right)}{dz} = \frac{d\delta \left(R - \frac{\partial w}{\partial t} \right)}{dx}, \\ \frac{d\delta \left(Q - \frac{\partial v}{\partial t} \right)}{dz} = \frac{d\delta \left(R - \frac{\partial w}{\partial t} \right)}{dy}.$$

P p p p i j

$$\begin{aligned} & (R - \frac{\partial w}{\partial t}) (\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{\partial v}{dt} - \frac{d}{dy} \frac{\partial u}{dt}) \\ & + (Q - \frac{\partial v}{\partial t}) (\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} + \frac{d}{dz} \frac{\partial u}{dt} - \frac{d}{dx} \frac{\partial w}{dt}) \\ & + (P - \frac{\partial u}{\partial t}) (\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + \frac{d}{dy} \frac{\partial w}{dt} - \frac{d}{dz} \frac{\partial v}{dt}) = 0; \end{aligned}$$

lorsque le fluide n'aura pas d'élasticité, il faudra que

$$(P - \frac{\partial u}{\partial t}) dx + (Q - \frac{\partial v}{\partial t}) dy + (R - \frac{\partial w}{\partial t}) dz,$$

soit une différentielle exacte : mais en général l'équation de condition sera satisfaite toutes les fois qu'on pourra regarder

$$P dx + Q dy + R dz \propto \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz,$$

comme étant des différentielles exactes : or comme on peut changer les équations

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dx} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dx} \frac{\partial w}{\partial t},$$

en celles-ci

$$\begin{aligned} & \frac{d(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})}{dt} + \frac{d.u(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})}{dx} + \frac{d.v(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})}{dy} \\ & + w \frac{d(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})}{dz} + \frac{d.u}{dz} \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dx} = 0, \\ & \frac{d(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})}{dt} + \frac{d.u(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})}{dx} + \frac{d.w(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})}{dz} \\ & + v \frac{d(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})}{dy} + \frac{d.u}{dy} \frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dy} = 0, \end{aligned}$$

auxquelles on satisfait en supposant

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx};$$

il est clair que l'équation de condition sera satisfaite toutes les fois qu'on pourra regarder

$Pdx + Qdy + Rdz$, & $udx + vdy + wdz$, comme étant des différentielles exactes. Alors, nommant dS & ds ces différentielles exactes, on aura $dp = d(S - s)$; & dans ce cas la densité ne pourra être fonction que de $S - s$ & p ; tout le problème sera réduit à trouver les valeurs complètes de u, v, w , au moyen des équations qui renferment ces quantités: savoir l'équation (a), & les deux que nous venons de trouver.

(3.) Soit r la distance de la molécule à un point donné de position, θ sa latitude, par rapport à un plan aussi donné de position qui passe par ce point, η la longitude de la molécule relativement à un axe tiré dans le même plan, & qui passe par le point dont nous venons de parler, on aura

$x = r \cos. \theta \cos. \eta$, $y = r \cos. \theta \sin. \eta$, $z = r \sin. \theta$; & si au commencement du mouvement r, η, θ étant R, μ, λ , on pouvoit regarder les ondulations comme infiniment petites, on feroit, pour exprimer cette supposition,

$r = R + \alpha \rho$, $\eta = et + \mu + \alpha \sigma$, $\theta = \lambda + \alpha \tau$, α étant un nombre infiniment petit dont on négligera la seconde puissance, ρ, σ, τ étant des fonctions de t , R, μ, λ & e la vitesse angulaire de la molécule autour d'un second axe qui passe par le même point que le premier, & qui est perpendiculaire au plan donné de position: or, R, μ, λ ne variant pas dans le passage de la molécule d'un lieu à un autre, les rapports $\frac{1}{dt} \partial x$, $\frac{1}{dt} \partial y$, $\frac{1}{dt} \partial z$ ne peuvent être

autre chose que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; ainsi, à cause de

$$x = R \cos. \lambda \cos. (\mu + et) + \alpha [(\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \cos. (\mu + et) - R \sigma \cos. \lambda \sin. (\mu + et)],$$

$$y = R \cos. \lambda \sin. (\mu + et) + a [(\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \sin. (\mu + et) + R \sigma \cos. \lambda \cos. (\mu + et)],$$

$$z = R \sin. \lambda + a (R \tau \cos. \lambda + \rho \sin. \lambda),$$

on aura

$$u = -e R \cos. \lambda \sin. (\mu + et) + a \left\{ \left(\frac{d\rho}{dt} \cos. \lambda - \frac{d\tau}{dt} R \sin. \lambda - e R \sigma \cos. \lambda \right) \cos. (\mu + et) - \left[\frac{d\sigma}{dt} R \cos. \lambda + e (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right] \sin. (\mu + et) \right\},$$

$$v = e R \cos. \lambda \cos. (\mu + et) + a \left\{ \left(\frac{d\rho}{dt} \cos. \lambda - \frac{d\tau}{dt} R \sin. \lambda - e R \sigma \cos. \lambda \right) \sin. (\mu + et) + \left[\frac{d\sigma}{dt} R \cos. \lambda + e (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right] \cos. (\mu + et) \right\},$$

$$w = a \left(\frac{d\rho}{dt} \sin. \lambda + \frac{d\tau}{dt} R \cos. \lambda \right).$$

En ne faisant pas varier t ,

$$dx = \frac{dx}{dR} dR + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda + \frac{dx}{d\mu} d\mu,$$

$$dy = \frac{dy}{dR} dR + \frac{dy}{d\lambda} d\lambda + \frac{dy}{d\mu} d\mu,$$

$$dz = \frac{dz}{dR} dR + \frac{dz}{d\lambda} d\lambda + \frac{dz}{d\mu} d\mu;$$

je suppose que par les méthodes connues d'élimination, on tire de ces équations $KdR = Ldx + Mdy + Ndz$, $Kd\lambda = L'd\mu + M'dy + N'dz$, $Kd\mu = L''dx + M''dy + N''dz$, on aura

$$K = \frac{dz}{dR} \left(\frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{d\lambda} \right) - \frac{dz}{d\lambda} \left(\frac{dx}{dR} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{dR} \right),$$

$$L = -\frac{dy}{d\mu} \frac{dz}{d\lambda}, M = \frac{dx}{d\mu} \frac{dz}{d\lambda}, N = \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{d\lambda},$$

$$L' = \frac{dz}{dR} \frac{dy}{d\mu}, M' = -\frac{dz}{dR} \frac{dx}{d\mu}, N' = \frac{dy}{dR} \frac{dx}{d\mu} - \frac{dx}{dR} \frac{dy}{d\mu},$$

$$L'' = \frac{dy}{dR} \frac{d\tau}{d\lambda} - \frac{d\tau}{dR} \frac{dy}{d\lambda}, M'' = \frac{d\tau}{dR} \frac{dx}{d\lambda} - \frac{dx}{dR} \frac{d\tau}{d\lambda},$$

$$N'' = \frac{dx}{dR} \frac{dy}{d\lambda} - \frac{dy}{dR} \frac{dx}{d\lambda};$$

&, à cause de $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{d\tau}{dt}$, il sera facile d'en tirer

$$K \frac{du}{dx} = L \frac{d^2 x}{dt dR} + L' \frac{d^2 x}{dt d\lambda} + L'' \frac{d^2 x}{dt d\mu},$$

$$K \frac{dv}{dy} = M \frac{d^2 y}{dt dR} + M' \frac{d^2 y}{dt d\lambda} + M'' \frac{d^2 y}{dt d\mu},$$

$$K \frac{dw}{d\tau} = N \frac{d^2 \tau}{dt dR} + N' \frac{d^2 \tau}{dt d\lambda}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{dK}{dt} = L \frac{d^2 x}{dt dR} + M \frac{d^2 y}{dt dR} + N \frac{d^2 \tau}{dt dR} + L' \frac{d^2 x}{dt d\lambda}$$

$$+ M' \frac{d^2 y}{dt d\lambda} + N' \frac{d^2 \tau}{dt d\lambda} + L'' \frac{d^2 x}{dt d\mu} + M'' \frac{d^2 y}{dt d\mu};$$

il est donc clair que $\frac{1}{K} \frac{dK}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{d\tau}$.

Nous avons négligé, dans les calculs précédens, les termes de l'ordre $N'' \frac{d\tau}{d\mu}$, parce que N'' & $\frac{d\tau}{d\mu}$ sont chacun de l'ordre α ; on verra aisément que la proposition est vraie indépendamment de cette supposition.

(4.) L'équation (a) deviendra $\frac{\partial \Delta}{\partial} = - \frac{\partial K}{K}$, de laquelle on tirera que $K\Delta$ est égal à une certaine fonction de R , λ , μ qu'on déterminera de la manière suivante. Au commencement du mouvement, lorsque $\alpha = 0$, on a

$$\frac{dx}{dR} = \cos. \lambda \cos. \mu, \frac{dx}{d\lambda} = -R \sin. \lambda \cos. \mu, \frac{dx}{d\mu} = -R \cos. \lambda \sin. \mu,$$

$$\frac{dy}{dR} = \cos. \lambda \sin. \mu, \frac{dy}{d\lambda} = -R \sin. \lambda \sin. \mu, \frac{dy}{d\mu} = R \cos. \lambda \cos. \mu;$$

$$\frac{d\tau}{dR} = \sin. \lambda, \frac{d\tau}{d\lambda} = R \cos. \lambda, \text{ \& } K = -R^2 \cos. \lambda;$$

il suit de-là, qu'en désignant par D ce que devient δ lorsque t est nul, la fonction dont il s'agit est égale à $-D R^2 \cos. \lambda$; on trouvera facilement ensuite

$$K = -R^2 \cos. \lambda \left[1 + \alpha \left(\frac{2\rho}{R} - \tau \operatorname{tang.} \lambda + \frac{d\rho}{dR} + \frac{d\sigma}{d\mu} + \frac{d\tau}{d\lambda} \right) \right];$$

c'est pourquoi si l'on suppose qu'à la fin du temps t , $\delta = D(1 + \alpha \Delta)$, l'équation (A) se changera en celle-ci

$$(A) \dots \Delta + \frac{2\rho}{R} - \tau \operatorname{tang.} \lambda + \frac{d\rho}{dR} + \frac{d\sigma}{d\mu} + \frac{d\tau}{d\lambda} = 0.$$

On fera les mêmes substitutions dans

$$dp = \delta \left[(P - \frac{\partial u}{\partial t}) dx + (Q - \frac{\partial v}{\partial t}) dy + (R - \frac{\partial w}{\partial t}) dz \right];$$

& en traitant t comme étant de l'ordre α , on en tirera

$$\begin{aligned} P dx + Q dy + R dz - \frac{1}{\delta} dp = & -e^2 R \cos. \lambda d[R \cos. \lambda \\ & + \alpha (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda)] + \left[\frac{d^2 \sigma}{d\lambda^2} R \cos. \lambda \right. \\ & + 2e \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \cos. \lambda - \frac{d\tau}{d\lambda} R \sin. \lambda \right) \alpha R \cos. \lambda d\mu \\ & + \left[\frac{d^2 \rho}{d\lambda^2} \cos. \lambda - \frac{d^2 \tau}{d\lambda^2} R \sin. \lambda - 2e R \cos. \lambda \frac{d\sigma}{d\lambda} \right. \\ & \left. - e^2 (\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \right] \alpha d.R \cos. \lambda \\ & + \left(\frac{d^2 \rho}{d\lambda^2} \sin. \lambda + \frac{d^2 \tau}{d\lambda^2} R \cos. \lambda \right) \alpha d.R \sin. \lambda. \end{aligned}$$

Ces équations sont celles que M. de la Place a désignées par les nombres (1) & (2) dans les Mémoires de l'Académie, année 1775, pages 96 & 98. Si le premier Membre de l'équation précédente doit être une différentielle exacte; à cause de

$$\begin{aligned} e^2 R \cos. \lambda d.R \cos. \lambda + \alpha e^2 [(\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda) \\ d.R \cos. \lambda + R \cos. \lambda d(\rho \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda)], \end{aligned}$$

qui

qui est une différentielle exacte, on aura

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 p}{dt^2} - 2 e R \cos. \lambda \frac{d \sigma}{dt} \right) d R + \left(\frac{d^2 \tau}{dt^2} \right. \\ & + 2 e \cos. \lambda \sin. \lambda \frac{d \sigma}{dt} \left. \right) R^2 d \lambda + \left(\frac{d^2 \sigma}{dt^2} R \cos. \lambda \right. \\ & + 2 e \left(\frac{d p}{dt} \cos. \lambda - \frac{d \tau}{dt} R \sin. \lambda \right) \left. \right) R \cos. \lambda d \mu, \end{aligned}$$

qui en doit être une aussi. On l'intégrera par-rapport à t ; & comme R , λ , μ , ne renferment pas cette quantité, que de plus p , σ , τ , doivent être nuls au commencement du mouvement, on aura

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d p}{dt} - 2 e R \cos. \lambda \cdot \sigma \right) d R + \left(\frac{d \tau}{dt} \right. \\ & + 2 e \cos. \lambda \sin. \lambda \cdot \sigma \left. \right) R^2 d \lambda + \left(R \cos. \lambda \frac{d \sigma}{dt} \right. \\ & + 2 e \left(p \cos. \lambda - R \tau \sin. \lambda \right) \left. \right) R \cos. \lambda d \mu, \end{aligned}$$

qui sera encore une différentielle exacte. Si e étoit nul, on pourroit intégrer une seconde fois, & on auroit

$$p d R + \tau \cdot R^2 d \lambda + \sigma \cdot R^2 \cos. \lambda^2 d \mu,$$

qui seroit une différentielle exacte : voilà les principales équations qu'il s'agit d'intégrer. Nous avons fait quelques remarques sur ce sujet important, que nous soumettons au jugement des Géomètres.

(5.) On fait, & c'est à M. de la Grange que nous devons ce théorème, que pour intégrer l'équation

$$A \frac{d Z}{dt} + B \frac{d Z}{dx} + C \frac{d Z}{dy} + D \frac{d Z}{dz} + \&c. = V,$$

dans laquelle A , B , C , D , ..., V , sont des fonctions quelconques de t , x , y , z , ..., Z , il faut former cette suite d'équations

$$\begin{aligned} B dt - A dx &= 0, & B dy - C dx &= 0, \\ B dz - D dx &= 0, \dots B dZ - V dx &= 0, \end{aligned}$$

qu'on intégrera toutes à la fois, ce qui donnera autant d'équations entre les mêmes variables, & un nombre de constantes arbitraires moindre d'une unité; on en tirera par

l'élimination la valeur de chacune des constantes en fonction des variables: si nous représentons ces valeurs par $a, b, c, \dots K$, on aura pour l'intégrale complète demandée

$$K = F: a, b, c, \&c.$$

Cela posé, je me propose de trouver les valeurs les plus générales de $T, X, Y, Z, \&c.$ qui puissent satisfaire à

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} + \&c. = 0.$$

J'imagine pour cela qu'on ait cette suite d'équations, où $A, B, \&c. K, K', \&c.$ sont des fonctions quelconques de $t, x, y, z, \&c. T, X, Y, Z, \&c.$:

$$\begin{aligned} & \frac{d(T-K)}{dt} + A \frac{d(T-K)}{dx} \\ & + B \frac{d(T-K)}{dy} + C \frac{d(T-K)}{dz} + \&c. = 0, \\ & \frac{d(X-K')}{dx} + D \frac{d(X-K')}{dt} \\ & + E \frac{d(X-K')}{dy} + F \frac{d(X-K')}{dz} + \&c. = c, \\ & \frac{d(Y-K'')}{dy} + G \frac{d(Y-K'')}{dx} \\ & + H \frac{d(Y-K'')}{dt} + I \frac{d(Y-K'')}{dz} + \&c. = 0, \\ & \frac{d(Z-K''')}{dz} + L \frac{d(Z-K''')}{dy} \\ & + M \frac{d(Z-K''')}{dx} + N \frac{d(Z-K''')}{dt} + \&c. = 0, \&c.: \end{aligned}$$

les ayant ajoutées ensemble, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{dK}{dt} + \frac{dK'}{dx} + \frac{dK''}{dy} + \frac{dK'''}{dz} + \&c. \\ = & A \frac{d(T-K)}{dx} + G \frac{d(Y-K'')}{dx} + M \frac{d(Z-K''')}{dx} + \&c. \\ & + D \frac{d(X-K')}{dt} + H \frac{d(Y-K'')}{dt} + N \frac{d(Z-K''')}{dt} + \&c. \\ & + B \frac{d(T-K)}{dy} + E \frac{d(X-K')}{dy} + L \frac{d(Z-K''')}{dy} + \&c. \\ & + C \frac{d(T-K)}{dz} + F \frac{d(X-K')}{dz} + I \frac{d(Y-K'')}{dz} + \&c. \end{aligned}$$

Pour satisfaire à cette équation, soit

$$K = T + D(X - K') + H(Y - K'') \\ + N(Z - K''') + \&c,$$

$$K' = X + A(T - K) + G(Y - K'') \\ + M(Z - K''') + \&c,$$

$$K'' = Y + B(T - K) + E(X - K') \\ + L(Z - K''') + \&c,$$

$$K''' = Z + C(T - K) + F(X - K') \\ + I(Y - K'') + \&c,$$

&c; il faudra que l'on ait

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} + \&c. &= 0, \\ \frac{dD}{dt} + \frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dz} + \&c. &= 0, \\ \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dt} + \frac{dI}{dz} + \&c. &= 0, \\ \frac{dL}{dy} + \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dt} + \&c. &= 0, \\ \&c. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\alpha)$$

& en même-temps

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} + \&c. = 0.$$

On formera ces suites d'équations

$$\left. \begin{aligned} Adt - dx &= 0, \quad Ady - Bdx = 0, \quad Adz - Cdx = 0, \quad \&c; \\ dt - Ddx &= 0, \quad dy - Edx = 0, \quad dz - Fdx = 0, \quad \&c; \\ Gdy - dx &= 0, \quad Gdt - Hdx = 0, \quad Gdz - Idx = 0, \quad \&c; \\ Mdz - dx &= 0, \quad Mdy - Ldx = 0, \quad Mdt - Ndx = 0, \quad \&c; \\ \&c. \end{aligned} \right\} \dots (\beta)$$

Qqqq ij

En intégrant toutes à la fois les équations que chaque suite renferme, on ajoutera des constantes arbitraires; si ces constantes sont pour la première suite $a, b, c, \&c$, pour la seconde $d, e, f, \&c$, pour la troisième $g, h, i, \&c$, pour la quatrième $l, m, n, \&c, \&c$; & qu'ayant séparé toutes ces constantes l'on désigne par les mêmes lettres les fonctions de $t, x, y, z, \&c$, qui leur sont égales, on aura

$$T - K = F_1 : a, b, c, \&c. \quad X - K' = F_1 : d, e, f, \&c,$$

$$Y - K'' = \Phi_1 : g, h, i, \&c, \quad Z - K''' = \varphi_1 : l, m, n, \&c,$$

&c. On aura aussi, en se contentant d'écrire F_1 , au lieu de $F_1 : a, b, c, \&c$, & ainsi des autres, ce que nous ferons toujours dans la suite pour abréger;

$$K = T + Df_1 + H\Phi_1 + N\varphi_1 + \&c,$$

$$K' = X + AF_1 + G\Phi_1 + M\varphi_1 + \&c,$$

$$K'' = Y + BF_1 + Ef_1 + L\varphi_1 + \&c,$$

$$K''' = Z + CF_1 + Ff_1 + I\Phi_1 + \&c,$$

&c. Pour déterminer T, X, Y, Z , on formera des équations analogues aux équations (C), en marquant d'un trait les coefficients qui y entrent; & si on en tire

$$T - K = F_2 : a', b', c', \&c, \quad X - K' = f_2 : d', e', f', \&c,$$

$$Y - K'' = \Phi_2 : g', h', i', \&c, \quad Z - K''' = \varphi_2 : l', m', n', \&c,$$

&c, on aura aussi

$$K = T + D'f_2 + H'\Phi_2 + N'\varphi_2 + \&c,$$

$$K' = X + A'F_2 + G'\Phi_2 + M'\varphi_2 + \&c,$$

$$K'' = Y + B'F_2 + E'f_2 + L'\varphi_2 + \&c,$$

$$K''' = Z + C'F_2 + F'\varphi_2 + I'\Phi_2 + \&c,$$

On déterminera de la même manière $T, X, Y, Z, \&c$, & ainsi des autres. Mais on pourra les faire nuls; &

chacune des suites $F_1, F_2, \&c, \&c$, aura autant de termes qu'il sera nécessaire dans les valeurs de $T, X, Y, Z, \&c$, que voici,

$$T = F_1 + Df_1 + H\Phi_1 + N\varphi_1 + \&c,$$

$$F_2 + D'f_2 + H'\Phi_2 + N'\varphi_2$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

$$X = f_1 + AF_1 + G\Phi_1 + M\varphi_1 + \&c,$$

$$f_2 + A'F_2 + G'\Phi_2 + M'\varphi_2$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

$$Y = \Phi_1 + BF_1 + Ef_1 + L\varphi_1 + \&c,$$

$$\Phi_2 + B'F_2 + E'f_2 + L'\varphi_2$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

$$Z = \varphi_1 + CF_1 + Ff_1 + I\Phi_1 + \&c,$$

$$\varphi_2 + C'F_2 + F'f_2 + I'\Phi_2$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

(6). Pour plus de généralité, nous donnerons à la proposée un dernier terme, où $T, X, Y, Z, \&c$. entrent sous une forme linéaire: alors on commencera par prendre

$$T = F_2 + D'f_2 + H'\Phi_2 + N'\varphi_2 + \&c,$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

$$X = f_2 + A'F_2 + G'\Phi_2 + M'\varphi_2 + \&c,$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

$$Y = \Phi_2 + B'F_2 + E'f_2 + L'\varphi_2 + \&c,$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

$$Z = \varphi_2 + C'F_2 + F'f_2 + I'\Phi_2 + \&c;$$

$$\&c \quad \&c \quad \&c \quad \&c$$

& ayant mis dans le dernier terme, au lieu de $T, X, Y, Z, \&c$, ces quantités $T = K, X = K', Y = K'', Z = K'''$, &c,

678 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
 on éliminera $K, K', K'', &c$, que ces substitutions y
 auront introduites nécessairement, puisqu'elles ne doivent rien
 changer à la valeur du dernier terme : s'il devient par-là

$$V_1 (T - K) + V_2 (X - K') + V_3 (Y - K'') \\
 + V_4 (Z - K''') + \&c. + W,$$

on aura les différentielles

$$Ad(T - K) - V_1 (T - K) dx, \\
 d(X - K') - V_2 (X - K') dx - W dx,$$

$$Gd(Y - K'') - V_3 (Y - K'') dx, \\
 Md(Z - K''') - V_4 (Z - K''') dx, \&c;$$

qu'on rendra des différentielles exactes en les multipliant par
 des facteurs convenables, après avoir substitué à $t, y, z, &c$,
 dans la première, $x, a, b, c, &c$, dans la seconde $x, d, e, f, &c$,
 dans la troisième, $x, g, h, i, &c$, dans la quatrième, $x, l,$
 $m, n, &c$. Des intégrales qu'on trouvera de cette manière,
 on égalera la première à F_1 , la seconde à f_1 , la troisième
 à Φ_1 , la quatrième à $\phi_1, &c$; & ces équations donneront les
 valeurs de $T - K, X - K', Y - K'', Z - K'''$, &c.
 Ayant proposé l'équation

$$l \frac{dT}{dt} + m \frac{dX}{dx} + n \frac{dY}{dy} + p \frac{dZ}{dz} + \&c = V, \\
 l' \frac{dX}{dt} + m' \frac{dT}{dx} + n' \frac{dZ}{dy} + p' \frac{dY}{dz} \\
 l'' \frac{dY}{dt} + m'' \frac{dZ}{dx} + n'' \frac{dT}{dy} + p'' \frac{dX}{dz} \\
 l''' \frac{dZ}{dt} + m''' \frac{dY}{dx} + n''' \frac{dX}{dy} + p''' \frac{dT}{dz}$$

qui est encore plus générale que la précédente; on fera

$$l T + l' X + l'' Y + l''' Z + \&c = T^2 \\
 m X + m' T + m'' Z + m''' Y + \&c = X^2$$

$$n Y + n' Z + n'' T + p'' X + \&c = Y',$$

$$p Z + p' Y + p'' X + p''' T + \&c = Z'$$

&c, & on aura

$$\begin{aligned} & \frac{dT'}{dt} + \frac{dX'}{dx} + \frac{dY'}{dy} + \frac{dZ'}{dz} + \&c = V \\ & + \left(\frac{dl}{dt} + \frac{dm}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp'''}{dz} + \&c \right) T \\ & + \left(\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dx} + \frac{dn''}{dy} + \frac{dp''}{dz} + \&c \right) X \\ & + \left(\frac{dl''}{dt} + \frac{dm''}{dx} + \frac{dn}{dy} + \frac{dp''}{dz} + \&c \right) Y \\ & + \left(\frac{dl'''}{dt} + \frac{dm'''}{dx} + \frac{dn''}{dy} + \frac{dp}{dz} + \&c \right) Z \\ & + \&c. \end{aligned}$$

Nous désignerons par α , \mathcal{C} , γ , δ , &c, les coefficients de T , X , Y , Z , &c, par W le terme qui ne renferme pas ces quantités; & nous supposons que des équations qui précèdent, on tire

$$T = l_1 T' + m_1 X' + n_1 Y' + p_1 Z' + \&c,$$

$$X = l_2 T' + m_2 X' + n_2 Y' + p_2 Z' + \&c,$$

$$Y = l_3 T' + m_3 X' + n_3 Y' + p_3 Z' + \&c,$$

$$Z = l_4 T' + m_4 X' + n_4 Y' + p_4 Z' + \&c, \&c;$$

alors on aura à rendre exactes les différentielles

$$Ad(T' - K) - (\alpha_1 + A\mathcal{C}_1 + B\gamma_1 + C\delta_1 + \&c.) (T' - K) dx,$$

$$d(X' - K') - \mathcal{C}_1 + D\alpha_1 + E\gamma_1 + F\delta_1 + \&c.) (X' - K') dx - Wdx,$$

$$Gd(Y' - K'') - (\gamma_1 + H\alpha_1 + G\mathcal{C}_1 + I\delta_1 + \&c.) (Y' - K'') dx,$$

$$Md(Z' - K''') - (\delta_1 + N\alpha_1 + M\mathcal{C}_1 + L\gamma_1 + \&c.) (Z' - K''') dx, \&c.$$

où l'on a fait pour abrégé

$$a l_1 + \epsilon l_2 + \gamma l_3 + \delta l_4 + \&c. = a l_1;$$

$$a m_1 + \epsilon m_2 + \gamma m_3 + \delta m_4 + \&c. = \epsilon l_1;$$

$$a n_1 + \epsilon n_2 + \gamma n_3 + \delta n_4 + \&c. = \gamma l_1;$$

$$a p_1 + \epsilon p_2 + \gamma p_3 + \delta p_4 + \&c. = \delta l_1;$$

(7.) Lorsque le fluide n'a pas d'élasticité, l'équation (a) n'est autre que celle-ci $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$; on

aura donc

$$X - K' = f_1 : e, f, Y - K'' = \phi_1 : g, i, Z - K''' = \varphi_1 : l, m,$$

$e, f; g, i; l, m$ étant donnés en intégrant les équations

$$dy - E dx = 0, dz - F dx = 0;$$

$$G dy - dx = 0, G dz - I dx = 0;$$

$$M dy - L dx = 0, M dz - dx = 0;$$

dans lesquelles E, F ne doivent pas renfermer x ; G, I point y ; L, M point z ; ces quantités ayant de plus entr'elles les relations suivantes,

$$\frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dz} = 0, \frac{dG}{dx} + \frac{dI}{dz} = 0, \frac{dL}{dy} + \frac{dM}{dx} = 0.$$

On aura aussi

$$K' = X + G \phi_1 + M \varphi_1, K'' = Y + E f_1 + L \phi_1, K''' = Z + F f_1 + I \varphi_1.$$

Si l'équation avoit un dernier terme, comme l'équation (A) où il est de cette forme $Z \text{ tang. } z - \frac{^2 X}{x}$, on le prépareroit comme il suit,

$$(Z - K''') \text{ tang. } z - \frac{^2 X}{x} (X - K') + K''' \text{ tang. } z - \frac{^2 K'}{x};$$

&c

& ayant mis pour K' , K'' leurs valeurs, on auroit

$$[Z - K''' + F(X - K') + I(Y - K'')] \operatorname{tang.} \zeta \\ - \frac{2}{x} [X - K' + G(Y - K'') + M(Z - K''')] .$$

Il s'agiroit de rendre exactes les différentielles

$$d(X - K') = (F \operatorname{tang.} \zeta - \frac{2}{x}) (X - K') d\kappa ,$$

$$G d(Y - K'') = (I \operatorname{tang.} \zeta - \frac{2G}{x}) (Y - K'') d\kappa ,$$

$$M d(Z - K''') = (\operatorname{tang.} \zeta - \frac{2M}{x}) (Z - K''') d\kappa ;$$

& il suffiroit pour cela de leur donner la forme suivante,

$$\frac{d(X - K')}{X - K'} + \frac{2 d\kappa}{x} = d\zeta \operatorname{tang.} \zeta ,$$

$$\frac{d(Y - K'')}{Y - K''} + \frac{2 d\kappa}{x} = d\zeta \operatorname{tang.} \zeta ,$$

$$\frac{d(Z - K''')}{Z - K'''} + \frac{2 d\kappa}{x} = d\zeta \operatorname{tang.} \zeta ;$$

on en tireroit

$$\log. x^2 \operatorname{cof.} \zeta (X - K') = f_1 : e, f,$$

$$\log. x^2 \operatorname{cof.} \zeta (Y - K'') = \Phi_1 : g, i,$$

$$\log. x^2 \operatorname{cof.} \zeta (Z - K''') = \phi_1 : l, m.$$

L'équation que fournit la considération de la continuité du fluide, est toujours intégrable. Cela ne suffit pas, il faut encore que cette intégrale puisse satisfaire aux autres équations du problème. Il y a un cas très-général que nous avons exposé n.^o 2, où les équations du problème peuvent être représentées par

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0;$$

dans ce cas, les valeurs de X, Y, Z , trouvées au commencement de ce numéro, devront satisfaire à

$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = 0.$$

Or, ces valeurs renferment trois espèces de fonctions arbitraires absolument indépendantes, $f_1, f_2, \&c.$; $\Phi_1, \Phi_2, \&c.$; $\varphi_1, \varphi_2, \&c.$ Si pour la première, nous supposons

$$e' = e + p, e'' = e + q, \&c. f' = f + \pi, f'' = f + \varrho, \&c;$$

au lieu de $f_2, f_3, \&c.$ nous pourrons écrire

$$f_2 = p \frac{df_1}{de} + \pi \frac{df_1}{df} + \frac{p^2}{2} \frac{d^2 f_1}{de^2} + p\pi \frac{d^2 f_1}{de df} \\ + \frac{\pi^2}{2} \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c,$$

$$f_3 = q \frac{df_1}{de} + \varrho \frac{df_1}{df} + \frac{q^2}{2} \frac{d^2 f_1}{de^2} + q\varrho \frac{d^2 f_1}{de df} \\ + \frac{\varrho^2}{2} \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c;$$

& $f_2, f_3, \&c.$ ne seront plus fonctions que de e, f : de plus, si nous faisons

$$f_2 = a_1 \frac{df_1}{de} + a_2 \frac{df_1}{df} + b_1 \frac{d^2 f_1}{de^2} + b_2 \frac{d^2 f_1}{de df} \\ + b_3 \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c,$$

$$f_3 = e_1 \frac{d^2 f_1}{de^2} + e_2 \frac{d^2 f_1}{de df} \\ + e_3 \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c,$$

& que nous désignons, en la marquant d'un 1, ce que devient une fonction de e, f lorsque ces quantités augmentent, l'une de p , l'autre de π ; de deux 1, ce que devient une fonction des mêmes quantités lorsqu'elles augmentent, l'une de q , l'autre de $\varrho, \&c.$; nous aurons, en faisant pour abrégé

$$a' 1 p + b' 1 = m_1, a' 1 \pi + a' 2 p + b' 2 = m_2, \\ a' 2 \pi + b' 3 = m_3, \&c,$$

$$\Omega = a' 1 \frac{df_1}{de} + a' 2 \frac{df_1}{df} + m_1 \frac{d^2 f_1}{de^2} + m_2 \frac{d^2 f_1}{de df} \\ + m_3 \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c,$$

$$\Psi = e^{11} 1 \frac{d^2 f_1}{d\epsilon^2} + e^{12} 2 \frac{d^2 f_1}{d\epsilon df} + e^{13} 3 \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c;$$

nous aurons, dis-je,

$$X = f_1 + \Omega + \Psi + \&c., Y = E f_1 + E^1 \Omega + E^{11} \Psi + \&c., Z = F f_1 + F^1 \Omega + F^{11} \Psi + \&c.$$

(8.) Avant de substituer ces valeurs dans les équations auxquelles il faut satisfaire, on se rappellera que

$$\frac{d\epsilon}{dx} + E \frac{d\epsilon}{dy} + F \frac{d\epsilon}{dz} = 0, \frac{df}{dx} + E \frac{df}{dy} + F \frac{df}{dz} = 0;$$

on fera pour abréger

$$\frac{d\epsilon}{dy} - E \frac{d\epsilon}{dx} = \epsilon, \quad \frac{d\epsilon}{dz} - F \frac{d\epsilon}{dx} = \epsilon', \\ \frac{df}{dy} - E \frac{df}{dx} = \phi, \quad \frac{df}{dz} - F \frac{df}{dx} = \phi':$$

on désignera par (ϵ) , (ϕ) , (ϵ') ces quantités

$$\frac{d\epsilon}{dx} + E^1 \frac{d\epsilon}{dy} + F^1 \frac{d\epsilon}{dz}, \quad \frac{d\epsilon}{dy} - E^1 \frac{d\epsilon}{dx}, \quad \frac{d\epsilon}{dz} - F^1 \frac{d\epsilon}{dx},$$

& ainsi des autres quantités semblables, c'est-à-dire, que $(a^1 1)$, $(\phi^1 1)$, $(a^1 1)$, par exemple, représenteront

$$\frac{da^1 1}{dx} + E^1 \frac{da^1 1}{dy} + F^1 \frac{da^1 1}{dz}, \\ \frac{da^1 1}{dy} - E^1 \frac{da^1 1}{dx}, \quad \frac{da^1 1}{dz} - F^1 \frac{da^1 1}{dx}.$$

Les substitutions faites, on verra que f_1 & ses différences partielles ne devant pas être déterminées, on a nécessairement cette suite d'équations :

$$(a^1 1) = 0, \quad (\phi^1 1) + \epsilon = 0, \quad (a^1 1) + \epsilon' = 0, \\ (\phi^1 2) = 0, \quad (\phi^1 2) + \phi = 0, \quad (a^1 2) + \phi' = 0,$$

Rrrr ij

$$\frac{d e''^1}{d x} + E'' \frac{d e''^1}{d y} + F'' \frac{d e''^1}{d z} + a^1 1 (e) + (m 1) = 0,$$

$$\frac{d e''^1}{d y} - E'' \frac{d e''^1}{d x} + a^1 1 ((e) + (m 1)) = 0,$$

$$\frac{d e''^1}{d z} - F'' \frac{d e''^1}{d x} + a^1 1 (e)) + (m 1)) = 0,$$

$$\frac{d e''^2}{d x} + E'' \frac{d e''^2}{d y} + F'' \frac{d e''^2}{d z} + a^1 1 (f) + a^1 2 (e) + (m^1 2) = 0,$$

$$\frac{d e''^2}{d y} - E'' \frac{d e''^2}{d x} + a^1 1 ((f) + a^1 2 ((e) + (m 2)) = 0,$$

$$\frac{d e''^2}{d z} - F'' \frac{d e''^2}{d x} + a^1 1 (f)) + a^1 2 (e)) + (m 2)) = 0,$$

$$\frac{d e''^3}{d x} + E'' \frac{d e''^3}{d y} + F'' \frac{d e''^3}{d z} + a^1 2 (f) + (m 3) = 0,$$

$$\frac{d e''^3}{d y} - E'' \frac{d e''^3}{d x} + a^1 (2 (f) + (m 3)) = 0,$$

$$\frac{d e''^3}{d z} - F'' \frac{d e''^3}{d x} + a^1 2 (f)) + (m 3)) = 0, \&c.]$$

Soit $de = E dz - F dy$, & e^1, e'' , &c, des fonctions de e seul, en supposant aussi que $a^1 1, a^1 2$, ne renferment que cette quantité; les trois premières équations se réduiront à $1 + \frac{d a^1 1}{d e} = 0$, qui donne $a^1 1 = -e$. On tirera des trois qui suivent, que e doit satisfaire aux deux équations

$$\frac{d^2 e}{d y^2} + \frac{d^2 e}{d z^2} = 0, 1 + \left(\frac{d e}{d y}\right)^2 + \left(\frac{d e}{d z}\right)^2 = 0,$$

& que $d\mu$ étant $\frac{d e}{d z} dy - \frac{d e}{d y} dz$, il faut que f soit la somme de deux fonctions, l'une de $x + \mu$, l'autre de e . Si l'on nomme $[e]$ la fonction de e , on aura $a^1 2 = -[e]$. En supposant $f = x + \mu + [e]$, & $\pi, b^1 1, b^1 2, b^1 3, e''^1 1, e''^1 2, e''^1 3$, fonctions de e seul, les neuf équations qui

viennent ensuite, se réduiront à

$$\begin{aligned} \frac{d(m^1_1 + e^{11}_1)}{d e} &= e, \\ \frac{d(b^1_2 + e^{11}_2)}{d e} &= \frac{d.e \pi}{d e} = \frac{d.e [e]}{d e} \\ &= -e \frac{d p}{d e} \left(\frac{d e}{d \zeta} : \frac{d e}{d y} \right) = -e \frac{d p}{d e} \left(\frac{d e}{d y} : \frac{d e}{d \zeta} \right), \\ \frac{d(b^1_3 + e^{11}_3)}{d e} &= \frac{d.[e] \pi}{d e} = \frac{d.[e]^2}{2 d e} \\ &= -[e] \frac{d p}{d e} \left(\frac{d e}{d \zeta} : \frac{d e}{d y} \right) = -[e] \frac{d p}{d e} \left(\frac{d e}{d y} : \frac{d e}{d \zeta} \right). \end{aligned}$$

Il fera nécessaire de prendre p constant, & on en tirera

$$m^1_1 + e^{11}_1 = \frac{e^2}{2},$$

$$b^1_2 + e^{11}_2 = e \pi + e^1 [e],$$

$$b^1_3 + e^{11}_3 = [e] \pi + \frac{[e]^2}{2}, \text{ \&c.}$$

Ainsi e étant une fonction de y, ζ , telle que

$$\frac{d^2 e}{d y^2} + \frac{d^2 e}{d \zeta^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{d e}{d y} \right)^2 + \left(\frac{d e}{d \zeta} \right)^2 = 0,$$

g une fonction de x, ζ , telle que

$$\frac{d^2 g}{d x^2} + \frac{d^2 g}{d \zeta^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{d g}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d g}{d \zeta} \right)^2 = 0;$$

m une fonction de x, y , telle que

$$\frac{d^2 m}{d x^2} + \frac{d^2 m}{d y^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{d m}{d x} \right)^2 + \left(\frac{d m}{d y} \right)^2 = 0;$$

$[e], [g], [m]$, des fonctions de $e, g, m; \mu, \lambda, \epsilon$, telles que

$$\frac{d e}{d \zeta} d y - \frac{d e}{d y} d \zeta = d \mu,$$

$$\frac{d g}{d \zeta} d x - \frac{d g}{d x} d \zeta = d \lambda,$$

$$\frac{d m}{d y} d x - \frac{d m}{d x} d y = d \epsilon;$$

$$f = x + \mu + [e],$$

$$i = y + \lambda + [g],$$

$$l = z + \epsilon + [m],$$

& que se contentant d'écrire f_1 , Φ_1 , φ_1 , au lieu de f , i , l ; e , f ; Φ_1 : g , i ; φ_1 : l , m ; on fasse pour abrégé,

$$f_1 = e \frac{df_1}{de} = [e] \frac{df_1}{df} + \frac{e^2}{2} \frac{d^2 f_1}{de^2} \\ + e [e] \frac{d^2 f_1}{de df} + \frac{[e]^2}{2} \frac{d^2 f_1}{df^2} + \&c = U_1,$$

$$\Phi_1 = g \frac{d\Phi_1}{dg} = [g] \frac{d\Phi_1}{di} + \frac{g^2}{2} \frac{d^2 \Phi_1}{dg^2} \\ + g [g] \frac{d^2 \Phi_1}{dg di} + \frac{[g]^2}{2} \frac{d^2 \Phi_1}{di^2} + \&c = U_2,$$

$$\varphi_1 = m \frac{d\varphi_1}{dm} = [m] \frac{d\varphi_1}{dl} + \frac{m^2}{2} \frac{d^2 \varphi_1}{dm^2} \\ + m [m] \frac{d^2 \varphi_1}{dm dl} + \frac{[m]^2}{2} \frac{d^2 \varphi_1}{dl^2} + \&c = U_3;$$

on aura

$$X = U_1 + \frac{dg}{dz} U_2 + \frac{dm}{dy} U_3,$$

$$Y = \frac{de}{dz} U_1 + U_2 - \frac{dm}{dx} U_3,$$

$$Z = - \frac{de}{dy} U_1 - \frac{dg}{dx} U_2 + U_3.$$

Mais U_1 , U_2 , U_3 , ne sont autre chose que ce que deviennent f_1 , Φ_1 , φ_1 , lorsque dans la première on fait e nul, & $f = x + \mu$; dans la seconde g nul, & $i = y + \lambda$; dans la troisième m nul, & $l = z + \epsilon$; c'est-à-dire, qu'elles sont fonctions; la première, de $x + \mu$; la seconde, de $y + \lambda$; la troisième, de $z + \epsilon$: les intégrales trouvées de cette manière, ne sont donc que particulières, & il en faut chercher de plus générales.

(9.) Nous ferons, pour abréger, les quotiens des quantités $E', F', 1 + E'^2, 1 + F'^2$, divisées chacune par $1 + E'^2 + F'^2$, égaux à $\alpha, \mathcal{C}, \gamma, \delta$, les quotiens de $E', F', 1 + E'^2, 1 + F'^2$, divisées chacune par $1 + E'^2 + F'^2$, égaux à $\alpha', \mathcal{C}', \gamma', \delta'$, $\frac{1 - E'^2 - F'^2}{1 + E'^2 + F'^2} = h$, &c, & il sera facile de tirer de nos équations générales,

$$da'1 = \epsilon(\alpha dx - \delta dy + F' \alpha dz) + \epsilon'(\mathcal{C} dx + E' \mathcal{C} dy - \gamma dz),$$

$$da'2 = \phi(\alpha dx - \delta dy + F' \alpha dz) + \phi'(\mathcal{C} dx + E' \mathcal{C} dy - \gamma dz),$$

$$de''1 = \begin{cases} [a'1((e) + (m1))] [\alpha' dx - \delta' dy + F'' \alpha' dz] \\ + [a'1(e) + (m1)] [\mathcal{C}' dx + E'' \mathcal{C}' dy - \gamma' dz] \\ - [a'1(e) + (m1)] [h dx + \alpha' dy + \mathcal{C}' dz], \end{cases}$$

$$de''2 = \begin{cases} [a'1((f) + a'2((e) + (m2))) \times \\ [\alpha' dx - \delta' dy + F'' \alpha' dz] \\ + [a'1(f) + a'2(e) + (m2))] \times \\ [\mathcal{C}' dx + E'' \mathcal{C}' dy - \gamma' dz] \\ - [a'1(f) + a'2(e) + (m2)] \times \\ [h dx + \alpha' dy + \mathcal{C}' dz], \end{cases}$$

$$de''3 = \begin{cases} [a'2((f) + (m3))] [\alpha' dx - \delta' dy + F'' \alpha' dz] \\ + [a'2(f) + (m3)] [\mathcal{C}' dx + E'' \mathcal{C}' dy - \gamma' dz] \\ - [a'2(f) + (m3)] [h dx + \alpha' dy + \mathcal{C}' dz], \end{cases}$$

&c.

Si l'on peut supposer $E, F, E', F',$ &c, constans, que $e, f, e', f',$ &c, sont linéaires, par rapport à x, y, z ; alors, $\epsilon, \epsilon', \phi, \phi', (e), ((e), (e)), (f), ((f), (f))$ seront des quantités constantes: on aura

$$a'1 = (\alpha \epsilon + \mathcal{C} \epsilon') x - (\delta \epsilon - E' \mathcal{C} \epsilon') y + (F' \alpha \epsilon - \gamma \epsilon') z,$$

$$a'2 = (\alpha \phi + \mathcal{C} \phi') x - (\delta \phi - E' \mathcal{C} \phi') y + (F' \alpha \phi - \gamma \phi') z;$$

& $a^1 1$, $a^1 2$ étant linéaires,

$$((a^1 1), (a^1 1)), ((a^1 2), (a^1 2)),$$

seront constants.

Nous supposons $b^1 1$, $b^1 2$, $b^1 3$, des quantités du second degré, c'est-à-dire, que

$$b 1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + axy + bxz + cyz:$$

& si

$$\begin{aligned} de'' 1 = & [(A)x + (B)y + (C)z] [\alpha^1 dx - \delta^1 dy + F'' \alpha^1 dz] \\ & + [(a)x + (b)y + (c)z] [\mathcal{C}^1 dx + E'' \mathcal{C}^1 dy - \gamma^1 dz] \\ & - [[a]x + [b]y + [c]z] [h dx + \alpha^1 dy + \mathcal{C}^1 dz], \end{aligned}$$

on aura pour déterminer A, B, C, a, b, c , les six équations

$$\delta^1 (A) + \alpha^1 (B) = 0, (A) F'' - (C) = 0,$$

$$(a) E'' - (b) = 0, \gamma^1 (a) + \mathcal{C}^1 (c) = 0,$$

$$\alpha^1 [a] - h [b] = 0, \mathcal{C}^1 [a] - h [c] = 0;$$

on en tirera

$$\begin{aligned} e'' 1 = & \frac{(A)}{2\alpha^1} (\alpha^1 x - \delta^1 y + \alpha^1 F'' z), \\ & + \frac{(a)}{2\mathcal{C}^1} (\mathcal{C}^1 x + E'' \mathcal{C}^1 y - \gamma^1 z)^2 - \frac{[a]}{2h} (hx + \alpha^1 y + \mathcal{C}^1 z)^2. \end{aligned}$$

Nous trouverions de la même manière les valeurs de $e'' 2, e'' 3$, si l'on vouloit un plus grand nombre de termes des séries Ω , Ψ , &c, ce seroit encore par des opérations semblables que nous parviendrions aux séries qui conviennent aux deux autres fonctions arbitraires: nous n'entrerons pas dans un plus grand détail, pour abrégé, & nous terminerons ce Mémoire par un théorème relatif à celui de M. de la Grange, que nous avons énoncé au commencement du cinquième Numéro.

(10.) L'équation de l'ordre n ,

$$A \frac{d^n z}{dy^n} + B \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + C \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \dots + H \frac{d^n z}{dx^n} = W,$$

dans

dans laquelle $A, B, C, \dots H, W$, sont des fonctions quelconques de x, y, z , & des différences partielles de z jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, étant proposée; si on nomme p, q, r, s , &c, les différences partielles de l'ordre $n - 1, m$ une des racines de l'équation

$$Am^n + Bm^{n-1} + Cm^{n-2} + \dots + H = 0,$$

& que l'on fasse pour abréger,

$$\frac{Am+B}{A} = \alpha, \quad \frac{Am\alpha+C}{A} = \zeta, \quad \frac{Am\zeta+D}{\alpha} = \gamma, \text{ \&c,}$$

une des intégrales premières complètes de cette équation dépendra de pouvoir intégrer ces deux-ci,

$$m dy + dx = 0,$$

$$Am(dp + \alpha dq + \zeta dr + \gamma ds + \text{\&c.}) + W dx = 0.$$

Supposons que cette intégrale soit $K = F\omega$, & que

$$dK = P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{\&c.} + \partial K,$$

$$d\omega = \pi dp + \rho dq + \sigma dr + \tau ds + \text{\&c.} + \partial \omega;$$

comme par l'élimination de la fonction arbitraire, on trouve

$$\frac{dK}{dx} \frac{d\omega}{dy} - \frac{dK}{dy} \frac{d\omega}{dx} = 0,$$

on aura aussi

$$\begin{aligned} & (Q\pi - P\rho) \left(\frac{dp}{dy} \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dy} \frac{dp}{dx} \right) \\ & + (R\pi - P\sigma) \left(\frac{dp}{dy} \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dy} \frac{dp}{dx} \right) \\ & + (S\pi - P\tau) \left(\frac{dp}{dy} \frac{ds}{dx} - \frac{ds}{dy} \frac{dp}{dx} \right) \\ & + (R\rho - Q\sigma) \left(\frac{dq}{dy} \frac{dr}{dx} - \frac{dr}{dy} \frac{dq}{dx} \right) \\ & + (S\rho - Q\tau) \left(\frac{dq}{dy} \frac{ds}{dx} - \frac{ds}{dy} \frac{dq}{dx} \right) \end{aligned}$$

Mém. 1783,

SSS

$$\begin{aligned}
& + (S\sigma - R\tau) \left(\frac{dr}{dy} \frac{ds}{dx} - \frac{dr}{dx} \frac{ds}{dy} \right), \\
& + \&c. + \left(\pi \frac{\partial K}{\partial x} - P \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{dp}{dy} - \left(\pi \frac{\partial K}{\partial y} - P \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{dp}{dx} \\
& + \left(\varrho \frac{\partial K}{\partial x} - Q \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{dq}{dy} - \left(\varrho \frac{\partial K}{\partial y} - Q \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{dq}{dx} \\
& + \left(\sigma \frac{\partial K}{\partial x} - R \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{dr}{dy} - \left(\sigma \frac{\partial K}{\partial y} - R \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{dr}{dx} \\
& + \left(\tau \frac{\partial K}{\partial x} - S \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{ds}{dy} - \left(\tau \frac{\partial K}{\partial y} - S \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{ds}{dx} \\
& + \&c. + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

On fera dans cette équation,

$$\begin{aligned}
Q\pi - P\varrho &= 0, \quad R\pi - P\sigma = 0, \\
S\pi - P\tau &= 0, \quad R\varrho - Q\sigma = 0, \quad \&c.;
\end{aligned}$$

& désignant par $\alpha, \varrho, \gamma, \delta, \&c.$ les rapports $\frac{\varrho}{\pi}, \frac{\sigma}{\pi}, \frac{\tau}{\pi}, \&c.$

ou $\frac{Q}{P}, \frac{R}{P}, \frac{S}{P}, \&c.$ on changera les différentielles

$$\begin{aligned}
Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c., \\
\pi dp + \varrho dq + \sigma dr + \tau ds + \&c.,
\end{aligned}$$

en celles-ci,

$$\begin{aligned}
P(dp + \alpha dq + \varrho dr + \gamma ds + \&c.), \\
\pi(dp + \alpha dq + \varrho dr + \gamma ds + \&c.).
\end{aligned}$$

Cela posé, ayant multiplié la proposée par un facteur ψ , on la comparera, terme à terme, à l'équation que nous venons de réduire, & à cause de

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{dr}{dy}, \quad \frac{dr}{dx} = \frac{ds}{dy}, \quad \&c.;$$

on aura

$$\pi \frac{\partial K}{\partial x} - P \frac{\partial \omega}{\partial x} = A\psi, \quad \pi \frac{\partial K}{\partial y} - P \frac{\partial \omega}{\partial y} = (A\alpha - B)\psi;$$

puis, faisant $\frac{A\alpha - B}{A} = m$,

$$Am\alpha = A\mathcal{C} - C, Am\mathcal{C} = A\gamma - D, Am\gamma = A\delta - E,$$

& m sera donné par l'équation

$$Am^n + Bm^{n-1} + Cm^{n-2} + \dots + H = 0.$$

On aura aussi

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial x} = \nabla W.$$

Au moyen de celle-ci, & des deux premières, on trouvera

$$\frac{\partial K}{\partial y} - m \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{PW}{A} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} - m \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\pi W}{A} = 0.$$

Donc

$$dK = \frac{\partial K}{\partial x} (dx + m dy) + P(dp + \alpha dq + \mathcal{C}dr + \gamma ds + \&c - \frac{Wdy}{A});$$

& le problème ne dépendra plus que de pouvoir intégrer ces deux équations

$$dx + m dy = 0, \quad dp + \alpha dq + \mathcal{C}dr + \gamma ds + \&c - \frac{Wdy}{A} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux que voici :

$$dx + m dy = 0, \quad Am(dp + \alpha dq + \mathcal{C}dr + \gamma ds + \&c) + Wdx = 0.$$

C'est précisément ainsi que j'ai démontré les théorèmes sur les équations linéaires de tous les ordres, *n.ºs 83 & suivans des Leçons de Calcul différentiel & de Calcul intégral*: j'y ai donné les conditions pour que ces équations aient des intégrales de l'ordre immédiatement inférieur; la même analyse nous feroit découvrir les conditions qui doivent avoir lieu dans l'équation plus générale dont nous venons de nous occuper. M. le Commandeur de Nieuport paroît douter de la généralité de nos solutions, dans un Mémoire sur le Calcul intégral aux

différences partielles, que l'Académie doit publier dans un des prochains volumes des Savans Étrangers: son objection est fondée sur une faute de calcul qui se trouve, *page 686*, de l'Ouvrage cité, & que je prie de corriger comme il suit.

On tirera de

$$(\psi) = 0, (\psi) = \Phi: (y \pm \int \frac{dx}{X}), \psi = [y + \int : (y + \int \frac{dx}{X})] \Phi: (y \pm \int \frac{dx}{X}),$$

& l'autre équation de condition deviendra

$$\frac{dX}{dx} [y + f: (y \pm \int \frac{dx}{X})] \mp 2 = 0,$$

de laquelle on tire $f: (y \pm \int \frac{dx}{X}) = -y \pm 2: \frac{dX}{dx}$.

Il faudra donc que $-\int \frac{dx}{X} = 2: \frac{dX}{dx}$, ou que

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{2X} \left(\frac{dX}{dx} \right)^2. \text{ Cette équation du second}$$

ordre a pour intégrale complète $X = (ax + b)^2$, & elle n'a d'autre solution particulière que $X = 0$. Ainsi l'équation générale des cordes vibrantes n'aura d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, que lorsque X sera une quantité de cette forme $(ax + b)^2$.



*SUR LES NAISSANCES, LES MARIAGES
ET LES MORTS*

*A Paris , depuis 1771 jusqu'en 1784 ; & dans
toute l'étendue de la France , pendant les
années 1781 & 1782.*

Par M. DE LA PLACE.

LA population est un des plus sûrs moyens de juger de la prospérité d'un Empire ; & les variations qu'elle éprouve, comparées aux événemens qui les précèdent, sont la plus juste mesure de l'influence des causes physiques & morales sur le bonheur ou sur le malheur de l'espèce humaine. Il est donc intéressant à tous égards de connoître la population de la France, d'en suivre les progrès, & d'avoir la loi suivant laquelle les hommes sont répandus sur la surface de ce grand Royaume. Ces recherches tiennent de trop près à l'Histoire Naturelle de l'homme, pour être étrangères à l'Académie ; elles sont trop utiles pour ne pas mériter son attention. L'Académie s'est déterminée par ces considérations, à insérer chaque année dans ses Mémoires, la liste des naissances, des mariages & des morts dans toute l'étendue de la France. Un Magistrat respectable par ses lumières & par son zèle pour le bien public, & qui depuis long-temps s'occupe avec succès des recherches sur la population, a bien voulu lui procurer tous les renseignements qu'elle pouvoit desirer sur cette matière ; c'est à lui que nous sommes redevables des listes suivantes. La première embrasse les naissances, les mariages & les morts à Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784 ; elle sert de suite à celle que M. Morand a publiée dans nos Mémoires de 1771. Les deux autres listes présentent les naissances, les mariages & les morts dans toute l'étendue du Royaume, pendant les

années 1781 & 1782 : il seroit à desirer que les sexes y fussent distingués, comme ils le sont à Paris, depuis 1745 ; mais on doit espérer que le Gouvernement convaincu de l'importance de ces résultats, leur donnera toute la perfection dont ils sont susceptibles.

Quoique les naissances soient la source de la population, elles ne fussent pas cependant pour la déterminer ; il faut connoître encore la durée moyenne de l'existence des hommes dans le lieu de leur naissance, quelles que soient les causes qui les en font disparoître ; car il est visible qu'à égalité de naissances, un pays sera d'autant plus peuplé, que les hommes y vivront plus long-temps : ainsi dans les contrées où le nombre des morts étant sensiblement égal à celui des naissances, la population est à peu-près constante, le nombre d'années qui exprime la durée moyenne de la vie, est le vrai rapport de la population aux naissances annuelles ; c'est le facteur par lequel on doit multiplier celle-ci pour avoir la population. La détermination de ce facteur est le point le plus délicat & le plus intéressant de ces recherches : voyons comment on peut y parvenir.

Les évènements d'un même genre ont des causes uniformes & constantes, mais dont l'action peut être augmentée ou diminuée par mille causes variables qui produisent les irrégularités que nous attribuons au hasard dans la succession des évènements. Ces irrégularités, en se compensant les unes par les autres, disparoîtroient dans une suite infinie d'observations qui ne laisseroient ainsi apercevoir que le résultat des causes constantes : mais dans un nombre fini d'observations, elles peuvent éloigner de ce résultat, d'autant plus que ce nombre est moins considérable. C'est à ces écarts qu'il faut attribuer les différences observées dans le rapport de la population aux naissances, & il en résulte la nécessité d'employer de grands dénombremens pour déterminer ce rapport. On choisira donc un grand nombre de paroisses dans toutes les provinces du Royaume, pour avoir un milieu entre les petites différences que les causes locales peuvent apporter dans les résultats : on

fera ensuite un dénombrement exact de leurs habitans à une époque donnée ; & par le relevé des naissances durant les dix années qui précèdent cette époque , on déterminera le nombre correspondant des naissances annuelles. En divisant par ce nombre celui des habitans , on aura le rapport de la population aux naissances , d'une manière d'autant plus précise , que le dénombrement sera plus considérable. Comme le nombre des naissances annuelles en France excède celui des morts , il est nécessaire , pour établir une exacte parité entre la population entière de la France & celle de ces paroisses , de les choisir de manière que le nombre total des morts soit à celui des naissances dans le rapport qu'ont entr'eux ces deux nombres , relativement à tout le Royaume. Si l'on a soin de distinguer les sexes , on aura séparément la population des hommes , celle des femmes , & la durée de la vie moyenne de chacun des deux sexes , ce qui est intéressant à connoître. Un dénombrement semblable , fait avec soin dans les divers pays , & renouvelé dans différens siècles , donneroit les différences que le climat , le temps & les gouvernemens peuvent produire dans la durée moyenne de la vie des hommes.

Le rapport de la population aux naissances , déterminé par la méthode précédente , ne peut jamais être rigoureusement exact : en lui supposant même une précision rigoureuse , il resteroit encore sur la population de la France , l'incertitude qui naît de l'action des causes variables. La population de la France , tirée des naissances annuelles , n'est donc qu'un résultat probable , & par conséquent susceptible d'erreurs. C'est à l'analyse des hasards à déterminer la probabilité de ces erreurs , & jusqu'à quel point on doit porter le dénombrement , pour qu'il soit très-probable qu'elles seront renfermées dans d'étroites limites. Ces recherches dépendent d'une théorie nouvelle & encore peu connue , celle de la probabilité des évènements futurs prise des évènements observés ; elles conduisent à des formules dont le calcul numérique est impraticable , à cause des grands nombres que l'on

y considère : mais ayant donné dans ce Volume & dans le précédent, les principes nécessaires pour résoudre ce genre de questions, & une méthode générale pour avoir en séries très-convergentes, les fonctions de grands nombres ; j'en ai fait l'application à la théorie de la population déduite des naissances. Les dénombrements déjà faits en France, & comparés aux naissances, donnent à peu-près 26 pour le rapport de la population aux naissances annuelles ; or si l'on prend un milieu entre les naissances des années 1781 & 1782, on a $973054\frac{1}{2}$ pour le nombre des naissances annuelles dans toute l'étendue de ce Royaume, en y comprenant la Corse ; en multipliant donc ce nombre par 26, la population de la France entière, sera de 25299417 habitans. Maintenant je trouve par mon analyse, que pour avoir une probabilité de mille contre un, de ne pas se tromper d'un demi-million dans cette évaluation de la population de la France, il faudroit que le dénombrement qui a servi à déterminer le facteur 26, eût été de 771469 habitans. Si l'on prenoit $26\frac{1}{2}$ pour le rapport de la population aux naissances, le nombre des habitans de la France seroit 25785944 ; & pour avoir la même probabilité de ne pas se tromper d'un demi-million sur ce résultat, le facteur $26\frac{1}{2}$ devroit être déterminé d'après un dénombrement de 817219 habitans. Il suit de-là que si l'on veut avoir sur cet objet la précision qu'exige son importance, il faut porter ce dénombrement à un million ou douze cents mille habitans. Voici l'analyse qui m'a conduit à ce résultat.

Considérons une urne qui renferme une infinité de boules blanches & noires dans un rapport inconnu, & supposons que dans un premier tirage on ait amené p boules blanches & q boules noires ; supposons ensuite que dans un second tirage on ait amené q' boules noires, mais que l'on ignore le nombre des boules blanches sorties dans ce tirage ; le moyen qui se présente naturellement pour déterminer ce nombre d'une manière approchée, est de le supposer avec q' dans

dans le rapport de p à q , ce qui donne $\frac{pq^i}{q}$ pour ce nombre. Déterminons présentement la probabilité que le vrai nombre inconnu sera compris dans les limites $\frac{pq^i}{q} \cdot (1 - \pi)$, & $\frac{pq^i}{q} \cdot (1 + \pi)$, ou, ce qui revient au même, que l'erreur du résultat $\frac{pq^i}{q}$ ne surpassera pas $\frac{pq^i \pi}{q}$.

Pour cela, nommons x le rapport inconnu des boules blanches au nombre total des boules renfermées dans l'urne, & désignons par p^i le nombre inconnu des boules blanches amenées au second tirage; la probabilité de ce tirage sera, par la théorie connue des hasards,

$$\frac{1.2.3 \dots (p^i + q^i)}{1.2.3 \dots p^i \cdot 1.2.3 \dots q^i} \cdot x^{p^i} \cdot (1 - x)^{q^i}.$$

Mais p^i étant inconnu, il est susceptible de toutes les valeurs depuis $p^i = 0$ jusqu'à $p^i = \infty$; ces valeurs sont plus ou moins probables, suivant qu'elles rendent le second tirage plus ou moins probable: on aura donc la probabilité de p^i , en divisant la quantité précédente, par la somme de toutes les valeurs de cette quantité, depuis $p^i = 0$ jusqu'à $p^i = \infty$, c'est-à-dire par la suite infinie,

$$(1 - x)^{q^i} \cdot [1 + (q^i + 1) \cdot x + \frac{(q^i + 1) \cdot (q^i + 2)}{1.2} \cdot x^2 + \&c.]$$

(Voyez les pages 428 & 429 de ce Volume). Cette suite est égale à $\frac{1}{1 - x}$; la probabilité de p^i est donc égale à

$$\frac{1.2.3 \dots (p^i + q^i)}{1.2.3 \dots p^i \cdot 1.2.3 \dots q^i} \cdot x^{p^i} \cdot (1 - x)^{q^i + 1}.$$

Cette probabilité suppose que x est le rapport des boules blanches à toutes les boules renfermées dans l'urne; mais ce rapport étant inconnu, on peut le faire varier depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$: ces différentes valeurs de x sont plus ou moins probables, suivant qu'elles rendent le premier tirage

plus ou moins probable ; or , la probabilité de ce tirage est

$$\frac{1.2.3....(p+q)}{1.2.3....p.1.2.3....q} . x^p . (1-x)^q ;$$

la probabilité de x fera donc égale à $\frac{x^p \partial x (1-x)^q}{\int x^p \partial x (1-x)^q}$;

l'intégrale du dénominateur étant prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$ (*Voyez la page 430 de ce volume*). En multipliant cette probabilité par celle de p^i , on aura la probabilité de p^i , correspondante au rapport x ; d'où il suit que la probabilité entière de p^i est égale à

$$\frac{1.2.3....(p^i+q^i) . \int x^{p^i+p^i} \partial x . (1-x)^{q^i+q^i+1}}{1.2.3....p^i.1.2.3....q^i . \int x^{p^i} \partial x . (1-x)^{q^i}} ;$$

les intégrales du numérateur & du dénominateur étant prises depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$.

La probabilité que p^i est compris depuis $p^i = 0$, jusqu'à $p^i = s$, sera, en vertu de la formule précédente,

$$\frac{\int x^{p^i} \partial x (1-x)^{q^i+q^i+1} . [1+(q^i+1).x+...+\frac{(q^i+1)(q^i+2)...(q^i+s)}{1.2.3....s} . x^s]}{\int x^{p^i} \partial x (1-x)^{q^i}} ;$$

or, q^i & s étant supposés de très-grands nombres, on trouvera par l'analyse que j'ai donnée dans le volume de 1782, page 60,

$$1 + (q^i + 1).x + ... + \frac{(q^i+1)...(q^i+s)}{1.2.3....s} . x^s \\ = \frac{1}{(1-x)^{q^i+1}} . \frac{\int x^{1+s} \partial x (1-x)^{q^i}}{\int x^{1+s} \partial x (1-x)^{q^i}} ;$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x^i = x$, jusqu'à $x^i = 1$, & celle du dénominateur étant prise depuis $x^i = 0$, jusqu'à $x^i = 1$: donc la probabilité que p^i est compris depuis $p^i = 0$, jusqu'à $p^i = s$, est

$$\frac{\int \int x^{p^i} \partial x (1-x)^{q^i} . x^{1+s} \partial x^i (1-x^i)^{q^i}}{\int \int x^{p^i} \partial x (1-x)^{q^i} . x^{1+s} \partial x^i (1-x^i)^{q^i}} ;$$

les intégrales du numérateur étant prises depuis $x' = x$, jusqu'à $x' = 1$; & depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$; celles du dénominateur étant prises depuis x & x' nuls, jusqu'à x & x' égaux à l'unité. Si l'on applique à cette formule, l'analyse que nous avons donnée *pages 439 & suivantes* de ce volume, on trouvera que si s est moindre & très-peu différent de $\frac{p q^2}{q}$, la fraction précédente sera à très-

peu-près égale à $\frac{\int \delta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, π étant le rapport de la demi-circonférence au rayon, & l'intégrale relative à t , étant prise depuis $t = T$, jusqu'à $t = \infty$, T étant donné par l'équation

$$T^2 = \frac{\left(\frac{p}{p+q} - \frac{s}{s+q}\right)^2 \cdot (p+q)^3 \cdot (s+q')^3}{2 s q' (p+q)^3 + 2 p q (s+q')^3}.$$

On trouvera pareillement que si s est plus grand que $\frac{p q^2}{q}$, & qu'il en diffère très-peu, la fraction précédente sera à très-peu-près égale à $1 - \frac{\int \delta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}$, l'intégrale étant prise depuis $t = T$, jusqu'à $t = \infty$. Il suit de-là que la probabilité que p' est compris entre les deux nombres s & s' dont le premier est moindre, & le second plus grand que $\frac{p q^2}{q}$, est égale à

$$1 - \frac{\int \delta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} - \frac{\int \delta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}};$$

la première intégrale étant prise depuis $t = T$, jusqu'à $t = \infty$, & la seconde intégrale étant prise depuis $t = T'$, jusqu'à $t = \infty$, T & T' étant donnés par les deux équations

$$T^2 = \frac{\left(\frac{p}{p+q} - \frac{s}{s+q}\right)^2 \cdot (p+q)^3 \cdot (s+q')^3}{2 s q' (p+q)^3 + 2 p q (s+q')^3},$$

T t t t i j

$$T^{12} = \frac{\left(\frac{p}{p+q} - \frac{s^1}{s^1+q^1}\right)^2 \cdot (p+q)^3 \cdot (s^1+q^1)^3}{2 \cdot s^1 q^1 (p+q)^3 + 2 p q (s^1+q^1)^3}.$$

Supposons

$$s = \frac{p q^1}{q} (1 - \varpi), \quad \& \quad s^1 = \frac{p q^1}{q} (1 + \varpi),$$

ϖ étant une très-petite fraction; si l'on néglige les quantités de l'ordre ϖ^3 , les deux valeurs de T^2 & de T^{12} , deviendront égales entr'elles & à $\frac{p q q^1 \varpi^2}{2 (p+q) \cdot (q+q^1)}$: ainsi en nommant V^2 , cette dernière quantité, & en désignant par P la probabilité que le nombre p^1 sera compris dans les limites $\frac{p q^1}{q} (1 - \varpi)$, & $\frac{p q^1}{q} (1 + \varpi)$, on aura

$$P = 1 - \frac{\int \vartheta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}}.$$

l'intégrale étant prise depuis $t = V$, jusqu'à $t = \infty$. Cette expression fort simple de P , a l'avantage d'être exacte jusqu'aux quantités de l'ordre ϖ^4 ; car les termes de l'ordre ϖ^3 , que nous avons négligés, se détruisent d'eux-mêmes dans la quantité

$$1 - \frac{\int \vartheta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}} - \frac{\int \vartheta t . e^{-t^2}}{\sqrt{(\pi)}},$$

que nous avons trouvée ci-dessus pour l'expression de P .

Il est facile d'appliquer ces résultats à la théorie de la population déduite des naissances; car on peut considérer chaque naissance annuelle comme étant représentée par une boule noire, & chaque individu existant comme étant représenté par une boule blanche; le premier tirage sera le dénombrement dans lequel on a observé que sur q naissances, le nombre des habitants est p ; & le second tirage sera la population de la France entière dont le nombre q^1 des naissances annuelles est connu, tandis que la population correspondante p^1 est inconnue: P sera dans ce cas la probabilité que la population p^1

de la France est comprise dans les limites $\frac{pq^i}{q} \cdot (1 - \varpi)$ & $\frac{pq^i}{q} \cdot (1 + \varpi)$; on aura ainsi cette probabilité par une formule très-simple.

Il est facile d'en conclure le nombre auquel p doit être porté, pour avoir une grande probabilité que l'erreur sur la population p^i de la France entière sera peu considérable. La recherche de ce nombre devient nécessaire, si l'on veut faire un nouveau dénombrement pour déterminer le vrai facteur par lequel on doit multiplier les naissances annuelles; ainsi nous allons entrer dans quelques détails sur cet objet.

Pour cela, nous supposons

$$p = iq, \quad \frac{pq^i}{q} \cdot \varpi = a;$$

nous aurons par conséquent $\varpi = \frac{a}{iq^i}$, & l'équation

$$V^2 = \frac{pq q^i \cdot \varpi^2}{2(p + q) \cdot (q + q^i)}$$

donnera

$$p = \frac{2i^2 \cdot (i + 1) \cdot q^i \cdot V^2}{a^2 - 2i \cdot (i + 1) \cdot q^i \cdot V^2}.$$

Cette valeur de p suppose que l'on connoît a , q^i , V & i . La valeur de a dépend des limites entre lesquelles on suppose que l'erreur du résultat $\frac{pq^i}{q}$ est comprise; nous ferons ici

$a = 500000$. La valeur de q^i est donnée par les naissances annuelles dans toute l'étendue du Royaume, & nous avons vu que $q^i = 973054,5$. La valeur de V dépend de la probabilité P , que la population de la France sera comprise dans les limites $\frac{pq^i}{q} - a$ & $\frac{pq^i}{q} + a$; nous supposons

ici que cette probabilité est de mille contre un, en sorte que $P = \frac{1000}{10001}$; nous aurons ainsi

$$\frac{2 \int_0^1 t \cdot e^{-t^2} dt}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{10001}, \text{ ou } \int_0^1 t \cdot e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{20002}.$$

L'intégrale devant être prise depuis $t = V$ jusqu'à $t = \infty$, il est clair que cette équation détermine V , & l'on trouve $V^2 = 5,415$. Quant au nombre i , il dépend du rapport de p à q qui résulte du dénombrement; mais s'il s'agit d'un dénombrement à faire, ce rapport est inconnu; cependant les dénombremens déjà faits donnent à peu-près $i = 26$; ainsi l'on est assuré que le facteur i s'éloigne peu de ce nombre. Nous supposons donc successivement $i = 25\frac{1}{2}$, $i = 26$, $i = 26\frac{1}{2}$, & nous aurons pour les valeurs correspondantes de p ,

$$p = 727510, \quad p = 771469, \quad p = 817219,$$

c'est-à-dire, que pour avoir une probabilité de mille contre un, de ne pas se tromper d'un demi-million dans l'évaluation de la population de la France, il faut que le dénombrement p , dans le cas où il donne le premier facteur, soit de 727510 habitans; qu'il soit de 771469 habitans dans le cas du second facteur, & de 817219 habitans, s'il conduit au troisième facteur.

De-là je conclus que si l'on veut avoir sur cet objet, la probabilité qu'exige son importance, il faut porter à un million ou douze cents mille habitans, le dénombrement p qui doit déterminer le facteur i .



Morts de la ville & faubourgs de Paris,
1784.

O R T S.		TOTAL.	ENFANS TROUVÉS.		TOTAL.
ES.	FEMELLES.		MÂLES.	FEMELLES.	
7.	9738.	20685.	3581.	3575.	7156.
6.	9248.	20374.	3899.	3777.	7676.
2.	8766.	18518.	3037.	2952.	5989.
0.	7591.	16061.	3152.	3181.	6333.
5.	8897.	18662.	3379.	3126.	6505.
0.	9016.	20016.	3226.	3193.	6419.
1.	8100.	17291.	3411.	3294.	6705.
6.	8210.	17796.	3449.	3239.	6688.
2.	9154.	19296.	3421.	3223.	6644.
7.	9764.	21331.	2850.	2718.	5568.
8.	9352.	20180.	2799.	2809.	5608.
6.	8207.	18953.	2708.	2736.	5444.
6.	8864.	20010.	2799.	2916.	5715.
6.	9762.	21778.	2794.	2815.	5609.
4.	133466.	289670.	48036.	46941.	94977.
3.	8890.	19303.	3202.	3129.	6331.

*ÉTAT des Naissances, des Mariages & des Morts de la ville & faubourgs de Paris,
depuis 1771 jusqu'en 1784.*

ANNÉES.	NAISSANCES.		TOTAL.	MARIAGES.	MORTS.		TOTAL.	ENFANS TROUVES		TOTAL.
	MÂLES.	FEMELLES.			MÂLES.	FEMELLES.		MÂLES.	FEMELLES.	
1771.....	9604.	9337.	18941.	4452.	10247.	9738.	20685.	3581.	3575.	7156.
1772.....	9557.	9156.	18713.	4611.	11126.	9248.	20374.	3899.	3777.	7676.
1773.....	9751.	9096.	18847.	4810.	9752.	8766.	18518.	3037.	2952.	5989.
1774.....	9892.	9461.	19353.	5114.	8470.	7591.	16061.	3152.	3181.	6333.
1775.....	10247.	9403.	19650.	5016.	9765.	8897.	18662.	3379.	3126.	6505.
1776.....	9716.	9203.	18919.	5432.	11007.	9016.	20016.	3226.	3193.	6419.
1777.....	11445.	10821.	22266.	5442.	9191.	8100.	17291.	3411.	3294.	6705.
1778.....	11037.	10651.	21688.	5250.	9586.	8210.	17796.	3449.	3239.	6688.
1779.....	10506.	10108.	20614.	5208.	10142.	9154.	19296.	3421.	3223.	6644.
1780.....	10071.	9546.	19617.	5143.	11567.	9764.	21331.	2850.	2718.	5568.
1781.....	10397.	9835.	20232.	4970.	10925.	9352.	20180.	2799.	2809.	5608.
1782.....	9851.	9536.	19387.	4878.	10746.	8207.	18953.	2708.	2736.	5444.
1783.....	9952.	9736.	19688.	5213.	11146.	8864.	20010.	2799.	2916.	5715.
1784.....	9833.	9721.	19554.	5039.	12016.	9762.	21778.	2794.	2815.	5609.
TOTAL....	151859.	145159.	297018.	75353.	156204.	133466.	289670.	48036.	46941.	94977.
Année commune.	10121.	9677.	19788.	5023.	10413.	8890.	19303.	3202.	3129.	6331.

l'ordre des Généralités, pendant l'année 1781.

S TOTAL des MORTS.	EXCÉDANT des Naissances sur les MORTS.	OBSERVATIONS.
20,180.	+ 52.	
43,081.	+ 1,370.	
28,928.	— 2,634.	
53,338.	— 4,004.	Dans la colonne de l'Excédant des
27,506.	— 29.	Naissances sur les Morts, le signe +
20,892.	— 452.	indique que le nombre des Naissances
22,864.	+ 3,317.	surpasse celui des Morts, & le signe —
21,233.	— 4,206.	indique que le nombre des Morts sur-
44,797.	+ 10,005.	passe celui des Naissances.
27,061.	+ 7,466.	
19,995.	+ 1,574.	Les Généralités d'Orléans, de Tours,
20,887.	+ 6,451.	de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle,
20,042.	+ 4,582.	de Soissons, d'Amiens & d'Alençon,
18,751.	+ 9,010.	ont été affligées d'épidémies & de mala-
23,195.	+ 1,872.	dies qui y ont occasionné une mortalité
29,977.	+ 948.	considérable, puisque le nombre des
1,212.	+ 247.	Décès surpasse celui des Naissances;
16,727.	— 147.	mais cependant le résultat de toutes les
20,801.	— 203.	Généralités présente un Tableau satis-
27,384.	+ 417.	faisant, puisque le nombre total des
22,557.	+ 2,162.	Naissances surpasse celui des Morts
19,143.	— 344.	de 89,268.
88,708.	+ 2,622.	
7,056.	+ 458.	
51,917.	+ 19,182.	
22,029.	+ 5,817.	
41,246.	+ 1,242.	
21,814.	+ 5,800.	
19,118.	+ 6,194.	
12,003.	+ 1,126.	
28,366.	+ 3,686.	
7,745.	+ 3,053.	
26,624.	+ 1,774.	
3,961.	+ 960.	
881,138.	+ 89,268.	

POPULATION du Royaume, l'île de Corse comprise, suivant l'ordre des Généralités, pendant l'année 1781.

NOMBRE qui constituent celle de Chaque Généralité & Provinces.	DÉNOMINATION DES GÉNÉRALITÉS DU ROYAUME, l'île de Corse comprise, distingues en pays d'Élection & en pays d'États, la ville de PARIS étant distinguée de la Généralité, comme Capitale du Royaume.	NAISSANCES.	MARIAGES.	PROFESSIONS ou RELIGION.	MORTS			EXCÉDANT des Naissances sur les MORTS.	OBSERVATIONS.
					des 1 ^{ers} Sexe civils.	en Régim.	TOTAL de MORTS.		
	PARIS (Ville).....	20,232.	4,070.	87.	20,017.	123.	20,180.	+	52.
	<i>GÉNÉRALITÉS en pays d'Élection</i>								
1.	PARIS.....	44,451.	10,210.	52.	42,004.	87.	42,091.	+	1,370.
2.	ORLÉANS.....	26,204.	6,641.	25.	28,870.	58.	28,928.	—	2,634.
3.	TOURS.....	49,334.	12,513.	59.	53,243.	95.	53,338.	—	4,004.
4.	POITIERS.....	27,377.	7,523.	21.	27,468.	38.	27,506.	—	29.
5.	BOURGES.....	20,440.	4,120.	29.	22,867.	32.	22,900.	—	432.
6.	LIMOGES.....	26,181.	7,433.	30.	23,840.	24.	23,864.	+	3,317.
7.	LA ROCHELLE.....	17,027.	4,612.	23.	21,211.	22.	21,233.	—	4,206.
8.	BORDEAUX.....	54,802.	14,024.	48.	44,712.	63.	44,775.	+	10,031.
9.	AUCH.....	34,527.	8,470.	27.	37,077.	24.	37,101.	—	7,466.
10.	MONTAUBAN.....	21,560.	5,276.	13.	19,071.	24.	19,095.	+	1,574.
11.	GRENOBLE.....	27,318.	6,270.	31.	20,848.	39.	20,887.	—	6,431.
12.	LYON.....	24,624.	5,823.	30.	19,083.	59.	19,142.	+	4,482.
13.	RIOM.....	27,761.	6,811.	44.	18,693.	58.	18,751.	—	9,010.
14.	MOULINS.....	25,067.	6,006.	36.	23,168.	27.	23,195.	—	1,873.
15.	CHÂLONS.....	30,925.	7,238.	23.	29,063.	12.	29,075.	+	247.
16.	LE CLERMONTOIS.....	14,499.	3,177.	11.	12,122.	11.	12,133.	—	247.
17.	SOISSONS.....	16,580.	3,881.	17.	16,670.	28.	16,698.	—	147.
18.	AMIENS.....	20,598.	5,044.	14.	20,761.	40.	20,801.	—	203.
19.	ROUEN.....	27,801.	7,065.	51.	22,207.	87.	22,294.	—	417.
20.	CAEN.....	24,719.	6,077.	47.	22,495.	62.	22,557.	—	2,162.
21.	ALENÇON.....	18,779.	4,174.	33.	19,117.	26.	19,143.	—	344.
	<i>GÉNÉRALITÉS en pays d'États.</i>								
22.	RENNE.....	91,330.	22,020.	100.	88,137.	171.	88,308.	+	2,622.
23.	PERPIGNAN.....	7,144.	1,727.	11.	7,050.	6.	7,056.	—	478.
24.	MONTPELLIER.....	17,009.	15,840.	78.	51,824.	92.	51,917.	—	19,182.
25.	AIN.....	27,846.	5,698.	33.	21,661.	68.	21,729.	—	5,817.
26.	DIJON.....	42,488.	10,216.	72.	41,148.	98.	41,246.	—	1,242.
27.	BESANÇON.....	27,614.	6,110.	31.	21,700.	54.	21,754.	—	5,800.
28.	STRASBOURG.....	25,122.	5,613.	31.	19,073.	50.	19,123.	—	6,104.
29.	METZ.....	18,779.	2,577.	25.	11,148.	57.	11,205.	—	1,126.
30.	NANCY.....	33,002.	6,747.	84.	28,277.	89.	28,366.	—	3,686.
31.	VALENCIENNES.....	10,718.	2,006.	43.	7,674.	51.	7,725.	—	3,053.
32.	LILLE.....	28,198.	6,886.	147.	26,435.	187.	26,622.	—	1,774.
33.	ÎLE DE CORSE.....	4,021.	985.	18.	3,947.	21.	3,968.	—	960.
RÉSULTATS du Royaume, l'île de Corse comprise.		970,406.	236,503.	1400.	899,170.	968.	899,138.	+	8,268.

Dans la colonne de l'Excédant des Naissances sur les Morts, le signe + indique que le nombre des Naissances surpasse celui des Morts, & le signe — indique que le nombre des Morts surpasse celui des Naissances.

Les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Soissons, d'Amiens & d'Alençon, ont été affligées d'épidémies & de maladies qui y ont occasionné une mortalité considérable, puisque le nombre des Décès surpasse celui des Naissances; mais cependant le résultat de toutes les Généralités présente un Tableau satisfaisant, puisque le nombre total des Naissances surpasse celui des Morts de 8,268.

nt l'ordre des Généralités, pendant l'année 1782.

T S		EXCÉDANT		OBSERVATIONS.
N.	TOTAL des MORTS.	des Naissances sur les MORTS.		
	18,953.	+ 434.		<p>Les maladies épidémiques dont les Généralités de Soissons & d'Amiens ont été affligées, pendant l'année 1781, n'ont pas continué en 1782; mais il n'en a pas été de même dans les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle & d'Alençon, où ce fléau a redoublé les ravages en 1782. La contagion a même gagné dans les Généralités de Caën & de Moulins; à l'égard de celle de Bretagne, on ne peut pas attribuer aux seules maladies épidémiques, la mortalité de 1782, & elle a dû être accrue par le passage & le séjour successif & continuel des Troupes, tant de terre que de mer, qui y ont été employées; la ville de Brest ayant toujours été pendant la dernière guerre, le point de réunion de presque toutes les forces maritimes opposées aux Anglois.</p> <p><i>OBSERVATION sur le premier Tableau relatif à la Population de Paris.</i></p> <p>Dans ce premier Tableau qui présente les Naissances, les Mariages & les Morts, à Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784, la colonne horizontale du total comprend, non-seulement les Naissances, les Mariages, les Morts & les Enfants-trouvés, dans cet intervalle, mais encore ceux de l'année 1770, & que l'on trouve à la page 848 de nos Mémoires, pour l'année 1771; ainsi, cette colonne du total est relative aux quinze années, depuis 1770 inclusivement jusqu'en 1784 exclusivement.</p>
	43,260.	+ 2,546.		
	31,848.	— 3,455.		
	61,252.	— 11,735.		
	30,560.	— 3,744.		
	25,727.	— 2,746.		
	26,319.	+ 197.		
	22,665.	— 4,909.		
	49,314.	+ 5,800.		
	26,404.	+ 3,885.		
	19,713.	+ 2,527.		
	22,024.	+ 4,824.		
	20,916.	+ 3,302.		
	23,319.	+ 4,291.		
	27,530.	— 1,342.		
	28,553.	+ 3,548.		
	1,175.	+ 348.		
	15,007.	+ 2,856.		
	19,441.	+ 1,431.		
	26,061.	+ 2,446.		
	25,861.	— 1,871.		
	21,791.	— 2,669.		
	103,825.	— 15,424.		
	8,042.	— 952.		
	59,541.	+ 9,086.		
	24,881.	+ 3,564.		
	43,977.	— 1,227.		
	22,159.	+ 6,229.		
	20,405.	+ 5,737.		
	11,540.	+ 2,523.		
	28,146.	+ 5,724.		
	7,865.	+ 2,867.		
	26,069.	+ 2,120.		
	4,359.	+ 990.		
	948,502.	+ 27,201.		

POPULATION DU ROYAUME, l'île de Corse comprise, suivant l'ordre des Généralités, pendant l'année 1782.

NUMER. qui constituent l'ordre des Généralités & Provinces.	DÉNOMINATION DES GÉNÉRALITÉS DU ROYAUME, l'île de Corse comprise, distinguées en pays d'Élections & en pays d'États; la ville de PARIS étant distinguée de la Généralité, comme Capitale du Royaume.	NAISSANCES	MARIAGES.	PROFESSIONS ou RELIGION.	M O R T S			EXCÉDANT des Naissances sur les MORTS.	OBSERVATIONS.
					dans la SOCIÉTÉ civile.	en RELIGION.	TOTAL des MORTS.		
	PARIS (Ville).....	19,387.	4,878.	117.	18,827.	126.	18,953.	+ 434.	Les maladies épidémiques dont les Généralités de Soissons & d'Amiens ont été affligées, pendant l'année 1781, n'ont pas continué en 1782; mais il n'en a pas été de même dans les Généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle & d'Alençon, où ce fléau a redoublé ses ravages en 1782. La contagion a même gagné dans les Généralités de Caen & de Moulins; à l'égard de celle de Bretagne, on ne peut pas attribuer aux seules maladies épidémiques, la mortalité de 1782, & elle a dû être accrue par le passage & le séjour successif & continué des Troupes, tant de terre que de mer, qui y ont été employées; la ville de Brest ayant toujours été pendant la dernière guerre, le point de réunion de presque toutes les forces maritimes opposées aux Anglois.
	GÉNÉRALITÉS en pays d'Élections.								
1.	PARIS.....	45,806.	10,285.	71.	43,158.	102.	43,260.	+ 2,646.	
2.	ORLÉANS.....	28,393.	7,105.	26.	31,803.	45.	31,848.	+ 3,455.	
3.	TOURS.....	49,517.	12,121.	47.	61,156.	96.	61,252.	+ 1,735.	
4.	POITIERS.....	26,816.	6,496.	45.	30,512.	48.	30,560.	+ 3,748.	
5.	BOURGES.....	22,981.	4,423.	17.	25,687.	48.	25,735.	+ 3,748.	
6.	LIMOGES.....	26,516.	6,408.	26.	26,289.	30.	26,319.	+ 1,97.	
7.	LA ROCHELLE.....	17,756.	4,383.	18.	22,641.	24.	22,665.	+ 4,909.	
8.	BORDEAUX.....	55,114.	18,585.	183.	49,237.	77.	49,314.	+ 5,800.	
9.	AUCH.....	30,289.	6,352.	31.	26,379.	25.	26,404.	+ 3,883.	
10.	MONTAUBAN.....	22,240.	4,980.	30.	19,679.	34.	19,713.	+ 2,527.	
11.	GRENOBLE.....	26,848.	5,436.	34.	21,982.	42.	22,024.	+ 4,824.	
12.	LYON.....	24,218.	5,405.	26.	20,856.	60.	20,916.	+ 3,302.	
13.	RIOM.....	27,610.	5,751.	33.	23,265.	54.	23,319.	+ 4,291.	
14.	MOULINS.....	26,188.	5,899.	15.	27,493.	37.	27,530.	+ 1,342.	
15.	CHALONS.....	32,101.	6,856.	15.	28,526.	27.	28,553.	+ 3,548.	
16.	LE CLERMONTAIS.....	1,523.	286.	11.	1,175.	11.	1,175.	+ 348.	
17.	SOISSONS.....	17,863.	3,907.	11.	14,976.	31.	15,007.	+ 2,856.	
18.	AMIENS.....	20,872.	5,318.	19.	19,410.	31.	19,441.	+ 1,431.	
19.	ROUEN.....	28,507.	7,266.	46.	25,989.	72.	26,061.	+ 2,446.	
20.	CAEN.....	23,990.	5,705.	29.	25,814.	47.	25,861.	+ 1,871.	
21.	ALÉNÇON.....	19,122.	5,010.	36.	21,749.	42.	21,791.	+ 2,669.	
	GÉNÉRALITÉS en pays d'États.								
22.	RENNES.....	88,401.	20,298.	86.	103,647.	178.	103,825.	+ 15,424.	Dans ce premier Tableau qui présente les Naissances, les Mariages & les Morts, à Paris, depuis 1771 jusqu'en 1784, la colonne horizontale du total comprend, non-seulement les Naissances, les Mariages, les Morts & les Enfants trouvés, dans cet intervalle, mais encore ceux de l'année 1770, & que l'on trouve à la page 848 de nos Mémoires, pour l'année 1771; ainsi, cette colonne du total est relative aux quinze années, depuis 1770 inclusivement jusqu'en 1784 exclusivement.
23.	PERPIGNAN.....	7,090.	1,346.	3.	8,033.	9.	8,042.	+ 952.	
24.	MONTPELLIER.....	68,627.	13,976.	75.	59,396.	145.	59,541.	+ 9,086.	
25.	AIX.....	28,445.	5,925.	27.	24,816.	65.	24,881.	+ 3,564.	
26.	DIJON.....	42,750.	9,763.	48.	43,855.	122.	43,977.	+ 1,227.	
27.	BESANÇON.....	28,388.	5,708.	31.	22,090.	69.	22,159.	+ 6,229.	
28.	STRASBOURG.....	26,142.	5,445.	23.	20,361.	44.	20,405.	+ 5,737.	
29.	METZ.....	14,063.	2,587.	19.	11,521.	19.	11,540.	+ 2,523.	
30.	NANCY.....	33,870.	6,603.	113.	28,050.	96.	28,146.	+ 5,724.	
31.	VALENCIENNES.....	10,712.	2,527.	51.	7,817.	48.	7,865.	+ 2,867.	
32.	LILLE.....	28,189.	6,789.	120.	25,898.	171.	26,069.	+ 2,120.	
33.	ÎLE DE CORSE.....	5,349.	1,068.	20.	4,334.	25.	4,359.	+ 990.	
RÉSULTATS du Royaume, l'île de Corse comprise.		975,703.	224,890.	1,491.	946,421.	2,081.	948,502.	+ 27,201.	

E S S A I

Pour connoître la Population du Royaume , & le nombre des habitans de la Campagne , en adaptant sur chacune des Cartes de M. Cassini , l'année commune des Naissances , tant des Villes que des Bourgs & des Villages dont il est fait mention sur chaque Carte ; présenté à l'Académie

Par M.^{rs} DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET
& DE LA PLACE.

IL y a long-temps que les Savans ont paru desirer que le Gouvernement voulût bien s'occuper de cet objet intéressant, & l'Académie en particulier a formé des vœux pour l'exécution de ce Projet.

On connoît les résultats relatifs à cet objet, donnés dans un Ouvrage qui a paru en dernier lieu : cette population a été portée à environ 25 millions d'habitans; en la divisant par le nombre de lieues carrées contenues dans la France, on a environ 720 habitans par lieue carrée; mais dans cette évaluation, l'on a fait entrer en ligne de compte les Habitans des Villes & des Campagnes; & l'on n'a point fait la comparaison du nombre des habitans d'une Province, au nombre des habitans d'une autre Province: ce résultat fondé sur des principes trop peu exacts, a donc paru susceptible d'être soumis à de nouvelles recherches; & un Magistrat recommandable par son amour pour le bien public, a reçu ordre de la part du Roi, de continuer, pour le Gouvernement, des recherches que son zèle lui avoit fait entreprendre il y a près de trente ans, dans les provinces d'Auvergne & du Lyonnais dont il a

été Intendant. Il avoit depuis suivi ces recherches comme particulier ; ce sont ces premiers Essais que ce Magistrat respectable présente aujourd'hui à l'Académie.

Il a pris, pour base du travail, les Cartes de M. Cassini, en distinguant la population des Villes & des Bourgs, de celle des Campagnes : la population des Villes & des Bourgs n'a été considérée que pour fixer la population totale de la France ; mais il ne l'a point fait entrer dans l'évaluation du nombre d'habitans compris dans chaque lieue carrée de chacune des Cartes, population que l'Auteur regarde seule comme la véritable population de la France.

On doit sentir par cet exposé, que le résultat doit être fort différent, suivant la nature du sol de chacune des Cartes, & la proximité de la Capitale, des grandes Villes, des grandes Rivières, &c.

L'Auteur ne présente aujourd'hui les résultats que relativement à dix-sept des Cartes de M. Cassini ; il donne par ordre alphabétique le nombre des naissances, des morts & des mariages, pour chaque lieu compris dans chacune des Cartes ; & il en conclut la population de ces Cartes.

Pour évaluer cette population, l'Auteur a multiplié par vingt-six le nombre des naissances ; ce facteur peut paroître arbitraire, & l'Auteur en convient ; mais il rend compte, dans un Avant-propos, des motifs qui lui ont fait adopter ce facteur : ce sont les états des morts & des naissances, comparés au dénombrement des habitans dans la généralité de Valenciennes, dans soixante-treize Paroisses de la généralité de Dijon, dans un grand nombre de Paroisses de la Normandie, du Lyonnois & de l'Auvergne.

Si l'on considère le travail qu'exige un pareil Ouvrage, les difficultés de toute espèce qu'il pourroit éprouver dans son exécution, s'il n'étoit entre les mains d'un Magistrat aussi zélé pour le bien public, qu'il est généralement estimé de ses Confrères ; on sentira combien l'Académie doit être flattée de l'hommage qu'on lui rend aujourd'hui. L'Académie
a pensé

a pensé qu'elle ne pouvoit faire un meilleur usage du Mémoire qui lui est présenté, qu'en en ordonnant la publication dans ses Volumes.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

« LES recherches faites dans différens pays, ont prouvé qu'on pouvoit se procurer un aperçu très-vraisemblable, « de la population de toute une Province, ainsi que des « grandes Villes, par la connoissance de l'année commune des « naissances de ces Provinces & de ces Villes. »

Dans la Gazette de France du 17 Mars 1769, on « fait mention du dénombrement du Royaume de Naples, « fait au commencement de cette même année, montant à « 3,873,975 personnes de tout sexe & de tout âge; & on « lit dans ce même article de la Gazette, que le nombre « commun des naissances de ce même Royaume, en 1767 « & 1768, étoit de 151,198: en multipliant par 25 ce « nombre de naissances, on trouve 3,779,950, nombre infé- « rieur au dénombrement, & en le multipliant par 26, on « trouve 3,931,148, nombre supérieur à celui des habitans; « c'est donc en multipliant par $25 \frac{1}{2}$ l'année commune des « naissances du royaume de Naples, qu'on trouve le nombre « exact de ses habitans. »

A l'article Turin, de la Gazette de France du 30 Janvier « 1769, on rapporte le nombre des naissances & celui des « morts de cette Ville, en 1767 & 1768, ainsi que le « nombre effectif de ses habitans, montant en 1768 à 79,870; « l'année moyenne des naissances, prise sur les années 1767 « & 1768, étoit de 2959: la proportion entre le nombre « des vivans & celui des naissances étoit par conséquent de « 27 à 1, & la multiplication par 27, de l'année commune « des naissances, donne exactement le nombre des habitans de « cette Ville. »

On fait tous les ans, dans la généralité de Valenciennes, « le recensement général des habitans; M. l'Intendant a soin « de le joindre aux états de population qu'il adresse au Ministre »

» des Finances, & on s'est assuré que le nombre résultant de
 » ce recensement général, revient au produit de l'année com-
 » mune des naissances, multipliée par $26\frac{1}{2}$.

» M. Moheau, qui a donné au Public un Ouvrage estimé,
 » intitulé *Recherches sur la population de la France*, a fait
 » un grand nombre d'expériences dans plusieurs provinces du
 » Royaume, & il a trouvé par-tout que la multiplication de
 » l'année commune des naissances par $25\frac{1}{2}$, rendoit d'une
 » manière très-vraisemblable la population effective, & que
 » sur la totalité du Royaume, deux naissances doivent y faire
 » supposer l'existence de 51 habitans.

» Enfin, l'Académie de Dijon a fait, en 1770, des re-
 » cherches sur la population de la Bourgogne; elle s'est procuré
 » le relevé des Naissances, des Mariages & des Morts de
 » cinquante Paroisses prises indifféremment dans neuf bailliages
 » de la province, & elle s'est rendue certaine que l'année
 » commune des Naissances de ces cinquante paroisses, mul-
 » tipliée par $25\frac{1}{2}$, donnoit, à 7 près, le nombre d'habitans
 » compris dans les dénombremens.

» Le feu Roi ordonna en 1771, sous le ministère de
 » M. l'abbé Terray, à M.^{rs} les Intendans, d'envoyer tous les
 » ans au Ministre des Finances, le relevé du nombre des
 » Naissances, des Mariages & des Morts de toutes les villes,
 » bourgs & paroisses de leur généralité. Cette recherche
 » s'est continuée exactement depuis cette époque, & par la
 » réunion des états de toutes les généralités, on est parvenu
 » à former des tableaux à peu-près exacts du nombre des
 » Naissances, des Mariages & des Morts de tout le Royaume,
 » depuis 1770 jusques & compris 1782, & on est en état
 » de connoître quelles sont les provinces dont la population
 » s'est accrue ou diminuée pendant cet espace de temps. En
 » continuant cette recherche qui ne peut que se perfectionner,
 » on acquerra sur cet objet important, & qui peut avoir des
 » rapports essentiels avec les différentes parties de l'Adminis-
 » tration, des connoissances qu'on n'avoit pu se procurer jusqu'à
 » présent.

Quelques Auteurs qui ont eu la communication des états « de M.^{rs} les Intendans, en ont tiré des conséquences sur la « population du Royaume; ils ont rapporté sur chaque géné- « ralité le nombre des habitans dont elle étoit composée, « & ils ont ajouté le calcul du nombre de ces mêmes habitans « par lieues carrées de 25 au degré. «

Ce calcul du nombre d'habitans de chaque généralité par « lieue carrée, est nécessairement défectueux, attendu qu'il n'a « pu être fait que sur des Cartes générales qui n'ont pas été « levées sur la même échelle. Les Cartes de M. Cassini, qui « sont toutes rédigées dans la même proportion, & qui, outre « les villes & les bourgs, comprennent toutes les paroisses de « la campagne, mettent à portée de faire un calcul bien plus « exact, en adaptant à toutes les villes, bourgs & villages « compris sur ces Cartes, l'année commune des naissances, prise « sur les états de population des généralités, & en formant, « relativement à chaque Carte, une espèce de Dictionnaire par- « ticulier. Ce travail est nécessairement minutieux & demande « de l'attention, parce qu'il y a très-peu de Cartes qui ne « contiennent des portions de différentes généralités, & d'ail- « leurs la conformité des noms & la différence de l'orthographe « employée sur les états de M.^{rs} les Intendans & sur les Cartes, « donne de l'embaras. «

On a cherché à vaincre ces difficultés sur dix-sept Cartes « dont on a rassemblé les résultats. On a pris sur les états « envoyés par M.^{rs} les Intendans en 1780, 1781 & 1782, « le relevé des naissances des villes, bourgs & villages compris « dans chacune de ces dix-sept Cartes, on en a composé une « année commune qu'on a multipliée par 26 pour fixer « le nombre des habitans de chaque lieu; à l'exception des « villes de Paris & de Versailles, où l'année commune des « naissances a été multipliée par 30, attendu le grand nombre « d'Étrangers qui y font leur résidence & qui y sont attirés. « On a distingué sur chaque Carte l'année commune des nais- « sances des villes d'avec celle des bourgs & des villages, & « au moyen de cette distinction, on a séparé les habitans des «

» villes d'avec ceux de la campagne, ce qui met à portée de
 » connoître la population de la campagne, qu'on peut regarder
 » comme la portion la plus précieuse, puisque la culture ne peut
 » être florissante que par le grand nombre des habitans de la
 » campagne.

» Pour remplir ces différens objets, on donne sur chaque
 » Carte, le résultat de la population qu'on estime exister sur
 » le terrain qui y est représenté; on a distingué dans des
 » colonnes séparées, le nombre des habitans des villes & celui
 » des campagnes, & on a fixé celui des habitans de la campagne
 » par lieues carrées de 2000 toises chacune. Ces différens
 » résultats font apercevoir la différence singulière qui se trouve
 » entre quelques-unes de ces Cartes, ce qu'on ne peut attribuer
 » qu'à la diversité du terrain, à l'existence ou au défaut de rivières
 » navigables, à la proximité ou à l'éloignement de la mer ou des
 » grandes villes, ainsi qu'au plus ou au moins de bois existant sur
 » ces Cartes, ce que leur inspection fait aisément apercevoir.

» En réunissant ces dix-sept Cartes, on trouve 70 villes, 5900
 » bourgs ou villages, 3,621,710 habitans, dont 2,440,932
 » résident à la campagne. Ces dix-sept Cartes représentent une
 » superficie de 3267 lieues carrées de 2000 toises, & les ha-
 » bitans de la campagne sont au nombre de 747 par lieue. »

Population de la Carte de la France, n.º 1.º

PARIS.

« CETTE Carte contient les villes de Paris, Versailles,
 » Saint-Germain, Meulan, Pontoise, Montfort, Poissy,
 » Saint-Denis, & 505 bourgs ou villages.

» Paris & Versailles ne doivent être considérés que comme
 » ne formant qu'une seule & même ville, par la raison qu'un
 » grand nombre de personnes les plus considérables de l'État,
 » & qui ont le plus de domestiques & de gens attachés à leur
 » service, ont des établissemens dans ces deux villes, & y
 » passent alternativement une grande partie de leur vie.

» Pour juger de la population de ces deux villes, il paroît
 » nécessaire d'y multiplier l'année commune des Naissances par
 » un nombre beaucoup plus fort que dans aucun autre endroit,

attendu les Colléges, les Séminaires, & tous les Établissémens « publics qui y attirent un grand nombre d'Étrangers, indé- « pendamment de la quantité prodigieuse de domestiques des « deux sexes qui y font leur résidence, & qui sont presque tous « célibataires: On croit, par ces raisons, que le nombre de 30 « employé pour la multiplication de l'année commune des nais- « sances dans les villes de Paris & de Versailles, est celui qui donne « le résultat le plus vraisemblable de la population de ces deux « villes; mais on surpasseroit de beaucoup le nombre d'habitans « existant dans les autres villes, bourgs ou villages, si on em- « ployoit un autre multiplicateur que 26; c'est celui dont on a « fait usage dans ce travail, & qui paroît être le plus propre à faire « connoître la différence de la population d'une Carte à une autre. »

Dans cette hypothèse, l'année commune des naissances de « la ville de Paris étant de 19,769, & celle de Versailles de 1,652, « on peut conjecturer que la population de Paris est de 593,070 « habitans, & celle de Versailles de 49,560, ce qui forme un « total de 642,630 habitans. »

L'année commune des naissances de la ville de Paris, est de. 19,769.

Dans la ville de Versailles..... de..... 1,652.

Dans celle de Saint-Germain.... de..... 410.

Dans celle de Meulan..... de..... 62.

Dans celle de Pontoise..... de..... 157.

Dans celle de Saint-Denis..... de..... 181.

Dans celle de Montfort..... de..... 61.

Dans celle de Poissy..... de..... 88.

Dans les 505 bourgs ou villages de..... 12,018.

NOMBRE des LIEUES de superficie:	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	8.	505.	667,564.	312,468.	980,032.	1250.

LE HAVRE.

Population de la Carte de la France, n.° 60.

« CETTE Carte contient les villes du Havre, Fécamp ;
Montivilliers, & 256 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville du Havre, est de 638.
 Dans celle de Fécamp.....de..... 216.
 Dans celle de Montivilliers.....de..... 90.
 Dans les 256 bourgs ou villages de..... 4048.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
102.	3.	256.	24,544.	105,248.	129,792.	1031.

Cette Carte ne contient que 102 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

SAINT-
MALO.*Population de la Carte de la France, n.° 127.*

« CETTE Carte contient les villes de Saint-Malo, de Dol,
de Grandville, & 135 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Saint-
Malo, est de..... 631.
 Dans celle de Dol.....de..... 90.
 Dans celle de Grandville.....de..... 188.
 Dans les 135 bourgs ou villages de..... 3683.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
95.	3.	135.	23,634.	95,758.	119,392.	1008.

Cette Carte ne contient que 95 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

Population de la Carte de la France, n.° 93. BARFLEUR.

« CETTE Carte contient la petite ville de Barfleur, & 57 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Barfleur,
est de..... 48.

Dans les 57 bourgs ou villages de..... 938.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
26.	1.	57.	1248.	24,336.	25,584.	936.

Cette Carte ne contient que 26 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

Population de la Carte de la France, n.° 95. AVRANCHES.

« CETTE Carte contient les villes d'Avranches, Domfront, Mortain, Vire, & 394 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances de la ville d'Avranches,
est de..... 146.

Dans celle de Domfront..... de..... 88.

Dans celle de Mortain..... de..... 30.

Dans celle de Vire..... de..... 247.

Dans les 394 bourgs ou villages de..... 8976.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	394.	13,286.	233,376.	246,662.	933.

COÛTANCES.

Population de la Carte de la France, n.° 126.

« CETTE Carte contient les villes de Coûtances & de Saint-Sauveur-le-Vicomte, & 95 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Coûtances, est de..... 238.
 Dans celle de Saint-Sauveur-le-Vicomte, de..... 78.
 Dans les 95 bourgs ou villages, de..... 2107.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
66.	2.	95.	8216.	54,782.	62,998.	830.

Cette Carte ne contient que 66 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

LYON.

Population de la Carte de la France, n.° 87.

« CETTE Carte contient les villes de Lyon, Montbrison, Trévoux, & 316 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Lyon, est de..... 5335.
 Dans celle de Montbrison..... de..... 179.
 Dans celle de Trévoux..... de..... 96.
 Dans les 316 bourgs ou villages de..... 7722.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	316.	145,704.	200,772.	346,476.	803.

Population

Population de la Carte de la France , n.º 25.

ROUEN.

« CETTE Carte contient les villes de Rouen , Elbeuf ,
Louviers , Gournay , Andely , Pont-de-l'Arche , Lihons , «
Magny , Vernon , Gifors , & 528 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Rouen ,

est de.....	2556.
Dans celle d'Elbeuf.....de.....	219.
Dans celle de Louviers.....de.....	213.
Dans celle de Gournay.....de.....	67.
Dans celle d'Andely.....de.....	150.
Dans celle de Pont-de-l'Arche...de.....	58.
Dans celle de Lihons.....de.....	49.
Dans celle de Magny.....de.....	68.
Dans celle de Vernon.....de.....	135.
Dans celle de Gifors.....de.....	92.
Dans les 528 bourgs ou villages de.....	7391.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	10.	528.	93,782.	192,166.	285,948.	768.

Population de la Carte de la France , n.º 24.

DIEPPE.

« CETTE Carte contient les villes de Dieppe , Aumale ,
Neufchâtel , Saint-Valery-en-Caux , & 612 bourgs ou «
villages. »

Mém. 1783.

XXXX

714 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

L'année commune des naissances dans la ville de Dieppe,

est de.....	533.
Dans celle d'Aumale.....de.....	52.
Dans celle de Saint-Valery.....de.....	107.
Dans celle de Neufchâtel.....de.....	66.
Dans les 612 bourgs ou villages, de.....	7085.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
246.	4.	612.	19,708.	184,210.	203,918.	749.

Cette Carte ne contient que 246 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

BAYEUX.

Population de la Carte de la France, n.º 94.

« CETTE Carte contient les villes de Bayeux, Caen, Carentan, Saint-Lô, & 462 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Bayeux,

est de.....	317.
Dans celle de Caen.....de.....	1215.
Dans celle de Carentan.....de.....	67.
Dans celle de Saint-Lô.....de.....	101.
Dans les 462 bourgs ou villages, de.....	6024.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
210.	4.	462.	44,200.	156,624.	200,824.	746.

Cette Carte ne contient que 210 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

Population de la Carte de la France, n.° 125. CHERBOURG.

« CETTE Carte contient les villes de Cherbourg, Valognes, & 84 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Cherbourg,
est de..... 230.
Dans celle de Valognes..... de..... 183.
Dans les 84 bourgs ou villages, de..... 1752.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
62.	2.	84.	10,738.	45,552.	56,290.	734.

Cette Carte ne contient que 62 lieues cultivées, le reste est couvert par la mer.

Population de la Carte de la France, n.° 2. BEAUVAIS.

« CETTE Carte contient les villes de Beauvais, Clermont, Compiègne, Pont-Sainte-Maixence, Senlis, & 450 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Beauvais,
est de..... 486.
Dans celle de Clermont..... de..... 115.
Dans celle de Compiègne..... de..... 205.
Dans celle de Pont-Sainte-Maixence, de..... 112.
Dans celle de Senlis..... de..... 138.
Dans les 450 bourgs ou villages, .. de..... 6547.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	450.	27,456.	170,222.	197,678.	681.

LISIEUX. *Population de la Carte de la France, n.° 61.*

« CETTE Carte contient les villes de Lisieux, Honfleur, » Pont-Audemer, Pont-l'Évêque, Bernay, & 416 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Lisieux ,	
est de.....	351.
Dans celle d'Honfleur.....de.....	184.
Dans celle de Pont-Audemer...de.....	119.
Dans celle de Pont-l'Évêque...de.....	48.
Dans celle de Bernay.....de.....	146.
Dans les 416 bourgs ou villages , de.....	5305.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
210.	5.	416.	22,048.	137,930.	159,978.	657.

Cette Carte ne contient que 210 lieues cultivées, le reste est couvert, tant par la mer que par l'embouchure de la Seine, prise depuis Quillebeuf.

ÉVREUX. *Population de la Carte de la France, n.° 26.*

« CETTE Carte contient les villes d'Évreux, Dreux, Conches, Mantes, Verneuil, & 442 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Évreux ,	
est de.....	210.
Dans celle de Dreux.....de.....	167.
Dans celle de Conches.....de.....	35.
Dans celle de Mantes.....de.....	97.
Dans celle de Verneuil.....de.....	123.
Dans les 442 bourgs ou villages , de.....	5448.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	442.	16,432.	141,648.	158,080.	566.

Population de la Carte de la France, n.° 62.

SÉEZ.

« CETTE Carte contient les villes de Séez, Argentan, Falaise, Laigle, & 536 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Séez , est de.....	149.
Dans celle d'Argentan..... de.....	147.
Dans celle de Falaise..... de.....	338.
Dans celle de Laigle..... de.....	162.
Dans les 536 bourgs ou villages , de.....	5104.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	536.	20,696.	132,704.	153,400.	530.

Population de la Carte de la France, n.° 7.

ÉTAMPES.

« CETTE Carte contient les villes d'Étampes, Dourdan, Fontainebleau, Melun, Nemours, & 336 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Étampes, est de.....	261.
Dans celle de Dourdan..... de.....	88.
Dans celle de Fontainebleau.... de.....	217.

718 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Dans celle de Melun.....de.....	205.
Dans celle de Nemours.....de.....	149.
Dans les 336 bourgs ou villages, de.....	5022.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	336.	23,920.	130,572.	154,492.	522.

CHARTRES.

Population de la Carte de la France, n.º 27.

« CETTE Carte contient les villes de Chartres, de Nogent-le-Rotrou, & 276 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Chartres, est de.....	395.
Dans celle de Nogent.....de.....	282.
Dans les 276 bourgs ou villages, de.....	4714.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	276.	17,602.	122,564.	140,166.	490.



M É M O I R E

Sur une méthode d'intégrer les Équations aux Différences ordinaires, lorsqu'elles sont élevées, & dans les cas où leurs Intégrales complètes sont algébriques.

Par M. M O N G E.

LE seul procédé que l'on ait pour intégrer une équation aux différences ordinaires, consiste à chercher le facteur qui la rend différentielle exacte, & dans la recherche de ce facteur l'on n'est guidé par aucune méthode, il faut presque toujours le deviner d'après la forme de l'équation différentielle, ou d'après le sentiment qu'on peut avoir de la forme de l'intégrale : d'ailleurs, lorsque l'équation est élevée, il faut commencer par la résoudre, parce qu'on ne peut la rendre différentielle exacte que lorsqu'elle est sous la forme linéaire, & cette opération n'est pas toujours sans difficulté. J'ai cru qu'une méthode directe & indépendante de la résolution des équations, pourroit être de quelque utilité, quoiqu'elle ne puisse réussir complètement que dans les cas où l'intégrale finie est algébrique.

Soit

$$\left. \begin{aligned} &A y^m + B x y^{m-1} + C x^2 y^{m-2} \dots \&c \\ &+ A' y^{m-1} + B' x y^{m-2} \dots \&c \\ &+ A'' y^{m-2} \dots \&c \end{aligned} \right\} = 0,$$

une équation algébrique dans laquelle les coefficients constans $A, B, C, A', B', \&c.$ soient pour un instant regardés comme indépendans les uns des autres. Si l'on différencie cette équation un nombre n de fois, on pourra éliminer n coefficients, & l'équation différentielle à laquelle on arrivera sera

linéaire, au moins par rapport à la différentielle de l'ordre n , & il sera toujours facile, à l'aide des méthodes connues, de remonter par la voie des intégrations successives, de cette différentielle à l'intégrale finie, parce que chaque différentielle pourra toujours être mise sous la forme $a d\zeta - \zeta da = 0$. Mais si les coefficients $A, B, C, A', B', \&c.$ ne sont pas indépendans, & que quelques-uns d'entr'eux soient des fonctions données des constantes primitives $a, b, c, \&c.$ alors si l'on différencie autant de fois qu'on a de quantités $a, b, c, \&c.$ & qu'on élimine ces constantes, on aura une équation différentielle qui sera généralement d'un degré élevé par rapport à la plus haute différentielle, & dont le degré dépendra de la manière dont les quantités $a, b, c, \&c.$ entrent dans la composition des coefficients $A, B, C, \&c.$ C'est cette équation qu'il s'agit d'intégrer.

Or, il est clair que si l'on différencie encore cette équation un nombre de fois assez grand pour qu'à l'aide des différentielles précédentes on puisse faire évanouir toutes les constantes, & qu'après l'élimination la différentielle de l'ordre supérieur soit linéaire, on aura précisément la même équation à laquelle on seroit parvenu, en différenciant l'intégrale finie de manière à faire évanouir tous les coefficients regardés comme indépendans; il sera donc facile de remonter de cette différentielle à l'intégrale finie : à la vérité cette intégrale contiendra plus de constantes arbitraires qu'il ne faudra pour satisfaire à la proposée; mais en substituant dans la proposée, pour y & ses différences, leurs valeurs prises dans l'intégrale finie, il faudra que cette équation soit satisfaite, ce qui établira entre les constantes des relations qui les réduiront au nombre convenable.

Je vais éclaircir cette méthode par quelques exemples.

I.

On sait qu'en faisant

$$\begin{aligned} d\zeta &= p dx + q dy, \\ dd\zeta &= r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2; \end{aligned}$$

l'équation

l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, trouvée par M. le Chevalier de Borda, est

$$(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0.$$

De plus, pour intégrer l'équation aux différences partielles

$$L r + M s + N t = 0,$$

dans lesquelles les coefficients L , M , N , sont fonctions quelconques de x , y , z , & des différences premières de z , il faut poser les deux équations suivantes aux différences ordinaires

$$L d p^2 + M d p d q + N d q^2 = 0,$$

$$L d y^2 - M d x d y + N d x^2 = 0;$$

& si les intégrales de ces deux équations sont $V = a$, $U = b$, a & b étant des constantes arbitraires, celle de l'équation aux différences finies, est $a = \phi b$, ou $V = \phi U$.

D'après cela, l'intégration de l'équation de la surface dont l'aire est un *minimum*, dépend donc en partie de celle-ci,

$$(1 + q^2) d p^2 - 2 p q d p d q + (1 + p^2) d q^2 = 0.$$

Pour intégrer cette équation par la méthode que je viens d'indiquer, je la différencie, en regardant l'une des deux différentielles comme constante, & l'on obtient directement $d d p = 0$, dont l'intégrale finie est $p = a q + C$, dans laquelle a & C sont des constantes arbitraires; mais comme il ne faut qu'une constante pour compléter l'intégrale de la proposée qui est du premier ordre, je substitue pour p & ses différences, leurs valeurs dans l'équation différentielle, qui pour être satisfaite exige que l'on ait $a^2 + C^2 + 1 = 0$; l'intégrale demandée est donc $p = a q + C$, a & C étant tels que l'on ait $a^2 + C^2 + 1 = 0$.

I I.

Posons qu'il soit question de trouver les équations des lignes de moindre & de plus grande courbure des surfaces du second degré.

Mém. 1783.

Y y y y

L'équation générale de ces surfaces rapportées à leurs axes principaux est

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = D^3,$$

& j'ai fait voir dans un Mémoire que j'ai lû sur les débblais & les remblais, que l'équation de la projection de la courbe demandée sur le plan des x & y , est, en conservant les abréviations de l'exemple précédent,

$$\frac{d y^2}{d x^2} [s(1 + q^2) - p q t] + \frac{d y}{d x} [r(1 + q^2) - t(1 + p)] - s(1 + p^2) + p q r = 0.$$

Si l'on substitue dans cette équation pour p, q, r, s & t , leurs valeurs prises dans l'équation de la surface, on a l'équation du second degré

$$A B (B - C) x y \frac{d y^2}{d x^2} + \frac{d y}{d x} [C D^3 (B - A) + A B x^2 (A - C) + A B y^2 (C - B)] - A B x y (A - C) = 0,$$

qui est de la forme

$$a x y \frac{d y^2}{d x^2} + \frac{d y}{d x} (b + x^2 - a y^2) - x y = 0,$$

& qu'il s'agit d'intégrer; pour cela je la différencie en regardant dx comme constant, & les deux constantes a & b s'évanouissant à la fois, j'ai pour équation linéaire

$$x y d d y + d y (x d y - y d x) = 0,$$

qu'il est facile de mettre sous cette forme

$$\frac{x}{y} d d y - d y d \left(\frac{x}{y} \right) = 0,$$

& dont l'intégrale finie est $y^2 = a x^2 + C$, a & C étant les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration.

Actuellement, si je mets dans la proposée pour y & dy leurs valeurs prises dans l'intégrale finie, je trouve que pour que l'équation résultante soit satisfaite, il faut que les constantes a & C aient entr'elles la relation exprimée par l'équation $a b = C (a a + 1)$; ainsi en éliminant C , l'intégrale demandée est $a b = (y^2 - a x^2) (a a + 1)$, a étant la constante arbitraire.

Pour déterminer cette constante, il faudra mettre dans l'intégrale pour x & y les valeurs de ces quantités, qui conviennent au point par lequel on veut que passe la courbe, & la constante a sera donnée par une équation du second degré. Si les deux racines de cette équation sont rationnelles, les deux lignes de moindre & de plus grande courbure seront distinctes & indépendantes, comme dans la sphère, dans le cône, & dans les surfaces de révolution; mais, lorsque la quantité sous le radical ne sera pas un carré parfait, ces lignes seront les deux branches d'une même courbe élevée, & dont le point que l'on considère sera un point double; on voit donc qu'en suivant ce procédé on n'est pas dispensé de la résolution des équations que rien ne peut suppléer, mais qu'on n'a besoin de résoudre l'équation qu'après l'intégration, ce qui rend cette dernière opération beaucoup plus simple.

I I I.

DANS la méthode que je viens d'exposer, il n'est pas toujours nécessaire de différencier autant de fois qu'il y a encore de constantes dans l'équation; il suffit qu'on parvienne à l'ordre de différentielle qu'on auroit eu en faisant évanouir tous les coefficients de l'intégrale finie, dans lesquels entrent comme élémens les constantes qui ont déjà disparu.

Par exemple, soit proposée l'équation

$$\frac{d y^2}{d x^2} [(x^2 + y^2 + b^2)^2 - 4 a^2 x^2] + 8 a^2 x y \frac{d y}{d x} \\ + (x^2 + y^2 + b^2)^2 - 4 a^2 y^2 = 0;$$

Y y y y ij

si on la différentie, & qu'on élimine b , on trouve en faisant, pour abrégér, $dy = p dx$,

$$\frac{a dp}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} + dx = 0,$$

dont l'intégrale finie est $(x - a)^2 + (y - C)^2 = a^2$, a & C étant deux constantes arbitraires; substituant ensuite dans la proposée pour y & dy leurs valeurs prises dans cette intégrale, on trouve que pour que l'équation résultante soit satisfaite, il faut que l'on ait $a^2 + C^2 = a^2 - b^2$, c'est-à-dire que la courbe à laquelle appartient l'équation, est en général un cercle dont le centre est à une distance donnée de l'origine.

Ces exemples suffisent pour éclaircir la méthode, qui dans les cas mêmes où l'équation n'a pas d'intégrale finie, peut être très-utile pour les premières intégrations.



M É M O I R E

*Sur l'intégration des Équations aux différences finies,
qui ne sont pas linéaires.*

Par M. M O N G E.

DANS un Mémoire précédent, j'ai donné une méthode générale pour intégrer les équations aux différences ordinaires, qui ne sont pas linéaires, toutes les fois que leurs intégrales finies & complètes sont algébriques, ou qu'elles peuvent être exprimées par des logarithmes & des arcs de cercle. Cette méthode consiste en général à différencier la proposée un nombre de fois suffisant pour faire disparaître toutes les constantes qui restent dans l'équation, ou au moins pour qu'après avoir fait disparaître certaines constantes, l'équation résultante soit linéaire par rapport à la différentielle de l'ordre supérieur; on est alors toujours conduit à une équation facile à intégrer en quantités finies.

Par exemple, soit proposé d'intégrer l'équation des tangentes au cercle

$$\frac{dy^2}{dx^2} (a^2 - x^2) + 2xy \frac{dy}{dx} + a^2 - y^2 = 0;$$

je la différencie, ce qui donne

$$(a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} ddy + xy ddy = 0,$$

équation qui a deux facteurs

$$dd y = 0$$

$$\& (a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0;$$

le premier qui est délivré de la constante a , donne $\frac{dy}{dx} = A$ constante arbitraire, & substituant cette valeur dans la proposée,

Lû
le 30 Nov.
1785.

$$A^2 (a^2 - x^2) + 2 Axy + a^2 - y^2 = 0.$$

Ce premier facteur est le seul que l'on doit employer pour trouver l'intégrale complète, parce qu'il est le seul qui, contenant des différences secondes, puisse introduire une constante arbitraire dans la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qu'il faut substituer dans la proposée. L'autre facteur,

$$(a^2 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

donnant directement une valeur de $\frac{dy}{dx}$ sans constante arbitraire, ne peut produire, par la substitution de cette valeur, qu'une intégrale particulière ou un cas de l'intégrale complète. Dans le cas dont il s'agit, si l'on substitue la valeur de $\frac{dy}{dx}$ que donne le second facteur, on a $x^2 + y^2 = a^2$, équation au cercle touché par toutes les droites auxquelles appartient la proposée, & qui est par conséquent son intégrale particulière.

La même méthode appliquée aux équations aux différences finies qui ne sont pas linéaires, donne des résultats analogues, avec des différences qui dépendent de la nature des choses : appliquons-là au cas le plus simple.

Soit proposé d'intégrer l'équation $(\Delta y)^2 = b^2$, b étant une constante absolue. En suivant les procédés ordinaires, on auroit $\Delta y = \pm b$, & en intégrant $y = \pm \frac{b}{a} x + A$, dans laquelle a est la différence finie de la variable principale x , & A est la constante arbitraire. Mais si l'on applique à l'équation $(\Delta y)^2 = b^2$ la méthode dont je viens de parler, il faut la différencier, ce qui donne

$$2 \Delta y \Delta \Delta y + (\Delta \Delta y)^2 = 0,$$

équation qui a deux facteurs

$$\Delta \Delta y = 0$$

$$\& 2 \Delta y + \Delta \Delta y = 0:$$

le premier donne, par une première intégration, $\Delta y = B$,
& par une seconde $y = \frac{Bx}{a} + A$, dans laquelle dé-
terminant B de manière que la proposée soit satisfaite, on a
 $B = \pm b$, & par conséquent

$$y = \pm \frac{bx}{a} + A$$

comme par les méthodes ordinaires.

Le premier facteur n'est pas le seul que l'on doive em-
ployer pour trouver l'intégrale complète. L'autre facteur
 $2\Delta y + \Delta\Delta y = 0$ étant du même ordre différentiel
& d'une aussi grande généralité que le premier, doit être
employé de même; si donc on l'intègre une première fois,
on a $2y + \Delta y = 2C$, & une seconde fois, on a

$y = C + D \left(-1 \right)^{\frac{x}{a}}$, C & D étant des constantes
arbitraires : déterminant ensuite une de ces constantes de
manière à satisfaire à la proposée, on trouve $D = \pm \frac{b}{2}$,
& l'intégrale dont il s'agit devient

$$y = C \pm \frac{b}{2} \left(-1 \right)^{\frac{x}{a}}.$$

Cette équation satisfait comme la précédente à l'équation
 $(\Delta y)^2 = b^2$, ce qui est facile à vérifier; elle est aussi
générale, puisqu'elle contient aussi une constante arbitraire,
& elle n'en est pas un cas particulier, puisqu'il n'y a aucune
valeur constante de C qui puisse rendre ces deux intégrales
identiques; donc l'intégrale complète de la proposée est le
produit des quatre équations

$$y - A = + \frac{bx}{a},$$

$$y - A = - \frac{bx}{a},$$

$$y - A = + \frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}},$$

$$y - A = - \frac{b}{2} (-1)^{\frac{x}{a}}.$$

On voit donc 1.^o que la méthode que j'avois proposée dans le Mémoire précédent, simplement comme utile pour l'intégration des équations aux différences ordinaires, devient nécessaire pour celle des équations aux différences finies, puisque sans elle ou du moins sans un procédé équivalent, on n'auroit pas les dernières solutions; 2.^o que ces dernières solutions ne sont autre chose que ce que devient dans le cas des différences finies, l'intégrale particulière de l'équation analogue aux différences ordinaires.

Je terminerai ce Mémoire par l'application de cette méthode à l'intégration de l'équation du troisième degré

$$(\Delta y)^3 = b^3.$$

Je la différencie, ce qui fait disparaître la constante b , & donne

$$3(\Delta y)^2 \Delta \Delta y + 3\Delta y (\Delta \Delta y)^2 + (\Delta \Delta y)^3 = 0,$$

équation qui a les deux facteurs

$$\Delta \Delta y = 0$$

$$\& 3(\Delta y)^2 + 3\Delta y \Delta \Delta y + (\Delta \Delta y)^2 = 0.$$

Le premier facteur donne pour intégrale complète,

$$y = B \frac{x}{a} + A,$$

dans laquelle A & B sont les constantes arbitraires introduites par les deux intégrations: déterminant ensuite B de manière que la proposée soit satisfaite, on trouve $B^3 = b^3$, & cette intégrale devient

$$y = \frac{bx}{a} \sqrt[3]{(-1)} + A,$$

qu'on auroit trouvée par les méthodes ordinaires.

L'autre

L'autre facteur n'étant pas lui-même linéaire, je le traite comme la proposée; & pour cela, après avoir fait, pour abrégé

$$\frac{\Delta \Delta y}{\Delta y} = V, \text{ ce qui le réduit à}$$

$$3 + 3V + V^2 = 0,$$

je le différencie, ce qui donne

$$3 \Delta V + 2V \Delta V + (\Delta V)^2 = 0;$$

équation qui est composée des deux facteurs

$$\Delta V = 0$$

$$\& 3 + 2V + \Delta V = 0,$$

le premier donne $V = C$ ou $\Delta \Delta y = C \Delta y$, & en intégrant encore deux fois

$$Cy + D = E (C + 1)^{\frac{x}{a}};$$

déterminant ensuite deux des trois constantes arbitraires C, D, E , de manière que la proposée soit satisfaite, je trouve

$E^3 = b^3$ & $C = \frac{-3 + \sqrt{(-3)}}{2}$; en sorte que la solution fournie par ce facteur, est

$$\frac{-3 + \sqrt{(-3)}}{2} y + D = b^3 \sqrt[3]{(1)} \left[\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2} \right]^{\frac{x}{a}},$$

qui renferme la constante arbitraire \bar{D} , & n'est pas comprise dans la première. Enfin, le troisième facteur

$$3 + 2V + \Delta V = 0,$$

a pour première intégrale,

$$V + \frac{3}{2} = A (- 1)^{\frac{x}{a}},$$

$$\text{ou } \frac{\Delta \Delta y + \Delta y}{\Delta y} = A (- 1)^{\frac{x}{a}} - \frac{3}{2},$$

Mém. 1783.

Zzzz

$$\Delta y = B \left[A \left(- 1 \right)^{\frac{x}{a} - 1} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} \right],$$

en représentant par la parenthèse, comme M. Vandermonde, le produit de toutes les quantités qu'on obtiendrait en diminuant x dans ce qu'elle renferme, successivement de a , de $2a$, de $3a$, &c, & l'intégrale troisième, représentée par

$$y = \Sigma B \left[A \left(- 1 \right)^{\frac{x}{a} - 1} - \frac{1}{2} \frac{x}{a} \right],$$

contiendra trois constantes arbitraires; on en déterminera deux de manière à satisfaire à la proposée, & l'on aura une troisième solution générale de l'équation aux différences finies du troisième degré; & parce que chacune de ces trois solutions a trois racines distinctes, fournies par les racines cubiques de l'unité, il s'ensuit que l'intégrale complète de la proposée a neuf racines distinctes: il en sera de même pour les degrés plus élevés.



M É M O I R E

*Sur le Sel ammoniacal vitriolique , ou Sel secret
de Glauber , & sur le Sel ammoniacal nitreux.*

Par M. C O R N E T T E.

LES deux Sels qui feront le sujet de ce Mémoire, ont été très-peu examinés par les Chimistes : le sel ammoniacal vitriolique paroît être le seul qui a jusqu'ici le plus fixé leur attention, aussi trouve-t-on çà & là quelques notices sur ce sel, dans plusieurs ouvrages de Chimie. Glauber & Pott sont ceux qui l'ont traité d'une manière plus particulière; le premier, sans cependant être l'auteur de ce sel, est celui qui a le mieux fait connoître cette combinaison; il le regardoit comme un vrai Protée, c'étoit, selon lui, un menstrue universel, & il croyoit, ainsi qu'il l'avance dans la septième partie de sa Pharmacopée spagirique, qu'en employant ce sel sur les métaux, on pouvoit les réduire à leur premier principe & à leur première matière; il appeloit la liqueur qu'il en retiroit, *eau mercurielle subtile*.

Janvier
1776.

M. Pott, moins enthousiaste que Glauber, surpris des propriétés que ce Chimiste accordoit à ce sel, résolut de répéter ses expériences : il reconnut bientôt qu'il y avoit beaucoup à rabattre sur les effets si vantés de ce sel, puisque ses résultats se trouvèrent absolument contraires à ce que Glauber avoit avancé; ce qui lui donna lieu de faire sur cette matière une Dissertation assez étendue, qui se trouve dans le quatrième volume de ses Dissertations chimiques, traduction françoise, page 265.

Malgré l'attention & l'exactitude de M. Pott, à réduire ce sel à sa juste valeur, la Dissertation ne paroît pas sans erreur; il eût dû, ce me semble, pour donner à ses expériences plus d'authenticité, s'assurer par lui-même de la

Z z z z ij

nature de ce sel, au lieu de s'en rapporter, pour le fond, à la doctrine de Glauber, il eût vû, 1.^o que le sel ammoniacal vitriolique se décompose en partie & sans intermède, exposé au feu; 2.^o Que le sel que l'on forme par la décomposition du sel ammoniac avec l'acide vitriolique, ne doit point être regardé comme un vrai sel secret de Glauber, mais plutôt comme un mélange de sel secret & de sel ammoniac non décomposé. Cette difficulté qu'à l'acide vitriolique, de décomposer le sel ammoniac, vient à l'appui de ce que j'ai déjà avancé dans mon Mémoire sur la décomposition par l'acide marin, des sels vitrioliques & nitreux à bases d'alkalis fixes & volatils, & prouve de plus en plus l'exception qu'elle occasionne à la Table d'affinités, puisque l'acide marin décompose avec plus de facilité le sel ammoniacal vitriolique, que l'acide vitriolique ne le fait pour le sel ammoniac ordinaire.

Je ne parlerai pas de ce qu'ont écrit sur ce sel plusieurs autres Chimistes, puisqu'ils se sont tous copiés les uns & les autres, & que ce qu'ils en disent ne contient rien de particulier & se trouve en grande partie conforme à la Dissertation de M. Pott.

Le sel ammoniacal nitreux paroît n'avoir été examiné que très-superficiellement par les Chimistes modernes; on ne connoît des propriétés de ce sel, que sa détonation & son inflammation, sans addition de phlogistique dans les vaisseaux ouverts & fermés: la crainte & le peu d'utilité ont empêché qu'on ne poussât plus loin cet examen, & ont ralenti les connoissances que l'on auroit pu acquérir sur sa nature & ses effets.

Cependant, comme le défaut de connoissance sur les choses les plus simples & même les moins utiles, s'oppose toujours aux progrès des Sciences physiques, j'ai cru, malgré l'écueil que j'avois à éviter, devoir chercher à connoître ce sel; j'ai fait sur cette matière plusieurs expériences, avec toute la circonspection qu'exigeoit la substance que j'allois soumettre à l'examen; je n'ai pas été long-temps à m'apercevoir que les craintes des Chimistes étoient peu fondées, je me suis convaincu, 1.^o qu'en employant ce sel très-pur, il se

sublimoit plus facilement , & exigeoit beaucoup moins de chaleur que le sel ammoniac ordinaire ; 2.^o que sa détonation dans les vaisseaux fermés , n'étoit ni aussi prompte , ni aussi rapide qu'on l'a prétendu jusqu'ici , puisque pour y parvenir d'une manière exacte , j'ai été obligé d'avoir recours à l'appareil que l'on emploie pour faire le clissus de nitre ; on verra par la suite les phénomènes qui accompagnent cette détonation.

Comme ces deux sels , dont je me suis proposé de traiter , exigent que j'entre dans des détails assez étendus , j'ai cru , pour mettre plus d'ordre dans ce Mémoire , devoir le diviser en deux parties ; dans la première partie , je parlerai du sel ammoniacal vitriolique , de sa cristallisation , de sa décomposition dans les vaisseaux ouverts & fermés , de l'action de l'acide vitriolique sur le sel ammoniac : je passerai ensuite à l'action du sel ammoniacal vitriolique sur les métaux , sur le nitre ; & enfin , je terminerai cette première partie par l'examen de l'action de l'acide nitreux sur le sel ammoniacal vitriolique.

Dans la seconde partie , j'examinerai le sel ammoniacal nitreux , sa sublimation , sa détonation , & son inflammation dans les vaisseaux ouverts & fermés ; je démontrerai que dans cette détonation l'alkali volatil est entièrement détruit , sans que l'acide nitreux soit en aucune manière altéré ; je parlerai de l'action du sel ammoniac ordinaire , du sel ammoniacal vitriolique , & de l'alkali volatil sur le nitre. J'examinerai l'action du sel ammoniacal nitreux sur le charbon , de l'acide nitreux sur le charbon , de divers mélanges de poudre à canon faite avec le sel ammoniacal nitreux ; & enfin , je terminerai cette seconde partie par prouver que l'on peut distiller facilement , & sans crainte , le sel ammoniac avec l'acide nitreux ; je ferai voir que l'eau régale que l'on en retire peut se conserver très-facilement , & qu'elle n'est pas aussi expansible que celle qui résulte du simple mélange de l'acide nitreux & du sel ammoniac ,

PREMIÈRE PARTIE.

Sur le sel ammoniacal vitriolique.

LA diversité de sentiment qui règne parmi les Auteurs qui ont traité de la cristallisation de ce sel, m'a engagé à en faire un examen ultérieur ; les uns, tel que M. Pott, prétendent qu'il cristallise en forme de plume ; d'autres au contraire, tel que M. Brandt, disent, ainsi qu'on peut le voir, *page 156*, dans le premier volume des Mémoires des Académies d'Upsal & de Stockholm, qu'il cristallise en forme de feuillets minces placés sans ordre ; & le plus grand nombre des autres avancent qu'il cristallise en aiguilles : pour éclaircir mes doutes, j'ai eu recours à l'expérience.

J'ai pris huit onces d'huile de vitriol concentrée, que j'ai affoiblie en y ajoutant une livre d'eau distillée ; j'ai versé sur cet acide, à plusieurs reprises & jusqu'à parfaite saturation, une suffisante quantité d'alkali volatil concret qui avoit été dégagé du sel ammoniac par l'intermède de l'alkali fixe ; j'ai fait évaporer la liqueur dans une capsule de verre au bain de sable, jusqu'à légère pellicule ; je retirai pour lors le vaisseau du feu, une portion du sel grimpa, par le refroidissement, aux parois du verre, tandis qu'une autre portion forma des cristaux réguliers au fond de la liqueur ; j'examinai les cristaux, je ne leur trouvai point les formes indiquées par les Chimistes que je viens de citer, je m'aperçus au contraire que chaque cristal étoit un prisme à six pans comprimés, terminé par une pyramide hexaèdre obtuse ; ce sel, comme l'on voit, se rapproche assez du tartre vitriolé, & il n'en diffère que parce que le prisme à six pans dans ce dernier n'est point comprimé, & que la pyramide hexaèdre est composée de six triangles. Je continuai l'évaporation de la liqueur, j'obtins toujours des cristaux semblables à ceux que je viens de décrire ; ce sel en cet état étoit parfaitement neutre, & c'est celui que j'ai employé pour toutes mes expériences.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Je mis dans un creuset un gros de sel ammoniacal vitriolique en cristaux, un instant après il pétila comme le tartre vitriolé, & il commença à s'élever une vapeur blanche qui avoit une forte odeur d'alkali volatil; le creuset étant un peu refroidi, tout le sel ne put se dissiper en vapeurs, la petite portion qui resta étoit acide, & changée sur le champ en une couleur d'un rouge-foncé la teinture de Tournesol; ayant répété l'expérience de nouveau, j'observai également que la première vapeur qui s'éleva étoit de l'alkali volatil, & que l'acide, comme plus pesant, se dissipa ensuite.

Quelque peu concluante que paroisse cette première expérience, on peut cependant en inférer que le sel ammoniacal vitriolique, exposé à la violence du feu dans les vaisseaux ouverts, est susceptible de se décomposer, puisque l'on distingue facilement les deux substances qui le constituent.

Ce même sel exposé dans un matras au bain de sable, n'a pu se sublimer en entier, quoique la chaleur que j'avois employée, eût été très-forte, & eût été continuée pendant plus de quatre heures; il se dégagait de même de l'alkali volatil, & la matière saline restée dans le matras, étoit très-acide, & rougissoit fortement la teinture de tournesol.

L'expérience suivante va prouver encore, que ce sel soumis à la violence du feu dans les vaisseaux fermés, y souffre la même altération que dans ceux où l'air a un libre accès.

J'ai mis dans une cornue de verre une demi-once de sel ammoniacal vitriolique pulvérisé, je plaçai sur un bain de sable cette cornue, à laquelle j'adaptai un récipient; j'échauffai ces vaisseaux par degrés, il passa premièrement deux ou trois gouttes d'eau, qui étoient l'eau de la cristallisation de ce sel; il succéda ensuite à une chaleur un peu plus forte, de l'alkali volatil en liqueur, & ce ne fut que quelque temps après qu'il commença à s'élever quelques fleurs blanches je délutai le récipient pour en substituer un autre, & ayant

augmenté le feu au point de faire rougir la cornue, une bonne partie de ce sel se sublima : les dernières portions de ce sel sublimé étoient acides, & ne devoient leur acidité qu'à l'acide sulfureux volatil qui se dégagëa à la fin de l'opération ; la matière qui restoit dans la cornue, ne formoit plus qu'une masse opaque très-acide, qui attiroit promptement l'humidité de l'air ; la petite quantité de liqueur qui étoit passée dans le ballon, avoit une très-forte odeur d'acide sulfureux volatil.

J'ai répété la même expérience avec le même sel préparé, soit avec l'alkali volatil dégagé par la chaux, soit avec celui dégagé par la craie, & j'en ai toujours obtenu les mêmes résultats.

Enfin, pour mettre le complément à toutes ces expériences, j'ai cru devoir m'assurer si le sel ammoniacal vitriolique sublimé, pouvoit se ressublimier de nouveau sans se décomposer : je mis pour cet effet deux gros de ce sel sublimé dans une cornue de verre, je procédai pour cette opération, ainsi que je viens de le décrire pour l'expérience précédente ; la décomposition eut également lieu, de ces deux gros de sel, un demi-gros seulement se sublima, il passa dans le récipient un demi-gros d'alkali volatil en liqueur, & le sel qui restoit au fond de la cornue, étoit d'une couleur grise, parsemé de taches noirâtres, il avoit une forte odeur d'acide sulfureux volatil.

On est donc en droit de conclure, d'après ces expériences, que la combinaison de l'acide vitriolique avec l'alkali volatil, n'est pas aussi intime que celle faite avec les autres acides, puisque ces deux substances se séparent par l'action du feu, dans les vaisseaux ouverts & fermés.

Je vais présentement examiner l'action de l'acide vitriolique sur le sel ammoniac, & faire voir que la décomposition de ce sel par cet acide, ne s'opère pas complètement, puisque l'on en retrouve toujours une certaine quantité qui n'a souffert aucune altération.

Décomposition

Décomposition du Sel ammoniac par l'Acide viuriolique.

Je mis dans une cornue de verre tubulée, une once de sel ammoniac en poudre, je plaçai sur un bain de sable, cette cornue à laquelle j'adaptai un récipient; ces vaisseaux étant ainsi disposés, j'ajoutai, à plusieurs reprises, par la tubulure, une once & demie d'esprit de vitriol, qui étoit à l'eau distillée, comme 12 est à 8 : dans l'instant du mélange il se fit une effervescence, & il se dégagèa beaucoup de vapeurs blanches d'acide marin; mais ayant fermé la tubulure, le mouvement cessa, & la liqueur prit quelque temps après une couleur jaune-citrine; je laissai pendant deux heures ce mélange en digestion, afin que le sel ammoniac fût mieux pénétré par l'acide, ensuite je donnai un feu fort doux pour faire sortir les premières vapeurs, & je le conduisis de manière à faire rougir le fond du vaisseau : il s'excita sur la fin une effervescence assez vive, la liqueur étoit plus pesante, & formoit des stries en se réunissant au col de la cornue; cette effervescence eut lieu tant qu'il resta de l'humidité: il se sublima pour lors une petite quantité de sel, mais la plus grande partie étoit restée au fond du vaisseau, & formoit deux couches, l'une étoit fondue, & l'autre étoit sublimée à sa surface; la liqueur contenue dans le récipient, étoit claire, sans couleur, & avoit, à la couleur près, toutes les propriétés de l'acide marin, qui, quelque rectifié qu'il soit, est toujours coloré; cet acide a cela de particulier, qu'il ne se forme point au haut des flacons qui le contiennent, des taches grasses, comme cela arrive à l'acide marin ordinaire, & même le mieux rectifié.

M. Pott, à la page 281 de sa Dissertation déjà citée, dit que si l'on combine cet acide avec de l'esprit-de-vin rectifié, on en obtient une espèce d'éther marin; j'ai répété cette expérience, mais sans aucun succès: la liqueur que j'en ai obtenue, avoit bien à la vérité une odeur éthérée, mais je me suis aperçu par l'odeur d'acide sulfureux volatil qui s'est échappée lorsque j'ai déluté les vaisseaux, que cette

odeur éthérée étoit plutôt le résultat de la combinaison de l'acide vitriolique avec l'esprit-de-vin, que de l'acide marin.

Je fis dissoudre séparément dans de l'eau distillée, les deux sels restés au fond de la cornue; la dissolution de celui qui s'étoit sublimé, se fit facilement & produisit assez de froid, l'autre eut plus de peine à se dissoudre: ces deux dissolutions filtrées étoient claires, sans couleur, la première étoit très-peu acide, mais la seconde l'étoit beaucoup; soumises toutes deux à l'évaporation, j'obtins de la première dissolution, du sel ammoniac tout pur; la seconde, quoique très-acide, me fournit un sel disposé par lames; chaque cristal de ce sel formoit autant de prismes triangulaires tronqués sur leurs côtés, il se trouvoit encore mêlé de sel ammoniac qui n'avoit souffert aucune altération.

Quoique la quantité d'acide vitriolique que j'avois employée pour cette opération, me parut suffisante pour décomposer cette dose de sel ammoniac, je craignis cependant que son affoiblissement avec l'eau distillée, ne portât obstacle à sa parfaite décomposition; je résolus de répéter cette expérience, mais avec de l'huile de vitriol concentré pur, & sans addition.

Dans le même appareil dont je viens de parler, je mis une once d'huile de vitriol concentré & autant de sel ammoniac; dans l'instant du mélange il se fit une effervescence considérable, & il se dégagea beaucoup de vapeurs blanches, la matière se raréfia au point qu'elle eût passé par le col de la cornue, si ce vaisseau n'eût été d'une capacité proportionnée à cette raréfaction; les vapeurs qui passaient dans le récipient, avoient beaucoup de peine à se condenser, & quoique le feu fût bien ménagé, j'étois obligé d'en faciliter de temps en temps l'issue en débouchant l'ouverture qui y étoit pratiquée: après six heures de feu, je délutai les vaisseaux, je versai la liqueur contenue dans le récipient, dans un flacon bouché de cristal, c'étoit de l'acide marin, clair, sans couleur, semblable à celui de l'opération précédente, il étoit très-fumant, mais combiné avec de l'esprit-de-vin rectifié, il ne m'a point fourni d'éther marin; la matière saline restée dans la cornue,

formoit deux couches, dont l'une fondue & l'autre sublimée, ces deux sels dissous séparément, m'ont fourni deux gros de sel ammoniac non décomposé, & une pareille quantité de ce sel brillant disposé par lames, que j'ai déjà décrit : il m'est resté un magma salin très-acide, qui contenoit encore un peu de sel ammoniac non décomposé.

Ces deux expériences démontrent, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, que l'acide vitriolique n'agit pas sur le sel ammoniac ordinaire, comme l'acide marin sur le sel ammoniacal secret, puisque la décomposition ne se fait que très-imparfaitement.

Model avoit déjà entrevu cette vérité, mais incertain de son opération, il n'a pu en tirer aucune conséquence : voici ce qu'il dit au second volume de ses Récréations chimiques, traduction françoise, *page 236*. « J'ai versé sur quatre onces de notre sel, dit cet habile Chimiste (c'est du sel ammoniac dont il veut parler) une once d'huile de vitriol affoibli, & « cela dans la vue que cet acide n'y dominât point; je soumis « ce mélange à la distillation, la liqueur que j'obtins, fut un « acide marin pur; j'ai fait dissoudre le résidu dans de l'eau « distillée, puis filtrée & évaporée jusqu'à siccité, pour essayer « de le sublimer, mais ce ne fut qu'à la plus grande violence « du feu qu'il se volatilisa quelque chose, encore étoit-ce « des fleurs, le restant se vitrifia & demeura au fond de la « cornue: je ne déciderai pas, continue-t-il, si ces fleurs étoient « du sel secret de Glauber, ou du sel ammoniac encore entier, « vu le peu d'acide que j'avois employé ». Model n'avoit pas pour but le même objet que moi, autrement il se seroit convaincu par une seconde expérience plus exacte, que la portion de sel qui s'étoit sublimée, étoit du sel ammoniac qui avoit résisté à l'action de l'acide vitriolique.

Quoique cette expérience ne soit rien moins que concluante, j'ai cru cependant devoir la rapporter ici, puisqu'elle vient à l'appui de ce que j'avance, & sert à confirmer de plus en plus mon opinion.

Enfin, pour ne plus laisser aucun doute sur ce sujet, j'ai

cru devoir procéder différemment, & traiter le sel ammoniac par la voie de la dissolution.

Je fis dissoudre dans de l'eau distillée deux onces de sel ammoniac, je versai sur cette dissolution une once & demie d'acide vitriolique, la liqueur s'échauffa, mais beaucoup moins que si l'eau eût été seule, il n'y eut point d'effervescence, & il ne se dégagera que très-peu d'acide marin; je fis évaporer la liqueur dans une capsule de verre jusqu'à la concurrence des trois quarts de l'humidité, & l'ayant laissé refroidir, j'observai que la plus grande partie des cristaux de ce sel, quoique formés dans une liqueur très-acide, étoient tous disposés en forme de barbe de plume; j'examinai ces cristaux, & je vis avec plaisir que c'étoit de vrai sel ammoniac qui n'avoit souffert aucune altération; je soupçonnai dès-lors que si cette décomposition ne s'opéroit pas complètement, cela ne pouvoit dépendre, ainsi que je l'ai déjà démontré, que de ce que l'acide marin constituant du sel ammoniac, chassé de sa base par l'acide vitriolique, pouvoit se reporter sur le sel ammoniacal vitriolique déjà formé, & le redécomposer de nouveau; je laissai les cristaux dans la liqueur, afin que l'acide surabondant pût agir davantage sur ce sel non décomposé; je continuai l'évaporation, & entretins cette matière saline dans une sorte d'état de fusion pendant plus d'une heure: elle avoit pour lors une consistance huileuse, elle laissoit dégager beaucoup de vapeurs d'acide marin si on l'agitoit, mais si l'on interrompoit l'agitation, il ne s'en dégageroit plus aucune; cette matière saline, avant son entier refroidissement, se convertit en une masse ferme & solide, elle attiroit promptement l'humidité de l'air, & étoit extrêmement acide; cette matière redissoute de nouveau dans l'eau distillée, me fournit encore une très-grande quantité de sel ammoniac qui n'avoit pas été décomposé.

Toutes ces expériences prouvent donc que pour obtenir un sel secret de Glauber, pur & exempt de matières étrangères, il faut le préparer par la combinaison immédiate de l'acide vitriolique & de l'alkali volatil, & non point avec

le sel ammoniac & l'acide vitriolique, autrement on s'expose à tomber dans l'erreur; c'est ce que l'on verra ci-après.

Comme les expériences de M. Pott ont été faites, en bonne partie, avec le sel ammoniacal vitriolique ainsi obtenu par la décomposition du sel ammoniac, il doit s'ensuivre, par ce que je viens de dire, que le plus grand nombre des corollaires qu'il tire, sont fondés, sur le peu de connoissance qu'il avoit de son sel; je ne citerai seulement qu'un exemple, on pourra consulter pour le reste, sa Dissertation, page 310. M. Pott dit, « j'ai mêlé de la mine de bismuth, dont l'arsenic avoit été chassé, avec partie égale de « sel ammoniacal secret, & en ai fait la distillation, alors, il « provient, continue-t-il, un peu d'esprit urinaire; j'ai dissous « le reste dans l'eau, & l'ayant filtré, cela a donné une solution « d'un rouge-pâle, laquelle, si l'on s'en sert pour écrire, devient « verte à la chaleur, de manière qu'on se procure par cette voie « une encre de sympathie sans addition du sel commun»: par cette expérience, on s'aperçoit que M. Pott ne soupçonnoit point qu'il restât dans son sel, du sel ammoniac non décomposé, autrement il auroit vu que l'acide marin, un des principes constituans du sel ammoniac, chassé de sa base par la distillation, avoit porté son action sur le cobalt contenu dans la mine de bismuth, & avoit produit l'encre de sympathie.

Sel ammoniacal vitriolique, sur les Métaux.

Ce sel n'a aucune action marquée sur les métaux parfaits, mais il calcine les autres métaux; j'ai distillé séparément des mélanges de deux gros de sel ammoniacal vitriolique pur, avec un gros de limaille de cuivre, de fer & de zinc, il s'est dégagé de chacun de ces mélanges beaucoup d'alkali volatil, & il s'est sublimé une petite quantité de sel ammoniacal secret, qui avoit une très-forte odeur d'acide sulfureux volatil; les métaux restés dans les cornues, avoient tous perdus leur éclat métallique: je versai de l'eau bouillante sur chacun de ces résidus, j'en obtins par l'évaporation différentes espèces de vitriols, selon les métaux que j'avois

employés; Glauber avoit déjà fait la même remarque, il dit dans sa Pharmacopée spagirique, que si l'on combine le sel secret avec l'étain, le cuivre & le fer, le métal est attaqué par l'acide, que le mercure de ces métaux devient libre par la distillation, & que l'alkali volatil l'enlève avec lui: cette décomposition de ce sel avec les métaux, est un obstacle pour qu'on puisse l'employer pour l'étamage.

Ce sel se décompose avec les terres calcaires, comme le sel ammoniac ordinaire; projeté sur du nitre en fusion, il l'enflamme & le fait détoner sur le champ: je donnerai la théorie de cette décomposition dans la seconde partie de ce Mémoire.

Avant de terminer cette première Partie, j'ai cru devoir examiner encore l'action de l'acide nitreux sur le sel ammoniacal vitriolique; je n'ai pu me dispenser de faire cette expérience, puisqu'étant parvenu à la décomposition par l'acide marin, des sels ammoniacaux vitrioliques & nitreux, & l'ayant déjà prouvée dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie, il étoit essentiel que j'examinasse si l'acide nitreux produiroit sur le sel ammoniacal vitriolique, le même effet que sur le tartre vitriolé.

Je mis dans un matras deux gros de sel ammoniacal vitriolique pur, sur lequel je versai quatre gros d'esprit de nitre très-pur, qui pesoit dix gros trente-six grains, dans une bouteille qui contenoit juste une once d'eau distillée; ce sel, par ce simple mélange, s'est dissous entièrement & à froid dans cet acide, il ne s'est excité ni chaleur ni aucun mouvement sensible, la dissolution étoit très-claire & sans couleur; je plaçai ce matras sur un bain de sable, & après avoir fait évaporer un peu de liqueur, je la laissai refroidir; je n'obtins par ce moyen aucuns cristaux, la liqueur au contraire attira l'humidité de l'air, & la dissolution avoit conservé toute sa diaphanéité; je soumis de nouveau cette liqueur saline à l'évaporation, & l'ayant fait dessécher jusqu'à siccité, j'observai que par ce moyen le sel secret n'avoit pas

été décomposé, puisque ce sel n'avoit aucune des propriétés du sel ammoniacal nitreux.

Je crus ne devoir point m'en tenir à cette première expérience pour décider affirmativement sur cette opération, la voie de la distillation me parut plus propre & plus convenable ; je soumis pour cet effet un pareil mélange à la distillation dans une cornue de verre, il passa premièrement une bonne quantité de liqueur claire & limpide ; sur la fin de l'opération, ayant augmenté le feu, il s'excita dans la cornue une effervescence assez considérable qui en éclaboussa un peu les parois, il parut pour lors quelques vapeurs rutilantes, mais peu de temps après elles furent succédées par d'autres vapeurs très-blanches qui obscurcirent entièrement le récipient : l'opération étant finie, je délutai les vaisseaux, je versai la liqueur contenue dans le balon, dans un flacon bouché de cristall, c'étoit de l'acide nitreux, clair, sans couleur, qui n'avoit perdu aucune de ses propriétés, il tenoit un peu de sel en dissolution. La matière restée dans la cornue, étoit sous deux états, une très-petite partie s'étoit sublimée, & l'autre s'étoit fondue & occupoit le fond de ce vaisseau ; je détachai, avec assez de peine, le sel qui s'étoit sublimé au col de la cornue, & je reconnus bientôt par l'examen auquel je le soumis, que c'étoit du vrai sel ammoniacal nitreux, puisqu'il étoit, comme lui, susceptible de s'enflammer seul & sans aucune addition de phlogistique étranger : la matière au contraire restée au fond de la cornue, étoit très-acide & n'avoit point été décomposée ; je la fis dissoudre dans de l'eau distillée, & de quelque manière que je m'y sois pris, je n'ai jamais pu en obtenir aucuns cristaux de sel ammoniacal nitreux.

Quoique la décomposition de ce sel n'ait pas été aussi complète que celle du tartre vitriolé par le même acide, je conjecture cependant que son action peut être la même ; mais je pense que ce qui occasionne cette différence, ne peut dépendre que de la déliquescence du sel ammoniacal nitreux lui-même, puisqu'il peut arriver que la décomposition

étant faite, la petite quantité de liqueur qui reste, & qui tient le sel ammoniacal nitreux en dissolution, étant trop rapprochée, & par conséquent trop voisine de l'acide vitriolique cet acide reprenne ses droits, décompose le sel ammoniacal nitreux nouvellement formé, pour reproduire le même sel tel qu'il existoit auparavant.

Au reste, cette expérience considérée de toutes les manières, prouve toujours, ainsi que je l'ai déjà avancé, que l'acide marin a plus d'affinité avec les sels à bases d'alkalis volatils, que l'acide nitreux lui-même, puisqu'il les décompose avec plus de facilité.



M É M O I R E

S U R

LE SEL AMMONIACAL NITREUX.

Par M. CORNETTE.

S E C O N D E P A R T I E.

LE Sel ammoniacal nitreux dont je me suis servi pour mes expériences, a été préparé avec de l'acide nitreux très-pur, précipité par l'argent, & distillé de nouveau; l'alkali volatil étoit aussi très-pur, & avoit été dégagé du sel ammoniac par l'intermède de l'alkali fixe; le sel que j'ai obtenu de cette combinaison, étoit en cristaux disposés en longues aiguilles, & s'est trouvé parfaitement neutre.

Janvier
1776.

P R E M I È R E E X P É R I E N C E.

LE sel ammoniacal nitreux exposé dans un creuset légèrement échauffé, se liquéfie facilement sans se décomposer, de sorte qu'on peut le couler, à l'instar du sel connu improprement sous le nom de *cristal minéral*; quelques instans après qu'il est fondu, il s'élève de la surface de ce sel beaucoup de vapeurs blanches qui n'ont aucune odeur particulière d'acide nitreux & d'alkali volatil; j'ai rassemblé dans un cône que je mis sur le creuset, quelques-unes de ces vapeurs, je reconnus bientôt par l'examen que je fis de cette matière sublimée, que c'étoit du sel ammoniacal nitreux qui n'avoit souffert aucune altération, il étoit resté parfaitement neutre; le creuset ayant été échauffé un peu plus, la portion de sel qui restoit s'enflamma rapidement, mais sans détoner ou sans faire d'explosion.

Cette première expérience me détermina à tenter la sublimation de ce sel; j'étois en partie rassuré sur les dangers que

Mém. 1783.

B b b b b

j'avois à craindre, puisque par l'exposé que je viens de faire, je m'étois déjà aperçu que du terme de sa sublimation à celui de son inflammation, il se passoit un intervalle assez grand, & que pour parvenir à le sublimer, il falloit seulement saisir le degré de chaleur convenable : dans ces vues, je mis dans un petit matras à long col deux gros de sel ammoniacal nitreux, je plaçai ce vaisseau sur un bain de sable, ce sel se liquéfia à une très-douce chaleur, il s'éleva quelque temps après, beaucoup de vapeurs blanches, dont une partie se dissipa en pure perte ; & enfin ayant un peu augmenté le feu, ce sel se sublima en entier très-facilement, puisqu'il ne fit monter le thermomètre à mercure, construit sur l'échelle de Réaumur, que de 90 degrés.

Enhardi par cette seconde expérience, je pensai que la sublimation de ce sel devoit se faire également bien dans les vaisseaux fermés, comme dans les vaisseaux ouverts : je mis pour cet effet dans une cornue de verre, deux gros de sel ammoniacal nitreux, je plaçai sur un bain de sable cette cornue, à laquelle j'adaptai un récipient, j'exposai cet appareil au milieu d'une cour, pour me mettre à l'abri du danger que je pouvois craindre ; ce sel, comme je l'ai déjà dit, se liquéfia facilement, il se répandit dans le récipient beaucoup de vapeurs blanches qui l'obscurcirent pendant quelque temps, une partie du sel fut emportée dans le ballon à la faveur de l'eau de cristallisation, & cristallisa aux parois ; l'autre partie, par le défaut d'humidité, se sublima au col de la cornue : la petite quantité de liqueur contenue dans le récipient, avoit une légère odeur d'acide nitreux, & tenoit du sel ammoniacal nitreux en dissolution. J'ai répété ces expériences plusieurs fois, même en plus grande dose, & elles ont toujours été suivies du même succès.

On trouve dans la Chimie de *Rott, traduite par Clausier*, le passage suivant : cet auteur dit, *page 147*, « que la combinaison de l'acide nitreux avec un esprit urineux, fuse longtemps comme le nitre, & que ce sel peut se sublimer totalement ; » mais comme il n'entre dans aucun détail sur les

moyens qu'il a employés pour y parvenir, on peut conjecturer qu'il en soupçonnoit seulement la possibilité.

Boërhaave, dans le second volume de sa Chimie, au *procédé 137*, expose en détail la méthode de préparer le sel ammoniacal nitreux, en le désignant par la dénomination de *nitre régénéré volatil*; il détermine exactement la forme de ses cristaux, & après avoir dit que ce sel est à demi-volatil, il ajoute qu'il faut une assez forte chaleur pour le sublimer: ce dernier trait, quoiqu'un peu différent de ce que je viens de dire, indique que Boërhaave avoit réellement opéré lui-même cette sublimation sans qu'il fût arrivé de détonation, puisque ce Chimiste, en achevant de caractériser ce sel, affirme qu'il ne s'enflamme que comme le nitre ordinaire, c'est-à-dire, par le contact immédiat des matières inflammables; ce qui n'est pourtant pas tout-à-fait exact, puisque l'on sait à présent, que ce sel exposé seul à une chaleur plus intense sans doute que celle qui a été employée par Boërhaave, est capable de s'enflammer.

Parvenu à la sublimation de ce sel, je devois encore examiner ce qui se passoit pendant son inflammation; je ne m'attendois pas à trouver, du côté de sa volatilité, un obstacle si grand; j'essayai plusieurs fois, mais en vain, de le faire enflammer dans une cornue, ce sel se sublima toujours long-temps avant qu'il eût pu recevoir assez de chaleur pour son inflammation: je poussai même cette expérience au point de tenir la cornue à la main sur les charbons ardents, sans pouvoir réussir; ce défaut de succès me détermina à m'y prendre d'une autre manière.

Je fis rougir sur les charbons ardents une cornue de grès tubulée, à laquelle j'avois adapté un très-grand récipient; je jetai, à différentes reprises, par la tubulure, du sel ammoniacal nitreux; je bouchai tout de suite après, l'ouverture de la cornue; ce sel aussitôt s'enflamma, il passa dans le récipient beaucoup de vapeurs rutilantes qui l'obscurcirent pendant quelque temps: l'inflammation étant finie, je délutai les vaisseaux, & je ne vis pas sans surprise, que la petite quantité

de liqueur contenue dans le ballon, étoit bien différente de celle que l'on retire du clifus de nitre; que l'inflammation de ce sel n'avoit pas été suivie de la destruction totale de l'acide nitreux, mais plutôt de celle de l'alkali volatil qui se trouvoit anéanti & dissipé en entier.

Je sentis pour lors la nécessité de répéter cette expérience d'une manière plus exacte, dans la vue d'observer si dans l'inflammation du sel ammoniacal nitreux, l'acide nitreux étoit conservé en entier, ou si la portion qui restoit, ne devoit son existence qu'au peu de matière inflammable contenue dans l'alkali volatil, qui n'avoit pu suffire pour le détruire entièrement.

Je mis quatre onces d'acide nitreux très-pur, qui pesoit dix gros, dans une fiole qui contenoit juste une once d'eau distillée, je les saturai avec deux onces d'alkali volatil concret dégagé du sel ammoniac par l'alkali fixe; je fis évaporer la liqueur, & au lieu de faire cristalliser le sel, je le fis dessécher au bain de sable, dans la même capsule de verre qui m'avoit servi pour son évaporation, il m'en resta deux onces quatre gros trente-six grains; c'étoit donc à peu-près sur cette quantité de sel, une once vingt-trois grains d'acide, & douze gros d'alkali volatil.

Je pris une demi-once de ce sel ammoniacal nitreux, que je mis par projection dans la même cornue de grès qui m'avoit déjà servi, & à laquelle j'avois adapté un appareil de ballon enfilé, que j'avois pesé exactement: comme ce sel étoit plus sec, son inflammation fut plus vive & plus prompte, les vapeurs qui se répandirent dans ces vaisseaux, furent de même plus rutilantes, & eurent beaucoup de peine à se condenser; je laissai rassembler les vapeurs pendant vingt-quatre heures, & ayant repesé de nouveau les vaisseaux, je les trouvai augmentés du poids d'un gros & demi, la liqueur qu'ils contenoient, étoit de très-bon acide nitreux citrin, qui m'a paru ne différer en aucune manière de l'acide nitreux ordinaire; il étoit plus fort & plus concentré que celui que j'avois employé, puisque pour saturer un gros de cet acide,

il a fallu 48 grains d'alkali volatil concret, au lieu que le premier n'en exigeoit que la moitié de son poids.

Il se passe donc ici un phénomène bien singulier, & qui fait exception à tous les autres sels qui ont cet acide pour base: on fait que lorsque le nitre touche à un corps enflammé, son acide s'enflamme, se détruit; ici c'est le contraire qui se passe, cet acide touche à un corps enflammé, sa base se détruit, mais il se conserve lui-même sans souffrir aucune altération.

Cependant, pour prévenir toute objection, & pour mettre le complément à cette expérience, il étoit essentiel que j'en substituasse une autre qui mît encore dans un plus grand degré d'évidence l'inaltérabilité de l'acide nitreux.

Dans le même appareil que pour l'opération précédente, je mis, à plusieurs reprises, un mélange de trois gros de sel ammoniacal nitreux & d'un gros de charbon en poudre; cette matière s'enflamma plus promptement, la déflagration fut plus violente, une portion de la poudre de charbon fut emportée dans les vaisseaux, les vapeurs qui circuloient étoient très-rousses, & obscurcirent les récipients pendant tout le temps que dura cette détonation: lorsque les vapeurs furent rassemblées, je délutai les vaisseaux, je reconnus par l'odeur qui s'éleva, que la liqueur qu'ils contenoient, étoit de l'acide nitreux, mais qui se trouvoit accidentellement mêlé avec un peu de charbon; quoique j'eusse pesé cet appareil auparavant, je ne pouvois plus me servir de ce poids pour constater la quantité d'acide que j'avois obtenue, son mélange avec le charbon s'y opposoit; je crus que le moyen le plus sûr & le plus exact, étoit de saturer cet acide avec de l'alkali fixe; je mis dans une capsule de verre, les liqueurs contenues dans les récipients, j'y passai, à plusieurs reprises, de l'eau distillée, pour emporter l'acide qui pouvoit y être resté; je saturai ces liqueurs avec de l'alkali fixe concret, ce qui en exigea 48 grains, & l'ayant soumise à l'évaporation, j'en obtins un gros & demi de nitre prismatique. Le charbon qui étoit passé dans le récipient, ainsi que celui resté dans la cornue, n'étoient point altérés, il avoit

conservé sa couleur noire, & parut n'avoir perdu aucune de ses propriétés.

J'ai varié cette expérience ; dans la vue d'observer si je ne pourrois pas parvenir à enflammer l'acide nitreux, j'ai fait rougir dans une cornue tubulée, de la poudre de charbon, sur laquelle je versai, à plusieurs reprises, du sel ammoniacal nitreux ; la déflagration se fit très-rapidement, une portion de la poudre de charbon fut de même emportée dans les vaisseaux, mais l'acide nitreux fut conservé comme dans l'expérience précédente, & le charbon ne fut point altéré.

Toutes ces expériences ont été faites très-exactement, & répétées plusieurs fois sous les yeux de M. de Lassone ; mais on conçoit facilement que quelque exactitude qu'on apporte, il n'est pas possible de prévenir la perte d'une portion de l'acide nitreux, puisqu'une partie de ces vapeurs, par l'inflammation subite de ce sel, s'échappe par la tubulure de la cornue, & par celle pratiquée au récipient.

On peut conclure de ces deux dernières expériences, que ce n'est point le défaut de matière phlogistique dans le sel ammoniacal nitreux, qui s'oppose à la destruction de l'acide nitreux, puisque par l'addition d'un phlogistique étranger, l'acide nitreux a été également conservé.

Il en résulte encore deux vérités très-importantes, ignorées jusqu'ici, puisque je crois que nul Chimiste n'a dit avant moi, que l'acide nitreux combiné avec une base alcaline volatile, fût susceptible de rester intact après avoir souffert le degré de chaleur de l'incandescence ; & que l'alkali volatil fût, dans ce cas, seul susceptible de s'enflammer, & de se détruire par cette inflammation.

M. Baumé, dans le second volume de sa Chimie, à la page 77, à l'article *alkali volatil au feu*, propose ses doutes à ce sujet ; voici ce qu'il dit : « comme l'alkali volatil contient » essentiellement une huile très-tendue & très-rectifiée, elle » est nécessairement très-inflammable ; cependant on ne fait » (continue cet habile Chimiste) si l'alkali volatil est inflam-

mable, & en supposant qu'il le soit, si ce sel seroit détruit « pendant son inflammation ».

Il dit encore, *page 129*, même volume, à l'article *alkali volatil & nitre*, « qu'il seroit intéressant de savoir si par la projection de l'alkali volatil sur du nitre en fusion, l'alkali « volatil seroit détruit & brûlé ».

Les expériences dont je viens de rendre compte, me paroissent répondre en partie aux questions proposées par M. Baumé, puisqu'elles prouvent que l'alkali volatil s'enflamme, & se détruit entièrement par son inflammation: d'autres expériences que je vais rapporter, en fourniront encore de nouvelles preuves.

Quelques anciens Chimistes ont déjà parlé avant moi, de l'inflammation du nitre par le sel ammoniac, mais apparemment ces expériences n'ont pas été connues des Chimistes modernes, puisqu'on n'en trouve le détail dans aucun Ouvrage.

Stalh cependant rapporte dans son *Traité des Sels*, traduction françoise, *page 83*, que Basile Valentin avoit déjà connoissance de l'action du sel ammoniac sur le nitre, & qu'il désignoit la liqueur qu'il en retiroit, sous le nom d'*aqua pugilum* ou *eau des champions*: Kunckel qui avoit travaillé sur la même matière, pensoit que cette eau des champions ne différoit point de l'eau régale ordinaire; mais il paroît que Stalh n'étoit pas du même avis, puisqu'il dit, *page 85*, que cette eau est différente de l'eau régale, vu que dans l'eau de Basile Valentin, on ne peut trouver d'acide nitreux: par les remarques que fait Stalh dans ce chapitre, il paroît que c'est à l'onctuosité de l'alkali volatil qu'il rapportoit l'inflammation du nitre par le sel ammoniac, persuadé cependant que l'acide nitreux étoit également décomposé; mais comme il ne donne que des aperçus sur cette opération, j'ai cru ne devoir point m'en tenir-là, & répéter moi-même l'expérience.

Boërhaave, dans sa *Chimie*, *Traité des Menstrues*, ne fait seulement qu'indiquer cette opération, sans en dire davantage.

Je mis, à plusieurs reprises, dans une cornue de grès

tubulée, un mélange, en partie égale de sel ammoniac & de nitre; il ne se fit qu'une légère détonation, une petite portion seulement de nitre s'enflamma, & il ne passa que très-peu de vapeurs dans le récipient, quoique pourtant la cornue fût bien rouge; je débouchai l'ouverture de la cornue, je vis que le sel ammoniac s'étoit sublimé avant que le nitre eût pu recevoir le degré d'ignition convenable pour entrer en fusion.

Ce moyen me paroissant infructueux, je résolus de répéter cette expérience d'une autre manière: je plaçai une autre cornue de grès tubulée, au milieu des charbons ardens, dans laquelle j'avois mis deux onces de nitre: lorsque le sel fut en parfaite fusion & très-rouge, j'y ajoutai, à différentes reprises, du sel ammoniac en poudre; le sel aussitôt s'enflamma avec rapidité, il se répandit sur le champ dans le laboratoire, ainsi que dans les vaisseaux, une vapeur très-épaisse qui avoit une très-forte odeur d'eau régale; la flamme, par cette inflammation, est si prompte & si vive, que quelque habile que l'on soit pour boucher la tubulure, on ne peut éviter la perte de beaucoup de vapeurs: cette opération est très-délicate, & exige beaucoup de précaution de la part de ceux qui voudront la répéter: je continuai les projections du sel ammoniac pour enflammer tout le nitre, ce qui en exigea une once & demie; la détonation étant finie, je laissai refroidir les vaisseaux, & malgré la perte inévitable de beaucoup de vapeurs, j'obtins encore une demi-once de liqueur; je reconnus, par l'examen que j'en fis, que dans cette opération, l'acide nitreux n'avoit pas été totalement détruit, puisque cette liqueur étoit, ainsi que Kunckel l'avoit avancé, une véritable eau régale qui contenoit encore un peu de sel ammoniac qui avoit été enlevé par la violence de la détonation, puisque l'or dissous dans cette eau régale, est fulminant, quoique précipité par l'alkali fixe.

Je fis dissoudre dans de l'eau distillée, le résidu resté dans la cornue, la dissolution filtrée m'a fourni par l'évaporation, des cristaux de sel fébrifuge de Sylvius, ainsi que l'avoit déjà

déjà remarqué Stalh , parmi lesquels il se trouvoit encore un peu de nitre , mais l'alkali volatil fut détruit entièrement.

Le sel ammoniacal vitriolique, traité de même dans une cornue tubulée, enflamma aussi vivement le nitre que le sel ammoniac, l'alkali volatil fut détruit en entier, & l'acide nitreux fut en grande partie conservé.

Le sel ammoniacal acéteux sublimé, préparé avec le vinaigre radical, selon la méthode qu'en a donnée M. de Laffone, & projeté sur du nitre en fusion, l'enflamma également; mais dans cette expérience, l'acide nitreux, le vinaigre radical & l'alkali volatil sont détruits, la liqueur qui passe dans le récipient est alkaline, ainsi que celle du clissus de nitre, puisqu'elle verdit sur le champ le sirop de violette.

Toutes ces expériences prouvent donc que l'alkali volatil joue le principal rôle dans la détonation de tous ces sels, puisque dans tous les cas dont je viens de parler, ce sel s'est enflammé, & a été détruit complètement par son inflammation.

Cependant, pour que l'alkali volatil puisse enflammer le nitre, il est essentiel qu'il soit combiné avec un acide quelconque, ainsi que je viens de le faire voir, autrement, s'il est seul, son action n'est pas la même, & on ne peut parvenir à l'enflammer; j'ai tenté plusieurs fois cette expérience sans avoir jamais pu y réussir; j'ai jeté, à plusieurs reprises, de l'alkali volatil concret sur du nitre fondu & rouge, il n'y a point eu de détonation, aucune espèce de flamme, le nitre est resté en pleine fusion, & l'alkali volatil s'est dissipé en entier: j'ai varié cette expérience de plusieurs manières, j'ai fait des mélanges de parties égales de nitre & d'alkali volatil concret, que je mettois par projection dans un creuset très-rouge, même résultat; l'alkali volatil, comme plus volatil, se dissipoit, & le nitre restoit fondu & tranquille au fond du creuset; j'ai répété la même expérience dans une cornue tubulée, sans avoir pu obtenir aucune espèce d'inflammation.

Deux causes m'ont paru propres à expliquer cette différence de l'alkali volatil sur le nitre comparé aux sels ammoniacaux,

Mém. 1783.

C c c c c

sa volatilité & la grande quantité d'eau qu'il contient, sont, à ce que je pense, les principaux obstacles qui s'opposent à son inflammation: en effet, lorsqu'on verse sur du nitre en fusion de l'alkali volatil concret, ce sel, par sa trop grande volatilité, n'étant pas susceptible de supporter le degré de chaleur qui est nécessaire pour mettre le nitre en fusion, se dissipe sans pouvoir former aucune combinaison, le phlogistique qu'il contient n'étant pas assez à découvert, & se trouvant trop embarrassé dans l'eau, principe de ce sel, ne peut point agir sur le nitre; au lieu que si ce même alkali volatil est combiné avec un acide quelconque, le composé qui en résulte, a une fixité plus grande, & est en état de soutenir un degré de chaleur plus fort qu'il ne le faisoit auparavant; ce sel contient d'ailleurs beaucoup moins d'eau, le phlogistique y est plus à découvert; de-là, ce me semble, peut résulter la détonation du nitre.

Après avoir solidement établi & prouvé l'inflammabilité & la destructibilité totale de l'alkali volatil, je devois chercher à connoître en quel état le phlogistique étoit dans ce sel, savoir s'il y étoit dans l'état huileux ou dans l'état de siccité; je me persuadai qu'en présentant à l'acide nitreux une matière qui contienne du phlogistique dans l'état de siccité, je pourrois peut-être parvenir à découvrir quelques vérités.

Je mis dans une cornue de verre 4 gros de charbon en poudre, sur lequel je versai 4 onces de bon acide nitreux citrin, pesant 11 gros 24 grains, dans une bouteille qui contenoit juste une once d'eau distillée; le mélange se fit sans chaleur apparente, il ne s'excita aucun mouvement sensible: j'adaptai à cette cornue un ballon qui pouvoit contenir environ 20 pintes, & pour plus grande sûreté, je mis cet appareil dans une cour, je laissai ce mélange en digestion pendant douze heures, pour que le charbon fût mieux pénétré par l'acide: ce dernier, pendant cet espace de temps, parut avoir agi sur le charbon, & avoit pris beaucoup de couleur, je soumis ensuite ce mélange à la distillation, le premier degré de chaleur ne fit dégager que quelques vapeurs; mais ayant

un peu augmenté le feu, le ballon se remplit de vapeurs rouges, & resta ainsi obscurci presque pendant tout le temps que dura cette opération; le feu fut sur la fin assez fort pour faire rougir le fond de la cornue: l'acide nitreux, retiré par ce procédé, avoit perdu cette couleur dont il s'étoit chargé par la digestion, & il ne différoit point de ce qu'il étoit auparavant.

Je recohobai, à quatre reprises, de nouvel acide nitreux sur le charbon resté dans la cornue, les résultats furent les mêmes, & le charbon, après ces quatre distillations réitérées, n'avoit pas diminué d'un seul grain de son poids; il avoit conservé sa couleur noire & brillante, & toutes ses propriétés.

Le peu de succès de cette expérience pour l'objet que je m'étois d'abord proposé, paroît pourtant indiquer que l'acide nitreux ne reçoit pas du phlogistique du charbon une altération semblable à celle qu'en reçoit l'acide vitriolique, puisqu'il reste en même état où il étoit auparavant.

On peut encore présumer que le défaut d'inflammabilité de la part de l'acide nitreux sur le phlogistique du charbon, annonce que le phlogistique dans l'alkali volatil, y est, ainsi que l'ont déjà pensé avant moi plusieurs habiles Chimistes, plutôt dans l'état huileux que dans l'état de siccité, je suis d'autant plus fondé à le croire, que dans nombre d'occasions, l'alkali volatil se démontre par son latus huileux, ainsi qu'on peut s'en assurer par l'odeur d'empyreume qu'il communique à l'eau lorsqu'il a été long-temps exposé à l'air, & enfin par son inflammabilité lorsqu'il est combiné avec l'acide nitreux, puisque ce même acide seul ne s'enflamme point quand il est en contact avec le phlogistique pur dans l'état de siccité.

Cette différence du sel ammoniacal nitreux, comparée au nitre ordinaire, exigeoit encore de ma part un nouvel examen, il s'agissoit de m'assurer si la poudre à canon préparée avec ce sel, au lieu de nitre à base d'alkali fixe, produiroit des effets différens de la poudre ordinaire: j'ai fait plusieurs mélanges, le premier étoit dans les mêmes proportions que pour la composition de la poudre ordinaire; savoir, de huit

parties de nitre ammoniacal, de deux parties de soufre & d'une partie de charbon en poudre; dans le second mélange, je diminuai la dose du soufre & du charbon; dans le troisième, je supprimai le soufre; dans le quatrième, je n'y ajoutai que du soufre sans charbon, tous ces mélanges ont été battus dans un mortier de fer avec un pilon de bois pendant sept heures consécutives, il n'a pas été nécessaire de les arroser avec de l'eau, comme cela se pratique pour la poudre ordinaire, la déliquescence de ce sel a suffi pour les humecter assez sans que l'on eût aucun risque à courir. Après le temps convenable de trituration, j'exposai ces mélanges au Soleil pour les faire sécher, je les renfermai ensuite dans des bouteilles bien bouchées, afin de les maintenir en bon état, parce que ces poudres attiroient promptement l'humidité de l'air, & que pour lors elles n'auroient plus été propres aux expériences auxquelles je voulois les soumettre.

Par la différence déjà établie entre la détonation du nitre & celle du sel ammoniacal nitreux, je soupçonnois que ces poudres produiroient très-peu d'effet; l'examen que j'en fis me le confirma encore davantage. Ces deux premiers essais ne sont pas susceptibles de cette détonation prompte & rapide qui caractérise la vraie poudre à canon, il faut même, pour que cette poudre puisse s'enflammer, qu'elle touche à un corps enflammé, autrement la flamme ne se communique point, & il n'y a que la partie qui y touche qui en soit susceptible; ces poudres sont, comme l'on voit, sans force & sans vertu: le troisième & le quatrième mélange, dans lesquels j'avois retranché à l'un le soufre & à l'autre le charbon, furent de même sans effet, celui préparé avec le charbon s'enflamma plus promptement que ce dernier dans lequel il n'y avoit que du soufre, mais il n'y eut point de détonation; j'essayai de sublimer le dernier mélange, la sublimation se fit facilement, le sel ammoniacal nitreux s'étoit confondu avec le soufre; j'en exposai une partie sur les charbons ardents, l'inflammation de ces deux substances se fit successivement, d'abord le sel ammoniacal nitreux & ensuite le soufre.

Toutes ces expériences semblent appuyer de plus en plus l'opinion de Stalh sur la détonation de la poudre à canon; il est probable que si ces poudres sont sans effet, cela dépend de ce qui se passe pendant leur inflammation : ici il n'y a que l'alkali volatil qui s'enflamme, l'acide nitreux étant conservé, l'eau qui entre dans la mixtion intrinsèque ne peut, selon toute apparence, se dilater assez pour occasionner une explosion aussi violente que celle qui a lieu dans la poudre à canon ordinaire.

J'ai essayé de faire de la poudre fulminante avec le sel ammoniacal nitreux, dans les mêmes proportions que pour la poudre fulminante ordinaire, le seul changement que j'y ai fait, c'est qu'au lieu d'alkali fixe, j'y ai ajouté de l'alkali volatil concret; une partie de ce mélange exposé dans une cuiller de fer à un feu très-doux, mais cependant capable de faire fondre ces matières, n'occasionna aucune détonation: l'alkali volatil commença à se dissiper, ensuite le sel ammoniacal nitreux qui s'enflamma en partie, & lorsque la chaleur fut un peu plus forte, le soufre brûla fort tranquillement, sans qu'il ait paru avoir subi aucune altération.

La poudre de fusion préparée avec ce sel, ne produisit aucun effet, la flamme ne se communiqua point, & il n'y eut que la portion qui toucha au charbon ardent qui put s'enflammer.

Après l'exposé que je viens de faire des propriétés du sel ammoniacal nitreux, j'ai cru, pour compléter ce travail, pouvoir examiner sans crainte l'action de l'acide nitreux par la distillation sur le sel ammoniac. Tous les Chimistes savent que l'eau régale qu'on obtient par le simple mélange de cet acide avec ce sel, est plus expansible que celle qui est formée par l'union des acides nitreux & marin, plusieurs même conseillent de ne la préparer qu'au besoin, attendu qu'elle est toujours en effervescence dans les flacons, qu'elle se dilate à la moindre chaleur, & qu'elle fait sauter le bouchon s'il n'est bien assujetti avec une peau. Je me propose de faire voir que l'expansibilité de cette eau régale, n'est occasionnée que par

l'air qui se sépare par l'action réciproque de ces différentes substances.

J'ai mis dans une cornue de verre qui pouvoit contenir environ deux livres d'eau, une once de sel ammoniac en poudre, exempt de matière fuligineuse, j'ai versé sur ce sel 4 onces d'acide nitreux très-pur, précipité par l'argent & ensuite redistillé : dans l'instant du mélange il ne s'est excité aucune effervescence, & il ne s'est point dégagé de vapeurs, le froid qui s'est passé n'a pu faire descendre le thermomètre que de 3 degrés, la température étant à 8 au-dessus de la glace; après une demi-heure de digestion, l'acide nitreux qui étoit clair & sans couleur, prit, en dissolvant le sel ammoniac, une couleur jaune très-foncée : je plaçai cette cornue sur un bain de sable sans l'entourer, & à l'aide d'une chaleur douce, il commença à s'élever à la surface de la liqueur, quelques bulles d'air qui augmentèrent en proportion de ce que la chaleur étoit plus forte, un instant après il se fit une vive effervescence, & il se dégagait par la tubulure pratiquée au récipient, beaucoup d'air très-élastique. Ce moment est important à saisir, & c'est celui qui exige le plus d'attention de la part de l'Artiste; s'il arrivoit cependant que l'effervescence fût trop considérable, on pourroit sans crainte soulever la cornue & la poser hors du fourneau pour attendre qu'elle soit passée; en prenant toutes ces précautions, on pourra éviter beaucoup de perte. Comme la liqueur distille assez facilement, il n'est pas nécessaire, pour l'amener à l'état de siccité, de pousser beaucoup le feu : si cette opération a été bien ménagée & conduite avec attention, on peut retirer de ce mélange 4 onces 5 gros d'une eau régale très-claire & d'une couleur légèrement citrine : il ne m'est resté dans la cornue que 5 grains de matière terreuse, couleur d'ocre, tout le sel ammoniacal nitreux qui s'étoit formé, résultant de la décomposition du sel ammoniac, étoit passé dans le récipient avec la liqueur, & se trouvoit mêlé & confondu avec l'eau régale.

J'ai versé sur la matière terreuse restée dans la cornue, une petite quantité d'acide marin très-pur, elle s'y est très-bien

dissoute, & cette dissolution versée sur la liqueur saturée de la matière colorante du bleu de Prusse, a été précipitée sur le champ en bleu, ce qui prouve que c'est du fer.

J'ai répété cette expérience avec du sel ammoniac d'Égypte, & de l'acide nitreux ordinaire, les résultats ont été les mêmes le sel ammoniacal nitreux a également passé dans la liqueur, & l'eau régale que j'ai obtenue par ce procédé, ne diffère point de celle qui est décrite dans l'expérience précédente.

Cette eau régale ainsi obtenue par la distillation, est donc semblable, quant au fond, à celle préparée par le simple mélange; elle m'a paru en différer cependant à quelques petits égards, dépendant comme je l'ai dit du dégagement de l'air qui s'est fait pendant cette opération; en effet, son odeur est moins vive, & moins pénétrante, elle peut se conserver très-facilement & sans crainte; il y en a depuis plus d'un an dans le Laboratoire de M. de Lassone, un flacon qui a été exposé aux vicissitudes du chaud & du froid; le bouchon n'a point été assujetti avec une peau, comme on le pratique ordinairement, & cependant il n'a jamais été soulevé par cette liqueur, comme je l'ai vu arriver plusieurs fois, même à de l'eau régale ordinaire faite par le simple mélange d'acide nitreux & d'acide marin.

On peut comparer cette eau régale ainsi distillée, à l'éther nitreux préparé de la même manière; celui qui est fait par le simple mélange de l'esprit-de-vin & de l'acide nitreux, est si mobile & si expansible, que pour pouvoir le contenir dans un flacon, il faut que ce vase soit à demi-plein, le bouchon bien assujetti, & le conserver dans un endroit frais; au lieu que s'il a été préparé par la distillation, la quantité d'air qui s'est dégagée le rend beaucoup moins expansible.



M É M O I R E

SUR LA

FRACTURE EN TRAVERS DE LA ROTULE,

Par M. SABATIER.

LA fracture en travers de la rotule, si différente par sa cause, de celles qui arrivent aux autres os, puisqu'elle est, pour le plus souvent, la suite de la contraction subite & violente des muscles extenseurs de la jambe, l'est encore par l'action que les mêmes muscles continuent d'exercer sur elle: en effet, au lieu de rapprocher les pièces rompues, & de les faire chevaucher l'une sur l'autre, comme il arrive ailleurs, cette action tend à les éloigner, & plus elle est forte, plus ces pièces s'écartent. Les vues des Praticiens, dans le traitement de la maladie dont il s'agit, ont dû être par conséquent de ramener les deux portions d'os à leur situation naturelle, & sur-tout la supérieure, dont le déplacement est toujours plus grand que celui de l'inférieure, & de les maintenir dans un état qui favorisât leur agglutination: mais les moyens qu'ils ont employés pour remplir cette seconde indication, y sont-ils aussi propres qu'on se l'est persuadé? Les bandages, quels qu'ils soient, sont un foible obstacle au raccourcissement des muscles. Pour s'en assurer, il suffit de prendre garde à ce qui arrive aux fractures de la rotule, lors même qu'elles sont traitées de la manière que l'on croit la plus méthodique. J'en ai vu un grand nombre qui l'avoient été, soit à l'Armée, soit dans les Hôpitaux du Roi, & j'ai toujours trouvé entre les pièces fracturées, un écartement plus ou moins grand, qui prouvoit que les muscles les avoient tirées en sens contraire, malgré ce que l'on avoit fait pour s'y opposer. Je n'ignore pas que pour l'ordinaire, l'écartement dont je parle est un accident consécutif, qui, semblable au raccourcissement qu'on voit survenir

survenir aux fractures de la jambe & de la cuisse, arrive après la guérison apparente & par la même cause, c'est-à-dire, par le peu de solidité du cal, ou pour parler plus exactement, par l'insuffisance des moyens dont la Nature se sert pour les consolider; mais je l'ai vu se faire pendant le traitement. Pour le prévenir dans la méthode usitée, il faudroit que la compression que l'on exerce au moyen des bandages, l'emportât sur l'action des muscles, ce qui pourroit avoir de fâcheux inconvénients. On a souvent été dans la nécessité de relâcher l'appareil appliqué à des fractures simples, parce qu'il s'étoit fait au-dessus & au-dessous un gonflement douloureux, & qui eût menacé de gangrène, si on lui eût donné le temps de faire des progrès. Cela arrive aux fractures de la rotule comme aux autres: je ne l'ai jamais éprouvé d'une manière plus remarquable, que sur un Soldat que j'ai autrefois traité de cette maladie. La tuméfaction du genou fut si grande, qu'il ne me fut pas possible de substituer un autre bandage à celui que je venois d'ôter, & que je fus réduit à tenir la jambe & le pied élevés. J'espérois que les saignées, les fomentations émollientes dont j'usai d'abord & que je rendis ensuite résolutes, & le régime, dissiperoient bientôt cet accident, & me procureroient la facilité de revenir à mes premiers moyens; je me trompai: le gonflement subsista au-delà du temps où les fractures de cette espèce ont coutume de se guérir; mais les craintes que m'inspiroit l'abandon dans lequel j'étois contraint de laisser le malade, ne durèrent pas long-temps. Je m'aperçus de bonne heure que les pièces de la rotule qui avoient été rapprochées autant qu'elles avoient pu l'être, ne se déplaçoient pas, & je pensai qu'elles ne devoient pas éprouver plus d'obstacle à leur aglutination que dans toute autre circonstance; en effet, elles se collèrent avec assez d'exactitude, & le malade ayant commencé à marcher au bout de trois mois & demi à quatre mois, il ne se fit qu'un écartement très-médiocre, & le genou reprit peu-à-peu sa mobilité ordinaire.

La réussite que je venois d'obtenir étoit assez remarquable

Mém. 1783.

D d d d d

pour m'obliger d'en rechercher la cause. Je ne tardai pas à concevoir que le malade ayant observé le repos le plus exact, & la partie ayant été maintenue dans une bonne situation, il n'y avoit eu aucune raison pour que les parties de la rotule s'écartassent de nouveau. Effectivement, elles n'ont de tendance à s'éloigner, & ne le font réellement, qu'autant que le genou est entraîné dans la flexion, ou que les muscles qui occupent la partie antérieure de la cuisse, viennent à se contracter : cela est si vrai, que l'intervalle qui les sépare est médiocre en ceux qui ne tombent pas après leur accident, ou qui ne font pas d'efforts pour se soutenir ou pour marcher, au lieu qu'il est fort grand en ceux qui perdent l'équilibre, ou qui essayent des mouvemens dont ils ne sont plus capables ; d'ailleurs, j'avois pris la précaution de tenir le pied & la jambe élevés, & par conséquent de fléchir en quelque sorte la cuisse sur le bassin, ce qui avoit considérablement relâché le muscle droit antérieur de la cuisse, l'un des plus forts extenseurs du genou, & à l'action duquel on doit principalement attribuer les grands dérangemens qui accompagnent pour l'ordinaire la fracture de la rotule.

Ces réflexions me conduisirent à penser que peut-être le moyen dont j'avois été obligé de me contenter, suffisoit pour obtenir la guérison de la fracture de la rotule en travers : j'eus bientôt occasion de vérifier cette présomption dans deux cas qui se présentèrent à la suite de celui dont je viens de parler, & je vis que l'omission des bandages ne mettoit aucun obstacle à la consolidation. Ce n'est pas que j'eusse cru pouvoir me permettre de ne pas y appliquer l'appareil dont j'avois fait usage dans des maladies de cette espèce, mais il étoit devenu si lâche qu'il eût été inutile au maintien des pièces fracturées, si elles eussent eu la moindre tendance à s'écarter. Voyant que les choses étoient en bon état, je ne pensai pas à le renouveler, & lorsqu'enfin il fut devenu sale & qu'il fallut le lever, je n'en mis point un autre & laissai la partie à nu, avec la précaution de tenir la jambe étendue & la cuisse légèrement fléchie. Ces faits qui se sont passés il y a déjà plusieurs

années, ne se présentent plus à ma mémoire avec assez d'exactitude, pour que je puisse en détailler les diverses circonstances; aussi les aurois-je tus s'ils ne venoient d'être confirmés par deux observations toutes récentes, & dont les sujets sont encore sous mes yeux. Une femme âgée de soixante ans, d'une constitution robuste & d'une humeur peu docile, se cassa la rotule droite en travers, le 5 Avril 1781; il se fit un écartement très-grand & fort douloureux, auquel je crus devoir remédier sur le champ par les soins d'usage, afin de ne pas la jeter dans le découragement où elle seroit infailliblement tombée si, négligeant d'appliquer un appareil contentif sur le genou, j'avois paru ne pas faire à son mal toute l'attention qu'il exigeoit, & ne pas lui apporter des secours qui lui étoient connus. Elle passa la nuit dans une grande agitation & avec beaucoup de douleurs. Le lendemain il s'étoit déjà fait un gonflement qui obligea de relâcher le bandage: malgré cela, les douleurs continuant à se faire sentir avec force, & la tuméfaction subsistant toujours, il fallut l'ôter tout-à-fait. Le Chirurgien qui soignoit la malade sous ma direction, étoit instruit des faits que j'ai rapportés précédemment, & il connoissoit les conséquences que j'en avois tirées; cependant, comme la malade l'intéressoit d'une manière particulière, il n'étoit pas sans inquiétude sur l'évènement de sa maladie. Je n'eus pas de peine à le rassurer à cet égard, & à lui persuader qu'elle ne guériroit pas moins aisément, pourvu que l'extrémité fût constamment tenue dans une situation favorable, & qu'il ne se fit pas de mouvement. Il eut bientôt sujet d'en être convaincu, lorsqu'il s'aperçut que les pièces fracturées ne s'écartoient pas; en conséquence, il ne pensa plus à rien appliquer que quelques compresses trempées dans une fomentation résolutive, au moyen de laquelle le genou est revenu à sa grosseur ordinaire. La guérison est aussi complète que dans aucun autre cas que j'aie vu; & quoique les pièces de la rotule se soient un peu écartées depuis que la malade a repris son genre de vie ordinaire, elle n'en est pas plus incommodée, & marche avec une grande liberté; au reste,

l'écartement, que l'on pourroit estimer de quatre à cinq lignes, me paroît moins considérable, parce que les deux extrémités de l'os se sont fort amincies sur leurs bords opposés, & s'approchent beaucoup au fond du sillon qui les sépare.

Un homme d'un âge assez avancé, s'étant fracturé la rotule en travers, on crut devoir en maintenir les pièces par un bandage qui fut appliqué avec beaucoup d'adresse, mais qui étoit un peu ferré ; heureusement il n'y avoit pas encore long-temps quand je vis le malade, & la douleur & le gonflement n'avoient pas fait des progrès bien considérables ; je fis ôter l'appareil, & je me contentai de laisser l'extrémité dans la situation où on l'avoit mise. Un oreiller placé sous la cuisse, la maintenoit à demi fléchie sur le tronc, & d'autres oreillers accumulés sous la jambe, ne permettoient au genou qu'une flexion très-légère ; je ne tardai pas à m'apercevoir que la pesanteur du corps & celle du membre dérangoient cette situation, & j'imaginai de faire attacher aux quatre coins de l'oreiller le plus élevé de ceux sur lesquels la jambe étoit placée, de larges rubans de fil, que je fis passer sur les tringles du lit, qui étoit à colonnes ; par ce moyen, la jambe se trouva suspendue, & il n'y eut plus à craindre qu'elle affaîssât l'oreiller sur lequel elle portoit : les choses sont restées en cet état tout le temps de la cure, qui n'a duré que le temps ordinaire, & dont les suites ont été aussi heureuses qu'elles ont coutume de l'être.

Ce n'est donc pas par des bandages, dont l'action est toujours insuffisante, & qui peuvent donner lieu à des accidens plus ou moins graves, qu'on doit chercher à contenir la fracture en travers de la rotule ; c'est par une bonne situation, qui consiste à mettre le genou dans une légère extension, & à soutenir la cuisse à demi-fléchie sur le tronc ; par ce moyen, les muscles extenseurs de la jambe, raccourcis autant qu'ils peuvent l'être, n'exercent plus sur la partie supérieure de la rotule, qu'une action médiocre, qui est suffisamment compensée par la résistance que lui offrent les fibres aponévrotiques des parties du triceps crural, connues sous les

noms de *vasse interne* & de *vasse externe*, dont cet os est enveloppé. On fait qu'un muscle, dont la continuité est détruite, diminue sur le champ de longueur, en vertu de son action tonique, mais cela n'arrive qu'autant qu'il est dans la tension; lorsqu'il est possible de le mettre dans le relâchement, ses parties cessent de s'éloigner, souvent même elles s'approchent & chevauchent: on a observé cet effet dans les ruptures du tendon d'achille, & je l'ai vu dans des plaies qui intéressoient des parties charnues. Il ne s'agit donc que de procurer le relâchement des muscles qui se fixent à la partie supérieure de la rotule, & c'est ce qu'on obtient aisément par le procédé indiqué: en vain craindrait-on les contractions auxquelles la douleur & l'irritation peuvent donner lieu; s'il en arrive, on s'y opposeroit mal par des bandages, ou s'ils y mettoient obstacle, ils exposeroient à un danger plus certain, par les engorgemens auxquels ils donneroient lieu. Qui fait même si les irritations dont les malades se plaignent quelquefois, ne sont pas l'effet de la pression que les bandages leur font éprouver? Le premier soin de ceux qui sont appelés pour traiter une fracture de la rotule, est de mettre un appareil convenable, ce qu'ils font souvent avant que les parties aient eu le temps de se tuméfier, comme cela doit arriver par la nature de l'accident: bientôt cet appareil se trouve trop serré; la crainte que l'on a que les pièces fracturées s'écartent de nouveau, empêche de le lever, & l'engorgement & la douleur deviennent plus considérables qu'ils ne l'eussent été si on se fût contenté de donner à la partie une situation qui favorisât le relâchement & l'inaction des muscles.

On pourroit croire que pour maintenir les pièces de la rotule l'une contre l'autre, il est nécessaire de mettre le genou dans une extension parfaite, & par conséquent de tenir le pied fort élevé: rien en effet n'est plus propre à procurer le plus grand relâchement possible aux parties du genou, & à permettre à la pièce inférieure de la rotule, de s'approcher de la supérieure; mais j'ai éprouvé dans le dernier des cas rapportés dans ce Mémoire, combien cette situation est incommode; le malade ressentit bientôt au jarret une douleur

à laquelle il lui fut impossible de résister, & que je ne calmai qu'en donnant au genou une légère flexion. L'appareil dont je faisois usage, m'en facilita les moyens; il ne fallut que fléchir un peu davantage la cuisse sur le bassin, en élevant les oreillers sur lesquels elle étoit posée. La machine autrefois imaginée par M. Petit (Jean-Louis), & dont la description se trouve dans les Mémoires de l'Académie, pour 1718, m'auroit été fort utile, mais je ne l'avois pas en ma disposition. L'emploi que je me propose d'en faire dans l'espèce de fracture dont je parle, n'avoit pas été prévu par son auteur; cet emploi en étendra l'usage, & contribuera peut-être à la faire mettre au nombre des instrumens dont les Chirurgiens ne peuvent se passer.

Je n'ignore pas combien les vues que je viens d'exposer s'éloignent de la pratique reçue, mais je supplie l'Académie de vouloir bien faire attention qu'elles m'ont été suggérées par l'expérience, & qu'elles se rapprochent des principes adoptés dans le traitement des plaies & dans celui de la rupture du tendon d'achille: d'ailleurs, la fracture en travers de la rotule, n'est pas la seule à laquelle on ne doive remédier que par la situation; pourquoi, ce dont on convient généralement pour la fracture du col de l'humérus & pour celle du col du fémur, n'auroit-il pas lieu ici? Peut-être en est-il d'autres auxquelles on feroit aussi-bien de n'opposer que le repos & la situation, que de tourmenter les malades par des moyens aussi douloureux qu'ils ont peu de succès: telle est, par exemple, la fracture de la clavicule, qui ne guérit jamais sans un raccourcissement ou chevauchement fort sensible, au moins si je puis en juger par ce qui est arrivé à celles que j'ai traitées ou vu traiter, & par ce que j'ai observé sur un grand nombre de Soldats que j'ai trouvé en avoir été attaqués, & qui ont été soumis à mon examen pour que je rendisse compte de leurs diverses infirmités.

F I N.

